普通本科考研适用——考点·题型·精解

李丽霞 主 编

张 蓓 刘秀君 副主编

考研线性代数选讲

清华大学出版社

李丽霞 主 编
张 蓓 刘秀君 副主编

考研线性代数选讲

清华大学出版社
北京

内容简介

本书基于本科阶段线性代数课程教学内容，选讲其中涉及考研的部分。全书共分 7 讲，分别为：行列式的计算，矩阵及其运算，矩阵的初等变换与矩阵的秩，向量组的线性相关性，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，矩阵的对角化，以及二次型及其标准形。每讲均配有一定数量的练习题，并给出了练习题的解答。

本书既可作为考研线性代数选讲课程的教材，也可作为考研复习阶段和本科学生学习线性代数时的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

考研线性代数选讲/李丽霞主编. --北京：清华大学出版社，2013

ISBN 978-7-302-33075-2

Ⅰ. ①考…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①线性代数－研究－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 151051 号

责任编辑：陈　明　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　　社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　张**：9.5　　**字　数**：174 千字
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　**印　次**：2013 年 8 月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：18.00 元

产品编号：054493-01

前　言

线性代数是考研中数学科目必考的内容，其概念抽象，定理较多，各部分内容频繁渗透，再加上学时较少，使得许多学生基础知识掌握不牢。而线性代数的考研题目综合性较强，有一定的难度，很多同学在复习线性代数内容时感觉困难。因此，我们开设考研线性代数选讲课程，帮助学生夯实基础，拓展知识，了解考研题目的类型与难度，掌握正确的复习方法。

本书是编者在多年教学经验及对硕士研究生入学试题深入研究的基础上，由近年来考研线性代数选讲课程的讲义整理而成，选择了考研中线性代数的主要内容。全书共分 7 讲，每讲包括知识要点、典型例题解析、练习题、练习题参考答案。

知识要点部分：对考研大纲中所要求的知识点做了系统总结，帮助同学理解基本概念、公式和结论，达到融会贯通的目的。对教材中未详细讨论而考研中常用的重要结论做了补充证明，意在扫清学生的知识盲点。

典型例题解析部分：精选了考研题中常见的题型，对各类解题方法做了系统总结，帮助同学梳理解题思路，掌握解题方法和技巧，将知识真正转化为解题能力的提高。

练习题部分：精选了适量的练习题，帮助同学巩固所学知识。

练习题参考答案部分：给出了练习题较为详细的解答，方便学生学习。

无论是知识要点部分，还是典型例题解析部分，都非常重视各部分知识的联系与渗透，注重与考研要求的紧密结合。本书可以作为考研复习用书，也可作为本科学生学习线性代数时的参考书。

本书由河北科技大学理学院数学系的李丽霞主编，参加编写的还有河北科技大学理学院数学系的张蓓、刘秀君。由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请批评指正。

编　者

2013 年 5 月

目录

第 1 讲　行列式的计算

一、知识要点

1. 行列式的定义

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

一般地，称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

为 n 阶行列式. 其中 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 表示由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 构成的全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

注　n 阶行列式表示一个数，它是取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，共 $n!$ 项.

2. 行列式的性质

性质 1　行列式的行列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

等式右边的行列式称为左边行列式 D 的转置，记作 D^{T}. 所以 $D^{\mathrm{T}} = D$.

性质 2　行列式的某两行（列）元素成比例，则行列式为零.

性质 3　如果行列式中有一行（列）的每个元素都是两个数的和，则行列式可拆成两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 行列式的两行（列）互换，行列式变号.

性质 5 如果行列式中某行（列）的元素有公因子，则可将公因子提到行列式外. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 行列式中某一行（列）元素的k倍加到另一行（列），其值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 行列式的展开定理

(1) 余子式，代数余子式

在n阶行列式中，将元素a_{ij}所在的行与列上的元素划去，其余元素按照原来的相对位置构成的$n-1$阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式.

注 M_{ij}及A_{ij}只与元素所在的位置有关，与元素本身的值无关.

(2) 行列式按行（列）展开定理

设n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n.$$

即 n 阶行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，n 阶行列式的任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

4. 方阵的行列式的性质

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则有

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置，即 $\boldsymbol{A}$ 的行列互换）;

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$（$\lambda$ 为常数）;

(3) $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$（其中 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵）;

(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆）;

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$,

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$（其中 $\boldsymbol{B}$ 为 m 阶方阵）;

(6) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$（其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）;

(7) $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$（其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值）.

