■教育部高等教育司推荐
■国外优秀信息科学与技术系列教学用书

DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES (Sixth Edition)

离散数学结构 第6版

翻译版

■ [美] Bernard Kolman
Robert C. Busby
Sharon Cutler Ross 著

■ 罗平 译

PEARSON

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教 育 部 高 等 教 育 司 推
国外优秀信息科学与技术系列教学用

离散数学结构

Lisan Shuxue Jiegou

（第 6 版 翻译版）

DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES

(Sixth Edition)

Bernard Kolman
[美] **Robert C. Busby** 著
Sharon Cutler Ross

罗 平 译

PEARSON

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字：01-2009-2338 号
Discrete Mathematical Structures, Sixth Edition
Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Cutler Ross

图书在版编目(CIP)数据

离散数学结构：第 6 版：翻译版 /（美）科尔曼（Kolman, B.），（美）巴斯比（Busby, R. C.），（美）罗斯（Ross, S. C.）著；罗平译．—北京：高等教育出版社，2013.7

书名原文：Discrete mathematical structures
ISBN 978-7-04-035049-4

Ⅰ．①离… Ⅱ．①科… ②巴… ③罗… ④罗… Ⅲ．①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ．①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 097359 号

策划编辑	武林晓	责任编辑	武林晓	封面设计	张　楠	版式设计	范晓红
插图绘制	朱　静	责任校对	刘春萍	责任印制	毛斯璐		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	40.25	版　　次	2013 年 7 月第 1 版
字　　数	910 千字	印　　次	2013 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	53.00 元

物 料 号　35049-00

序

20 世纪末，以计算机和通信技术为代表的信息科学和技术对世界经济、科技、军事、教育和文化等产生了深刻影响。信息科学技术的迅速普及和应用，带动了世界范围信息产业的蓬勃发展，为许多国家带来了丰厚的回报。

进入 21 世纪，尤其随着我国加入 WTO，信息产业的国际竞争将更加激烈。我国信息产业虽然在 20 世纪末取得了迅猛发展，但与发达国家相比，甚至与印度、爱尔兰等国家相比，还有很大差距。国家信息化的发展速度和信息产业的国际竞争能力，最终都将取决于信息科学技术人才的质量和数量。引进国外信息科学和技术优秀教材，在有条件的学校推动开展英语授课或双语教学，是教育部为加快培养大批高质量的信息技术人才采取的一项重要举措。

为此，教育部要求由高等教育出版社首先开展信息科学和技术教材的引进试点工作。同时提出了两点要求，一是要高水平，二是要低价格。在高等教育出版社和信息科学技术引进教材专家组的努力下，经过比较短的时间，第一批引进的 20 多种教材已经陆续出版。这套教材出版后受到了广泛的好评，其中有不少是世界信息科学技术领域著名专家、教授的经典之作和反映信息科学技术最新进展的优秀作品，代表了目前世界信息科学技术教育的一流水平，而且价格也是最优惠的，与国内同类自编教材相当。

这项教材引进工作是在教育部高等教育司和高教社的共同组织下，由国内信息科学技术领域的专家、教授广泛参与，在对大量国外教材进行多次遴选的基础上，参考了国内和国外著名大学相关专业的课程设置进行系统引进的。其中，John Wiley 公司出版的贝尔实验室信息科学研究中心副总裁 Silberschatz 教授的经典著作《操作系统概念》，是我们经过反复谈判，做了很多努力才得以引进的。William Stallings 先生曾编写了在美国深受欢迎的信息科学技术系列教材，其中有多种教材获得过美国教材和学术著作者协会颁发的计算机科学与工程教材奖，这批引进教材中就有他的两本著作。留美中国学者 Jiawei Han 先生的《数据挖掘》是该领域中具有里程碑意义的著作。由达特茅斯学院 Thomas Cormen 和麻省理工学院、哥伦比亚大学的几位学者共同编著的经典著作《算法导论》，在经历了 11 年的锤炼之后于 2001 年出版了第 2 版。目前任教于美国 Massachusetts 大学的 James

