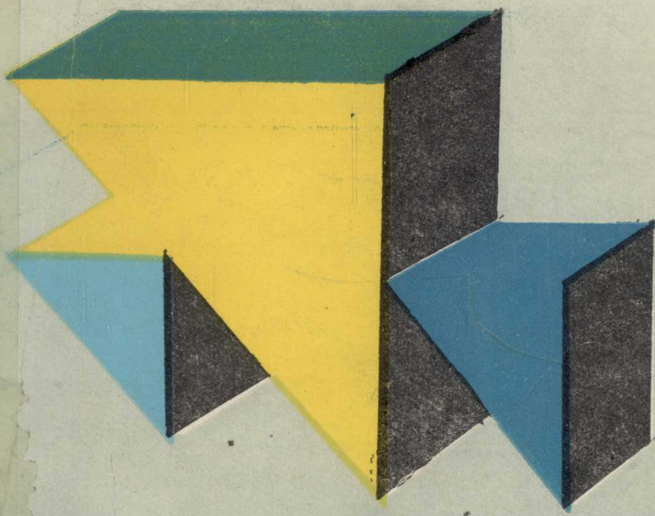
学生常见典型错例辨析

高中数学



学生常见典型错例辨析

高中数学

刘见闻　　编

吉林文史出版社

主　编　张翼健
副主编　顾秀章　申和平　鲁东阳

（吉）新登字 07 号

GAO ZHONG SHU XUE
高　中　数　学　　刘见闻　编

责任编辑：康迈伦　　封面设计：曲　刚

吉林文史出版社出版　787×1092 毫米 32 开本　7.75印张　150 千字
（长春市斯大林大街副 136 号）　1994 年 4 月第 1 版　1994 年 4 月第 1 次印刷
长春新华印刷厂印刷　印数：1—10 260　定价：4.20 元
吉林省新华书店发行　ISBN 7-80528-831-3/G・243

前　　言

一些教育先进、发达的国家，针对学生错误辨析能力不强、辩证思维尚未得到充分锻炼的弱点，在进行基础授课、正面教学的同时，还采用“典型错例辨析”的教学方法，即从学生常见的、典型错例入手进行辨析，从基本原理、基本技能以及思维方式上找出学生“典型问题”的错误所在，收到了极好的效果。近年来，这种“典型错例辨析”的教学方式，在国内也开始受到了重视，逐步得到开展。一些中小学有步骤地进行了这方面的教学实验，逐步打破了学生单一的顺向思维方式，锻炼、培养了学生的逆向思维方式，使学生在学习中逐渐培养双向思维的习惯。

为使这一先进的教学方法得到正确的普及、运用，真正地提高教学质量，省教育学院组织我省重点中小学的部分特级教师，编写了这套“学生常见典型错例辨析”(共九种)，供学生、教师使用。

由于编写时间较紧，缺乏经验，体例还有不少不尽人意之处；错误也在所难免，尚祈广大教师、学生指正，以便再版时修订。

编　者

一九九三年七月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.co

一、集合与函数

主要知识内容是：

①集合，集合的表示，集合的运算；②映射，一一映射，函数；③函数，函数的定义域，值域，函数的解析式，函数的图象，函数的单调性，奇偶性；④指数函数，对数函数，幂函数，分段函数。

应注意的问题

集合中判定相等集合，讨论参数判定集合关系容易出错。

函数中，函数的值域，函数图象的平移变换、对称变换、伸缩变换容易出错。

复合函数单调性、指数、对数、幂函数值的大小比较都较难，容易出现误解的内容。

1．集合 $M=\{n\pi,\ n\in z\}$，$N=\left\{\frac{n\pi}{3},\ n\in z\right\}$，$P=\left\{\frac{n\pi}{6},\ n\in z\right\}$，它们的关系是（　　）。

（A）$M\supset N\supset P$；　　（B）$N\supset P\supset M$；

（C）$P\supset N\supset M$；　　（D）$M\subset N=P$。

判断集合的关系时，不可简单推测。有的学生因没有掌握判断的方法而推断错误。

正确的方法是：适当地选取 n 的值为 $\cdots-2,-1,0,1,2\cdots$，用列举法表示这三个集合，则有：

$M=\{\cdots-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\cdots\}$

$N=\left\{\cdots-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \cdots\right\}$

$P=\left\{\cdots-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \cdots\right\}$

可以推断$M\subset N\subset P$，因此选C.