5. 几个特殊的行列式

(1) 上（下）三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) n 阶范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

二、典型例题解析

题型一　求数字型（尤其是含参数）行列式的值

例 1.1　求行列式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

分析　行列式的每一行（列）元素的和相等，即行列式的行（列）和相等，行和相等的行列式就可以把其余列都加到第 1 列，第 1 列各元素就有公因子，可以提出去，再将其余行都减去第 1 行就可以化为上三角形行列式或降阶，达到简化的目的. 对于列和相等的行列式也可以用类似方法处理.

解

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda).$$

例 1.2　求行列式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式的行和与列和均不相等，可把某一行（列）中不含 λ 的两个元素之一化为 0，则此零元素所在行（列）往往会出现公因式，再按行列式性质化零后展开降阶计算即可.

解

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+c_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

例 1.3 求行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}.$$

分析 行和与列和均不相等，但第 1 行（列）中不含 λ 的两个元素之一为 0，可直接按对角线方法计算.

解 $$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)-4(\lambda-1)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3).$$

说明 这种类型的行列式计算，在线性代数的考研题中一般不直接出现，但在求方阵的特征值时，需要计算这种行列式（特征多项式），由于需要对求出的行列式求根，所以最好不要直接按对角线展开，这样往往会使分解因式变得困难，在计算时，可根据行列式的特点，利用行列式的性质，先分解出关于 λ 的一次因式，从而使求根变得容易.

例 1.4 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 (　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

分析 判断方程 $f(x)=0$ 的根的个数，只需判断 $f(x)$ 是几次多项式即可.

不要错误地以为这样的 $f(x)$ 就是 4 次多项式，实际上，在 $f(x)$ 的展开式中，有 x 的 0 到 4 次项的多项式，但合并化简后，$f(x)$ 的次数可能会降低.

由于行列式的每一位置都含有 x，直接展开计算是很复杂的，应当先恒等变形消除一些 x 再计算.

解 用第 2,3,4 列分别减去第 1 列，再用第 4 列加上第 2 列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

易见 $f(x)$ 是 2 次多项式，所以选（B）.

题型二 n 阶行列式的计算

例 1.5 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+t & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2+t & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2 & \cdots & n+t\end{vmatrix}.$$

解 特征：行和相等. 将第 2 列，…，第 n 列都加到第 1 列，并提出公因子，再用第 $i\,(i=2,\cdots,n)$ 行减去第 1 行，即可化为上三角行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}\dfrac{n(n+1)}{2}+t & 2 & \cdots & n\\ \dfrac{n(n+1)}{2}+t & 2+t & \cdots & n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{n(n+1)}{2}+t & 2 & \cdots & n+t\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}+t\right)\begin{vmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 0 & t & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t\end{vmatrix}=\left(\frac{n(n+1)}{2}+t\right)t^{n-1}.$$

例 1.6 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix},\ a_i\neq 0;\ i=1,2,\cdots,n.$$

分析 这是一个除第 1 行、第 1 列和主对角线上的元素外，其余元素全为零的行列式，形状像个爪，称为爪形行列式. 用主对角线上的元素（斜爪）断掉横爪或竖爪可化为三角形行列式.

解 将第 $i+1\ (i=1,2,\cdots,n)$ 列的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 倍加到第 1 列，即可化为上三角行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n\\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n\end{vmatrix}=a_1\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

分析 由于行列式中某一行（列）的零元素较多，故可按行列式的展开定理降阶计算.

解 按第 1 列展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

题型三 求抽象矩阵的行列式

抽象行列式计算是线性代数考研题中填空题和选择题的常考题型，主要应用行列式及矩阵运算的行列式性质和行列式与特征值的关系进行计算.

例 1.8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ 4\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为 3 维列向量．若 $|\boldsymbol{A}|=12,\ |\boldsymbol{B}|=1$，则 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$______.

解 $$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}-2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\\ -\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\\ -\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\\ -\boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ 2\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ 4\boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_2^{\mathrm T}\\ \boldsymbol{\gamma}_3^{\mathrm T}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|+4|\boldsymbol{B}|=-2.$$

例 1.9 (2010 年数二、三) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$______.