Kurose 教授，曾在美国三所高校先后 10 次获得杰出教师或杰出教学奖，由他主编的《计算机网络》出版后，以其体系新颖、内容先进而倍受欢迎。在努力降低引进教材售价方面，高等教育出版社做了大量和细致的工作。这套引进的教材体现了权威性、系统性、先进性和经济性等特点。

教育部也希望国内和国外的出版商积极参与此项工作，共同促进中国信息技术教育和信息产业的发展。我们在与外商的谈判工作中，不仅要坚定不移地引进国外最优秀的教材，而且还要千方百计地将版权转让费降下来，要让引进教材的价格与国内自编教材相当，让广大教师和学生负担得起。中国的教育市场巨大，外国出版公司和国内出版社要通过扩大发行数量取得效益。

在引进教材的同时，我们还应做好消化吸收，注意学习国外先进的教学思想和教学方法，提高自编教材的水平，使我们的教学和教材在内容体系上，在理论与实践的结合上，在培养学生的动手能力上能有较大的突破和创新。

目前，教育部正在全国 35 所高校推动示范性软件学院的建设和实施，这也是加快培养信息科学技术人才的重要举措之一。示范性软件学院要立足于培养具有国际竞争力的实用性软件人才，与国外知名高校或著名企业合作办学，以国内外著名 IT 企业为实践教学基地，聘请国内外知名教授和软件专家授课，还要率先使用引进教材开展教学。

我们希望通过这些举措，能在较短的时间，为我国培养一大批高质量的信息技术人才，提高我国软件人才的国际竞争力，促进我国信息产业的快速发展，加快推动国家信息化进程，进而带动整个国民经济的跨越式发展。

教育部高等教育司

二〇〇二年三月

前　言

对于大学一二年级的教学来说，离散数学是一门很有趣的课程，原因有几个方面。它的内容是数学，但它的大多数应用和超过半数的学生是专攻计算机科学或工程的。因此，了解本书主题的编写动机，并事先了解它们的应用，是十分重要且必需的策略。此外，这门课程所涵盖的题材广泛，内容丰富，所以教材的内容需精心安排，清晰易懂，并用适当的教学法强调其关键概念。同时，也希望学生能够掌握并运用一项重要的新技能：书写数学证明的能力。这门技能是编写出计算机程序的一项非常好的训练。

本书可作为学生学习离散数学基本概念的入门书，并作为向更高级数学概念发展的基础。如果仅限于此，那么书中涉及计算机科学的一些特定应用的内容可以略去或者单独作为重要的例子选用。本书可作为计算机科学或者电子与计算机工程课程的教材，它也为计算机相关的许多基本概念打下基础，并且为这些概念提供延伸、发展和共同的主题。通过参考每章中与各章内容相一致的必备知识，教师很容易设计出适当的教学大纲。

方法

首先，我们认为将课程内容所涵盖的领域和深度限制在大学一二年级所教的基础课程的水平上是明智的。我们相信本书所选定的一系列主题能够真正适用于计算机科学和其他学科，内容符合逻辑、条理清楚。在介绍这些主题的同时，也指明了如何更深入地研究这些主题。这使得本书能够成为学习高年级课程的一本很好的参考书。

其次，将大量的定义和抽象理论压缩到最低限度，并且用这种方式来组织各个主题，给出它们的相互联系。关系和有向图被视为同一基本数学概念的两个方面，有向图是关系的图形表示。所以，该基本概念实际上用来作为本书介绍其他所有概念的基础，包括函数、偏序、图和数学结构。本书所介绍的每个新概念尽可能使用前面学过的内容，并且以这种方式展开，从而简化后续的更复杂的概念。

第6版有什么新内容？

本书先后改进五版，历经 25 年，受到广泛认可，这些使我们感到非常欣慰。同样欣喜的是本书前5版所选的内容及解题方法也被广泛肯定。例如，最近 SIGCSE 协会（the ACM Special Interest Group on Computer Science Education）和其他机构都推荐将本书中主要论及的离散结构内容作为一学期的课程。在该版筹划中，我们充分考虑了这些推荐意见以及来自教师和学