2. $A=\left\{x\mid \frac{1}{x}<2\right\}$, $B=\left\{x\mid \left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{2}\right\}$, $A\cap B$ 用区间表示为（　）.

（A）$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$；　（B）$(-\infty, 0)\cup\left(\frac{1}{2}, 1\right)$；

（C）$(1, +\infty)$；　（D）$(-\infty, 0)\cup\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

错解：$A=\left\{x\mid \frac{1}{x}<2\right\}=\left\{x\mid x>\frac{1}{2}\right\}$

$B=\{x\mid x<1\}$

$\therefore\ A\cap B=\left\{x\mid \frac{1}{2}<x<1\right\}$ 选A.

这里$\frac{1}{x}<2$，当$x>0$时有 $x>\frac{1}{2}$.

当$x<0$时不等式自然成立.

因此 $A=\left\{x\mid \frac{1}{x}<2\right\}=\left\{x\mid x>\frac{1}{2}\text{或}x<0\right\}$.

正确的解为:

$A\cap B=\left\{x\mid x<0\text{ 或 }\frac{1}{2}<x<1\right\}$, 选B.

3. 若集合$M=\{x\mid f(x)=0\}$, $N=\{x\mid g(x)=0\}$, 那么不等式$f(x)\cdot g(x)\neq0$的解集为（　）.

（A）$\overline{M}\cup\overline{N}$；　（B）$(\overline{M}\cup N)\cup(M\cup\overline{N})$；

（C）$\overline{M}\cap\overline{N}$；　（D）$(\overline{M}\cap N)\cup(M\cap\overline{N})$.

错选（A），由 $f(x)\cdot g(x)\neq 0$，

$\therefore\quad f(x)\neq 0$ 或 $g(x)\neq 0$

$\therefore\quad x\notin M$，或 $x\notin N$，

即　$x\in\overline{M}$，或 $x\in\overline{N}$

$\therefore$　解集为 $\overline{M}\cup\overline{N}$。

这里 $x_0\notin M$，但 x_0 可能为 N 的元素，这时 $g(x_0)=0$，而使 $f(x_0)\cdot g(x_0)=0$。

正确的选择为（C）。

$f(x)\cdot g(x)\neq 0$ 的意义为：

$f(x)\neq 0$ 且 $g(x)\neq 0$

即 $x\notin M$ 且 $x\notin N$

$\therefore\quad x\in\overline{M}$ 且 $x\in\overline{N}$，

因此解集为（C）。

注意 $f(x)\cdot g(x)=0$ 的否命题是 $f(x)\cdot g(x)\neq 0$，即 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 的否命题是

$f(x)\neq 0$ 且 $g(x)\neq 0$。

4．函数 $\lg[f(x)\cdot g(x)]$ 的定义域为 A，函数 $\lg f(x)$ 的定义域为 B，函数 $\lg g(x)$ 的定义域为 C，则 A、B、C 之间的关系是（　）。