解法一 $\left|A+B^{-1}\right|=\left|AE+EB^{-1}\right|=\left|ABB^{-1}+AA^{-1}B^{-1}\right|$

$$=\left|A(B+A^{-1})B^{-1}\right|=|A|\left|B+A^{-1}\right|\left|B^{-1}\right|$$

$$=|A|\left|B+A^{-1}\right|\frac{1}{|B|}=3.$$

解法二 因为$|A|\left|B+A^{-1}\right|=|AB+E|=\left|A+B^{-1}\right||B|$，所以$\left|A+B^{-1}\right|=3$.

说明 由于$A+B$的每行元素都是两个数的和，根据行列式的性质，$|A+B|$应拆成2^n个行列式的和，故一般情况下，$|A+B|\neq|A|+|B|$，要将和的行列式转化为乘积的行列式计算.

例 1.10 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为 3 维列向量，且$|A|=5$，设$B=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2)$，则$|B|=$______.

解法一 由于

$$B=(\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{pmatrix},$$

所以

$$|B|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&3&0\\2&0&5\\0&4&0\end{vmatrix}=-20|A|=-100.$$

解法二 按行列式的性质计算：

$$|B|=|\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,5\alpha_2|=5|\alpha_1+2\alpha_2,3\alpha_1+4\alpha_3,\alpha_2|$$

$$=5|\alpha_1,3\alpha_1+4\alpha_3,\alpha_2|=5|\alpha_1,4\alpha_3,\alpha_2|$$

$$=20|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2|=-20|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-100.$$

例 1.11 设矩阵$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵$A$满足$2B^{-1}=B^*A+A$，则$|A|=$_____.

解 显然$|B|=2$，等式两边左乘上B得：$2BB^{-1}=BB^*A+BA$.

由于$BB^*=|B|E=2E$，所以有$2E=2A+BA$，即$(B+2E)A=2E$，两边取行列式得：$|A||B+2E|=|2E|=8$，由于$|B+2E|=4$，所以$|A|=2$.

例 1.12（2012 年数二、三） 设A为 3 阶矩阵，且$|A|=3$，A^*为A的伴随矩阵，若交换A的第 1 行与第 2 行得B，则$|BA^*|=$______.

解法一 显然$|B|=-|A|=-3$，所以$|BA^*|=|B||A^*|=|B||A|^2=-27$.

解法二 令

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则 $B=PA$，因此 $|BA^*|=|PAA^*|=||A|PE|=|A|^3|P||E|=-27$.

例 1.13 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $\left|A^*+\left(-\frac{1}{4}A\right)^{-1}\right|=$______.

解法一 将 A^* 用 A^{-1} 表示：由于 $A^*=|A|A^{-1}$，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$，所以

$$\left|A^*+\left(-\frac{1}{4}A\right)^{-1}\right|=||A|A^{-1}-4A^{-1}|=|-A^{-1}|=(-1)^3\frac{1}{|A|}=-\frac{1}{3}.$$

解法二 将 A^{-1} 用 A^* 表示：由于 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$，所以

$$\left|A^*+\left(-\frac{1}{4}A\right)^{-1}\right|=|A^*-4A^{-1}|=\left|A^*-4\frac{A^*}{|A|}\right|=\left|-\frac{1}{3}A^*\right|=\left(-\frac{1}{3}\right)^3|A|^2=-\frac{1}{3}.$$

例 1.14（2013 年） 设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$______.

解 由 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$ 知 $A_{ij}=-a_{ij}$，即 $A^*=-A^{\mathrm T}$.

由于 $A\neq O$，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则 $|A|=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}A_{1k}=-\sum_{k=1}^{3}a_{1k}{}^2<0$.

又由 $A^*=-A^{\mathrm T}$ 得 $|A^*|=|-A^{\mathrm T}|$，即 $|A|^2=(-1)^3|A^{\mathrm T}|=-|A|$，所以 $|A|=0$ 或 $|A|=-1$．又 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$.

例 1.15 设 3 阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 $-3,-1,1$，则 $\begin{vmatrix}-A^{\mathrm T}&O\\O&B^*\end{vmatrix}=$______.

解 由于相似矩阵有相同的行列式，所以 $|A|=|B|=(-3)\times(-1)\times 1=3$.

$$\begin{vmatrix}-A^{\mathrm T}&O\\O&B^*\end{vmatrix}=|-A^{\mathrm T}||B^*|=(-1)^3|A|\times|B|^2=-27.$$

例 1.16 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$，则 $|2A^{-1}+E|=$______.