生的众多建议和意见以改进本书的内容和材料。尽管该版作了改进并完善了很多，但是我们的目标依然同前5版一样：以一种简明、精炼的、学生能够理解的方式来介绍离散数学的基本概念及其某些应用。

由于关系和有向图这两个关键概念在本书中起着统一的作用，所以我们相信本书非常适合课堂教学。该版新加了两个小节：数学命题及逻辑与问题求解，并附有习题，这使得有关逻辑方面的内容得到大大加强。此外新内容：模糊集和模糊逻辑为学生们引入了在自动反馈及控制过程的现代问题中极其重要的一个主题。通过著名的数独和一些相关迷与基础数学的联系，把本书中的集合论、布尔矩阵、算法与编码、逻辑、一般的证明构造、着色问题和多项式等其他内容串联为一体，使学生既觉得有趣又能学到知识。其他重要的改进概括如下。

- 增加了强调如何提出一个猜想以及怎样证明或反驳它。
- 该版继续在全书中编排了关于证明和证明技巧的讨论，包括对大部分证明的注解，与证明各命题的技巧相关的习题以及证明知识小结。许多新的习题为培养学生阅读和书写证明的能力提供了更多的实践机会。
- 包含了更多的应用。
- 增添了更多的习题。
- 包含了更多的图片。
- 重写了一些阐述和解释，使得内容更加清晰和容易理解。
- 对第五版章末材料进行了重新编排：概念复习题现在放到了每章最后的自测题中，并且把编码练习题移到了附录C中。

习题

习题是本书的重要组成部分。许多习题本质上都是计算型的，其余的则是理论型的。本书后面的许多习题以及实验都要求口头解答，关于实验下面将进一步说明。帮助培养证明书写技巧的习题要求学生分析证明、增加论据或完成一些未完成的证明。为了帮助学生理解基本原理和掌握方法，许多新的习题中增加了关于指导和实践的内容。所有序号为奇数的习题和自测题的答案均放在本书的后面。所有习题解答可在《教师解答手册》中找到，该手册可以从原版出版社免费得到（只提供给任课教师）。该手册中包含关于每章的教学思想、实验目的和评分准则的注解（下面将给出进一步说明），还包含一个试题库。

实验

从第1章到第10章，每章末尾都设有一个学生实验。这些实验为学生提供发现和探索问题

的机会，或者帮助学生更深入地认识各章中所讨论的主题。这些实验是作为课外时间、课后活动来设计的，并且适合作为小组作业。每个实验都需要做比章节练习多得多的书写工作。附录 B 中列有一些附加实验。每个实验的内容、必备知识以及目的都可以在《教师解答手册》中找到。

编码练习

每章的编码练习放在附录 C 中。

章末材料

每章均包含有证明知识小结、主要概念的总结以及含每章概念复习题在内的自测题。

章节结构

第 1 章讲述本课程的基础知识，包括集合、子集及其运算，数列，整数的性质（包括以 n 为基数的表示），矩阵以及数学结构。本章的目的是帮助学生培养在多种层面上识别模式的技能。第 2 章讨论逻辑以及相关的内容，包括证明方法和数学归纳法。虽然关于证明的讨论基于此章，但有关证明的注释贯穿全书。新加了两小节：数学命题，逻辑与问题求解，所选的内容主要是目前广泛讨论的数独迷和相关的迷。第 3 章论述计数，包括排列、组合、鸽巢原理、离散概率基础以及递归关系。

第 4 章讲述关系的基本类型和性质以及关系的有向图表示。此外，本章还讨论了矩阵和其他数据结构的关系。第 5 章讨论函数的概念，并且给出了重要的函数例子，包括计算机科学中特别感兴趣的一些函数，还简要介绍了函数增长的基础知识，增加了新内容模糊集和模糊逻辑。第 6 章讨论偏序集，包括网格和布尔代数。为了找出布尔表达式的布尔函数的符号表示，加入了图形化的卡诺图方法。第 7 章介绍有向树和无向树及其概念的应用。初等图论以及其在运输网络和匹配问题中的应用是第 8 章的重点。