（A）$A\supseteq B\supseteq C$；　　（B）$A\supseteq(B\cap C)$；

（C）$A=(B\cap C)$；　　（D）$A\supseteq(B\cup C)$。

错解：$A=\{x\mid f(x)\cdot g(x)>0\}$

$=\{x\mid f(x)>0$ 或 $g(x)>0\}$

$B=\{x\mid f(x)>0\}$

$C=\{x\mid g(x)>0\}$

$\therefore\quad (B\cup C)\subseteq A$。

这里忽略了 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集是

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

即 $f(x)>0$ 且 $g(x)>0$ 或者 $f(x)<0$ 且 $g(x)<0$。

$\therefore$ $(B\cap C)\subseteq A$ 是正确的结果。

如果 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集只看成

$f(x)>0$ 且 $g(x)>0$ 则会错选C。

5. 下列命题正确的是（ ）。

（A）任何一个集合 A 必有两个子集；

（B）任何一个集合 A 必有一个真子集；

（C）如果集合 A 和 B 的交集是全集，则 A 与 B 都是全集；

（D）如果集合 A 与 B 的交集是空集，则 A、B 至少有一个是空集。

错选（A）：若 $A=\Phi$，则命题不成立；

（B）：若 $A=\Phi$，则命题不成立；

（D）：若 $A=\{1, 2\}$，$B=\{3, 4\}$，则此时 $A\cap B=\Phi$，但 A、B 均不为空集；

正确选择为（C）：即 $A\cap B=I$，$A\cap B\subseteq A$

即 $I\subseteq A$，而 $A\subseteq I$，$\therefore$ $A=I$，

同理 $B=I$。

6. 全集 I 是自然数集 N，$E=\{2n|n\in N\}$，$F=\{4n|n\in N\}$，那么集合 N 可表示为（ ）。

（A）$E\cap F$；（B）$\overline{E}\cup F$；

（C）$E\cup\overline{F}$；（D）$\overline{E}\cap\overline{F}$。

错选（A）：$E\cap F$ 是4的整数倍的自然数，不是全体自然数；

（B）：$\overline{E}\cup F$ 是所有奇数与4的倍数的自然数，不

是全体自然数；

(D)：$\overline{E}\cap\overline{F}$中没有4的倍数的自然数，没有2的倍数，只是奇数的集合；

正确选择为(C)：$E\cup\overline{F}$包括了所有的偶数与所有的奇数。

一般地，考察两个集合的关系是否相等，只要看这两个集合的元素是否相同，如果是整数集合，我们可以按数的奇偶分类，也可以按除以3的余数分类。

7．已知集合$A=\{x, xy, \lg xy\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，若$A=B$，求x，y的值。

错解：$\because$ $A=B$，$0\in B$，则$0\in A$，但$xy>0$。

$\therefore$ $\lg xy=0$，$\therefore$ $xy=1$。

$\therefore$ $x=y=1$或$x=y=-1$。

这里的结论$x=y=1$为错解，若$x=y=1$，则集合A中$x=xy=1$，x，xy为同一元素，因此不满足要求；

只有$x=y=-1$满足要求，这时

$x=-1$，$xy=1$，$\lg xy=0$

$|x|=1$，$y=-1$。

$\therefore$ $A=B=\{-1, 1, 0\}$。

8．已知集合$P=\{z|\ |z+2|+|z-2|=6, z\in C\}$，$Q=\{z|\ |z+1|=1, z\in C\}$，则$P$与$Q$的关系是（　）。

(A) $P\subset Q$；　(B) $P\subseteq Q$；

(C) $P\supset Q$；　(D) $P\cap Q=\phi$。

错选(A)、(B)、(C)。

P集合z对应点是一椭圆，Q集合z对应点是一圆，圆在椭圆的内部，选(C)的错误以为Q表示的圆在P表示椭圆的内部，就是Q是P的子集了，实质是椭圆与圆的交点如

何，两曲线无交点，因此$P\cap Q=\phi$.

8．已知$P=\{y|\ y=x^2+1,\ x\in R\}$, $Q=\{y|y=x+1,\ x\in R\}$，则 $P\cap Q=$（　　）。

（A）$\{(0,1),\ (1,2)\}$；　（B）$\{0,\ 1\}$；

（C）$\{1,\ 2\}$；　（D）$[1,\ +\infty)$.

错选（A）、（B）、（C）.

易错选（A），误以为是求两个集合中 $y=x^2+1$ 与 $y=x+1$的交点

解方程组 $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=x+1 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$

而求$P\cap Q$是两个函数$y=x^2+1$、$y=x+1$的值域相同的部分.

由　$y=x^2+1$　得　$y\geqslant 1$

由　$y=x+1$　得　$y\in R$

$\therefore$　$P\cap Q=\{y|\ \ y\geqslant 1,\ (y\in R)\}$

选（D）.

9．已知$M=\{x|\ x=1\}$, $N=\{(x,\ y)|\ x=1, y\in R\}$，则$M\cap N=$（　）.

（A）ϕ；　（B）M；

（C）N；　（D）$(0,\ 1)$.

错选（B）、（C）、（D）.