第 9 章又回到数学结构，介绍了半群、群、环和域的基本概念。基于前几章的知识，只需介绍几个新的概念。第 10 章主要讨论有限状态机，它是前面几章概念的补充和有效应用。第 11 章讨论了编码的差错检验、纠错以及安全性问题。附录 A 讨论了算法和伪码。本书中的某些例子和习题使用的是这里介绍的简化伪码，忽略这些内容不会破坏内容的连续性。附录 B 给出一些附加实验，它们是本课程各部分主题的扩充或者预习。附录 C 是按章节分开的编码练习。

可选文献

随本书有一本实用的工具书:《离散数学中的实践问题》，作者是 Boyana Obrenic(ISBN 0-13-045803-1)。该书完全是一本习题集，共有 406 页，并备有全部完整的解答。此外，还有一本 316 页的工具书:《离散数学工具书》，作者是 James Bush (ISBN 0-13-046327-2)。该书主要以条目的形式总结一些关键概念、关键术语和一些示例问题集（附有答案）。

致谢

我们非常感谢本书前 4 版的下列审阅者：Harold Fredrickson（Naval Postgraduate School），Thomas E. Gerasch（George Mason University），Samuel J. Wiley（La Salle College），Kenneth B. Reid(Louisiana State University)，Ron Sandstrom(Fort Hays State University)，Richard H. Austing（University of Maryland），Nina Edelman（Temple University），Paul Gormley（Villanova University），Herman Gollwitzer & Loren N. Argabright（Drexel University），Bill Sands（University of Calgary，他指出了第 2 版中的一些错误），Moshe Dror（Arizona University，Tucson），Lloyd Gavin（California State University at Sacramento），Robert H. Gilman（Stevens Institute of Technology），Earl E. Kymala（California State University at Sacramento），Art Lew（University of Hawaii，Honolulu），Ashok T. Amin（University of Alabama at Huntsville），Donald S. Hard（Rochester Institute of Technology），Minhua Liu（William Rainey Harper College），Charles Parry（Virginia Polytechnic Institute & University），Arthur T. Poe（Temple University），Suk Jai Seo（University of Alabama at Huntsville），Paul Weiner（St. Mary's University of Minnesota）。感谢第 5 版的下列审阅者：Edward Boylan（Rutgers University），Akihiro Kanamori（Boston University），Craig Jensen（University of New Orleans），Harold Reiter（University of North Carolina），Charlotte Zhong-Hui Duan（University of Akron）。感谢第 6 版的下列审阅者：Danrun Huang (St.Cloud State University), George Davis (Georgia State University), Ted Krovetz (California State University), Lester McCann (Arizona University), Sudipto Ghosh (Colorado State University), Brigitte Servatius (Worcester Polytechnic Institute), Carlo Tomasi (Duke University), Andrzej Czygrinow (Arizona State University), Johan Belinfante (Georgia Institute of Technology), Gary Walker (Pennsylvania State University-Erie). 他们有益的建议、评论和批评，对于改善本书原稿起了很好的作用。

感谢 Dennis R. Kletzing（Stetson University），他负责整个原稿的录入和排版；感谢 Lilian N. Brady，他仔细地阅读了每一页的证明并且给出了一些有益的建议；感谢 Blaise de Sesa，他检查了本书所有的习题答案和解答；还要感谢来自美国和其他国家许多学校的教师和学生，他们提供了使用本书的经验并提出了相当有益的建议。

最后，还要向下列人员表达最诚挚的谢意：高级编辑 Bill Hoffman，副主编 Caroline Celano，高级管理编辑 Linda Behrens，生产项目经理 Kristy Mosch，市场营销经理 Katie Winter，市场营销助理 Jon Connelly，业务专家 Lisa McDowell，艺术总监 Heather Scott，艺术编辑 Tom Benfatti 以及 Pearson 出版公司的全体员工，因为他们的热情、关心和永不言败的合作精神，才让本书从策划、设计、制作到市场销售都得以顺利地进行。

B. K.
R. C. B.
S. C. R.

寄 语 学 生

这门课程很可能在几个方面与你以前学过的数学课程有所不同。要解的方程很少，公式甚至更少，而且只有少量的步骤。虽然有一些定义和定理需要学习，但仅靠死记硬背将使你很难通过这门课程。深刻理解概念并能够在各种环境下反复地应用它们，是你成功的基础。

本书的优点是内容丰富、生动，而且实用。本书所选的主题是日常生活、数学、计算机科学以及其他领域中应用的基础。这些主题相互联系，互为基础，有助于你掌握所涉及的概念。

这门课程有两个显著的特点，一是高度的抽象，二是比你以前学过的数学课程更强调证明。关于抽象，这里举一个例子。在学习代数时，我们知道乘法对加法的分配律，而在这门课程中，我们将把分配律概念予以抽象，并研究这一概念在许多种运算中的应用，而不仅仅是乘法和加法。

另一个特点是证明。在你继续阅读本书之前，让我们告诉你在本书中是如何处理证明的。你的目标是能够读懂证明，并且能够独立进行证明。帮助你达到这些目标的方法也许能使你重新想起你曾学过的写作课程。学习写一篇有说服力的文章，或有意义的十四行诗，或其他风格的文章，是一个很复杂的过程。首先，你必须阅读、分析并研究大量的范文。然后，你才能尝试以某种风格动手写作。一般来说，这包括草稿版、修改、评阅、润色和改写，最后创作出一篇有说服力的文章，或者一首优秀的十四行诗，或者其他指定风格的文章。总之，写作没有任何公式或固定的套路。

同写作课程的作品一样，证明也是有结构和风格的。本书将提供大量的证明供你阅读和分析。某些习题要求你对证明进行概括、分析和评论。其他的习题则要求你完成一些未完成的证明。最后，你有许多机会自己构造一个证明。相信我们，阅读和书写证明是一项可学习的技能。

更广义地讲，我们希望本书能帮助你成为一个有效的沟通能手，一个思想评论家，一个善于思考的学习者，一个具有创新精神的解决问题的能手。

衷心祝愿你取得成功和有趣的体验。

Bernard Kolman
Robert C. Busby
Sharon Cutler Ross

目 录

第1章 基础知识

必备知识：本章无需专业必备知识，鼓励读者仔细阅读课文并计算所有例题。

本章将引进离散数学中的一些基本工具。尽管有些概念也许读者已经熟悉，但首先还是从集合、子集以及它们的运算开始论述。接着，用显式和递归的模式讨论序列。然后，回顾整数的一些基本性质。最后，引进矩阵和矩阵运算。这些背景知识正是我们对数学结构开始进行探索所需要的。

回　顾

矩阵

矩阵的起源可以追溯到大约公元前200年，当时中国人用它来求解线性方程组。从那以后沉寂了将近2 000年，直到17世纪末，矩阵才又回归数学，从此之后在该领域的研究高速向前发展。术语“矩阵”是由英国数学家、律师James Joseph Sylvester (1814—1897)在1850年创建的词。在1851年，Sylvester遇到了Arthur Cayley (1821—1895)。Cayley也是一名英国律师，对数学也怀有浓厚的兴趣，他迅速地认识到矩阵概念的重要性并于1858年出版了一本书，在该书中他给出了矩阵的基本运算。此外，他在矩阵理论方面还发现了许多重要的结果。

1.1　集合与子集

集合

集合就是任何一个有明确定义的对象的整体，这些对象称为**元素**或**集合的成员**。例如，所有木制椅子的整体，只有一条腿的所有黑鸟的整体，或者在0与1之间一切实数的整体，它们都是集合。有明确定义只是意指能够确定一个已知对象是否属于该整体。几乎所有的数学对象，不管它们可能具有什么附加性质，它们首先都是集合。因此在某种意义上，集合论实质上成为构建一切数学知识的基础。尽管如此，集合论(至少我们需要有初步印象)是容易学习和运用的。

描述一个含有有限个元素的集合的一种方法就是用一对花括号列出集合中的所有元素。因此，所有小于4的正整数集合可写为

$$\{1,2,3\} \tag{1}$$

在列出集合元素时，它们的次序是无关紧要的。因此，{1，3，2}，{3，2，1}，{3，1，2}，{2，1，3}和{2，3，1}都是式(1)所给集合的表示。此外，在列举集合中的元素时，重复元素可以省略。因此，{1，3，2，3，1}是式(1)所给集合的另一种表达方式。

用大写字母(如 A，B，C)表示集合。用小写字母(如 a, b, c, x, y, z, t)表示集合的成员(或元素)。

用 $x \in A$ 表示 x 是集合 A 的一个元素，用 $x \notin A$ 表示 x 不是集合 A 的一个元素。

例 1 设 $A = \{1, 3, 5, 7\}$，那么 $1 \in A$，$3 \in A$，但 $2 \notin A$。 ■

用列出集合中所有元素的方法来描述一个集合，有时是极不方便的或者是不可能的。于是引入另一种有用的方法，通过详细说明集合元素所具有的某种共同的性质来定义一个集合。用符号 $P(x)$表示关于可变对象 x 的一个命题或一条语句 P。由 $P(x)$定义的集合恰好是 P 为合理的与真实的一切对象 x 的整体，记为$\{x|P(x)\}$。例如，$\{x|x$ 是小于 4 的正整数$\}$，若通过列出它的元素来表示，那么就是式(1)所描述的集合{1，2，3}。

例 2 由单词“byte”中所有字母组成的集合可表示为{b, y, t, e}或者$\{x|x$ 是单词“byte”中的一个字母$\}$。 ■

例 3 下面将引进几个集合及其记号，这些集合及记号贯穿本书使用。

(a) $\mathbf{Z}^+ = \{x|x$ 是正整数$\}$

因此 $\mathbf{Z}^+$是由用来计数的数 1，2，3，…所组成的集合。

(b) $\mathbf{N} = \{x|x$ 是正整数或者零$\}$

因此 $\mathbf{N}$ 是由正整数和 0，即 0，1，2，… 所组成的集合。

(c) $\mathbf{Z} = \{x|x$ 是整数$\}$

因此 $\mathbf{Z}$ 是由所有整数…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …所组成的集合。

(d) $\mathbf{Q} = \{x|x$ 是有理数$\}$

因此 $\mathbf{Q}$ 是由形如 $\dfrac{a}{b}$ 的所有数所组成的，其中 a 和 b 是整数且 $b \neq 0$。

(e) $\mathbf{R} = \{x|x$ 是实数$\}$

(f) 没有任何元素的集合称为**空集**，用{ }或者符号 $\varnothing$ 表示。 ■

例 4 因为一个实数的平方总是非负数，所以$\{x|x$ 是实数且 $x^2 = -1\} = \varnothing$ ■

当集合里的成员都已知时，该集合也就完全清楚了。因此，如果两个集合 A 和 B 有完全相同的元素，那么称 A 和 B **相等**，记为 $A = B$。

例 5 如果 $A = \{1，2，3\}$，$B = \{x|x$ 是一个正整数且 $x^2<12\}$，那么 $A = B$。 ■

例 6 如果 A = {BASIC, PASCAL, ADA}，B = {ADA, BASIC, PASCAL}，那么 $A = B$。 ■

子集

如果 A 的每一个元素也是 B 的一个元素，即对任意 $x \in A$ 有 $x \in B$，则称 A 是 B 的**子集**或 A **包含于** B，记作 $A \subseteq B$。如果 A 不是 B 的子集，则记为 $A \not\subseteq B$(见图 1.1)。

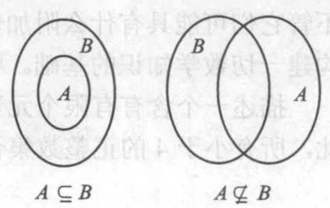

图 1.1

图 1.1 中的图形常常用来表示集合之间的关系，这种图因为由英国逻辑学家约翰·文氏首先使用而被称为**文氏图**。在 1.2 节中将广泛使用文氏图。

例 7 我们有 $\mathbf{Z}^+ \subseteq \mathbf{Z}$，而且如果 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集合，那么 $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$。 ■

例 8 设 $A = \{1，2，3，4，5，6\}$，$B = \{2，4，5\}$，$C = \{1，2，3，4，5\}$，那么 $B \subseteq A$，$B \subseteq C$，$C \subseteq A$，然而 $A \not\subseteq B$，$A \not\subseteq C$，$C \not\subseteq B$。 ■

例 9 设 A 是任意一个集合，那么 $A \subseteq A$，即每个集合是它自身的一个子集。 ■

例 10 设 A 是一个集合，$B = \{A，\{A\}\}$，由于 A 和 $\{A\}$ 是 B 的元素，所以 $A \in B$，$\{A\} \in B$，从而 $\{A\} \subseteq B$ 且 $\{\{A\}\} \subseteq B$，然而 $A \subseteq B$ 不成立。 ■

对于任意集合 A，由于 $\varnothing$ 中没有元素不属于 A，所以 $\varnothing \subseteq A$(在 2.1 节中还会看到这一点)。

显然 $A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。该简单的命题是许多集合命题证明的基础。

如果不呈现严重的逻辑问题，那么一切事物的整体就不能被认为是一个集合(已证明)。为了避免这种情况和其他问题，在此对该情况将不予以考虑，在每次讨论中均假设存在一个“全集” U(它随讨论的问题而变化)，即包含使得讨论有意义的所有对象。于是，在讨论中提到的任何其他集合将自动被认为是 U 的子集。因此，如果讨论实数并且提到集合 A 和 B，那么 A 和 B 一定(假定)是实数集合，而不是矩阵、电子线路或猕猴的集合。在大多数问题中，从所讨论的背景易知全集。在文氏图中，全集 U 将用一个矩形来表示，而在 U 内的集合用圆圈来表示，如图 1.2 所示。

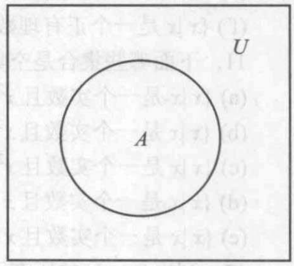

图 1.2

如果一个集合 A 有 n 个不相同的元素，其中 $n \in N$，那么称 A 是**有限集合**，称 n 为 A 的**基数**，用 $|A|$ 表示。因此，例 1、例 2、例 4、例 5 和例 6 中的集合是有限集合。如果集合不是有限的，则称它为**无限集合**。例 3($\varnothing$ 除外)介绍的集合就是无限集合。

如果 A 是一个集合，则 A 的所有子集的集合称为 A 的**幂集**，用 $P(A)$ 表示。(注意区别关于 A 的命题 $P(A)$ 和 A 的幂集 $P(A)$)。

例 11 设 $A = \{1，2，3\}$，则 $P(A)$ 包含 A 的所有子集为：$\{\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1，2\}$，$\{1，3\}$，$\{2，3\}$ 和 $\{1，2，3\}$(或 A)。下一节将计算一个集合的子集的个数。 ■

习 题 1.1

1．设 $A = \{1，2，4，a，b，c\}$，验证下列各分题的真与假。

(a) $2 \in A$　(b) $3 \in A$　(c) $c \notin A$　(d) $\varnothing \in A$　(e) $\{\} \notin A$　(f) $A \in A$

2．设 $A = \{x | x$ 是实数且 $x < 6\}$，验证下列各分题的真与假。

(a) $3 \in A$　(b) $6 \in A$　(c) $5 \notin A$　(d) $8 \notin A$　(e) $-8 \in A$　(f) $3.4 \notin A$

3．在下面各分题中，用列出集合元素的方法给出每个单词的字母集合。

(a) AARDVARK　(b) BOOK　(c) MISSISSIPPI

4．在下面各分题中，用列出元素的方法给出集合。

(a) 小于 10 的所有正整数的集合。

(b) $\{x \mid x \in \mathbf{Z}$ 且 $x^2 < 12\}$。

5. 设 $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$，验证下面各分题的真与假。

(a) $3 \in A$　　(b) $\{1, 4\} \subseteq A$　　(c) $\{2, 3\} \subseteq A$

(d) $\{2, 3\} \in A$　　(e) $\{4\} \in A$　　(f) $\{1, 2, 3\} \subseteq A$

在第 6 题～第 9 题中，用形式$\{x \mid P(x)\}$表示集合，其中 $P(x)$描述集合元素的性质。

6. {2，4，6，8，10}

7. {a，e，i，o，u}

8. {1，8，27，64，125}

9. {−2，−1，0，1，2}

10. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，下面哪些集合等于 A？

(a) {4，1，2，3，5}　　(b) {2，3，4}

(c) {1，2，3，4，5，6}　　(d) $\{x \mid x$ 是一个整数且 $x^2 \leqslant 25\}$

(e) $\{x \mid x$ 是一个正整数且 $x \leqslant 5\}$

(f) $\{x \mid x$ 是一个正有理数且 $x \leqslant 5\}$

11. 下面哪些集合是空集？

(a) $\{x \mid x$ 是一个实数且 $x^2 - 1 = 0\}$

(b) $\{x \mid x$ 是一个实数且 $x^2 + 1 = 0\}$

(c) $\{x \mid x$ 是一个实数且 $x^2 = -9\}$

(d) $\{x \mid x$ 是一个实数且 $x = 2x + 1\}$

(e) $\{x \mid x$ 是一个实数且 $x = x + 1\}$

12. 列出$\{a, b\}$的所有子集。

13. 列出{JAVA，PASCAL，C++}的所有子集。

14. 列出{}的所有子集。

15. 设 $A = \{1, 2, 5, 8, 11\}$，验证下面各分题的真与假。

(a) $\{5, 1\} \subseteq A$　　(b) $\{8, 1\} \in A$　　(c) $\{1, 8, 2, 11, 5\} \nsubseteq A$　　(d) $\varnothing \subseteq A$

(e) $\{1, 6\} \nsubseteq A$　　(f) $\{2\} \subseteq A$　　(g) $\{3\} \notin A$　　(h) $A \subseteq \{11, 2, 5, 1, 8, 4\}$

16. 设 $A = \{x \mid x$ 是一个整数且 $x^2 < 16\}$，验证下列关系的真与假。

(a) $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq A$　　(b) $\{-3, -2, -1\} \subseteq A$　　(c) $\{\ \} \subseteq A$

(d) $\{x \mid x$ 是一个整数且 $|x| < 4\} \subseteq A$　　(e) $A \subseteq \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

17. 设 $A = \{1\}$, $B = \{1, a, 2, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$, 对于下面各分题，用$\subseteq$或$\nsubseteq$取代符号□，使得命题为真。

(a) A□B　　(b) $\varnothing$ □A　　(c) B□C　　(d) C□E　　(e) D□C　　(f) B□E

在第 18 题～第 20 题中，找出包含已知集合作为其子集且有最小基数的集合。

18. $\{a, b, c\}$, $\{a, d, e, f\}$, $\{b, c, e, g\}$

19. {1，2}，{1，3}，∅

20. {2，4，6，…，20}，{ 3，6，9，…，21}

21. 对于由所有集合所组成的整体，可能有两个不同的(适当的)全集吗？如果有，它会产生什么问题吗？请予以解释。

22. 用图 1.3 中的文氏图验证下列关系的真与假。