误以为求$x=1$与直线$x=1$的交点，或者把M集合看成了一条直线而错误判断.

实质M集只有一个元素1，N集合是一条直线$x=1$，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

因此 $M \cap N = \phi$。

10．$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid ax - 2 = 0\}$ 若 $A \cup B = A$，求实数 a 的范围。

错解：由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = 2$，

当 $x = 1$ 时，$a = 2$，

当 $x = 2$ 时，$a = 1$，

$\therefore$ a 的值为 1 或 2。

这里只注意到 B 的元素都属 A 集合的情况．如果 B 为 ϕ，即 $a = 0$ 时，$A \cup B = A$ 成立，因此 a 的值为 0、1 或 2。

11．已知集合 $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in R\}$，当实数 p 为何值时，$A \cap R^+ = \phi$。

错解：若 $A \cap R^+ = \phi$，

则方程 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 无正实根。

设方程的二根为 x_1，x_2，则

$$\begin{cases} \Delta = (p+2)^2 - 4 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 = -(p+2) \leqslant 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p \geqslant 0 \text{ 或 } p \leqslant -4 \\ p \geqslant -2 \end{cases} \qquad \therefore p \geqslant 0$$

这里只考虑了 A 集合有二负根的情况，但如果 $A = \phi$ 时，则 $A \cap R^+ = \phi$ 也成立。

因此还应考虑方程无解情况。

即 $\Delta = (p+2)^2 - 4 < 0$

$\therefore$ $-4 < p < 0$

又前边解出 $p \geqslant 0$

$\therefore$ 满足条件的 p 范围是 $p > -4$。

12. 已知集合 $A=\{x|\ 10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x|\ m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围。

错解：$A=\{x|\ -2\leqslant x\leqslant 5\}$

若使 $B\subseteq A$，则须

$$\begin{cases}-2\leqslant m+1\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}\quad 即\quad -3\leqslant m\leqslant 3.$$

但如果 $B=\phi$，$B\subseteq A$ 成立，所以应考虑到 B 是空集的情况。

正确的解法是

1）当 $B\neq\phi$ 时，$m+1\leqslant 2m-1$ 即 $m\geqslant 2$。

$B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}-2\leqslant m+1\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}$ 即 $-3\leqslant m\leqslant 3$

$\therefore\ 2\leqslant m\leqslant 3$

2）当 $B=\phi$ 时，即 $m+1>2m-1$

$\therefore\ m<2$

由以上得出 $m\leqslant 3$ 使 $B\subseteq A$。

13. 已知集合 $M=\left\{(x,\ y)\left|\frac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$

集合 $N=\{(x,\ y)|\ (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$

若 $M\cap N=\phi$，求实数 a 的值。

错解：由已知得 $M=\{(x,\ y)|\ y=(a+1)x-2a+1\}$，

$N=\left\{(x,y)\left|\ y=(a+1)x+\frac{15}{a-1}\right.\right\}$

若 $M\cap N=\phi$，则二直线的斜率相等，截距不等，即

$$\begin{cases}a+1=a+1\\ \dfrac{15}{a-1}\neq -2a+1\end{cases}\quad\therefore\ a=\pm 1.$$

这里集合M不是直线$y=(a+1)x-2a+1$的所有点，这里$x\neq 2$且$y\neq 3$　即不包括（2，3）点。

当直线　$(a^2-1)x+(a-1)y=15$ 过（2，3）点时，$M\cap N=\phi$ 成立，此时 $a=\dfrac{5}{2}$ 或 -4。

正确的结果是 $a=\pm 1, \dfrac{5}{2}$或-4。

注意除以 $a-1$ 时，应 $a-1\neq 0$；$a-1=0$ 时应单独讨论。

14．已知$f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，那么$g(x)$

（A）在区间（-1，0）上是减函数；

（B）在区间（0，1）上是减函数；

（C）在区间（-2，0）上是增函数；

（D）在区间（0，2）上是增函数。

错解：设$u=2-x^2$，则$x\in(-\infty, 0)$上，u为增函数，$x\in(0, +\infty)$上，u为减函数。

$f(x)=8+2x-x^2=9-(x-1)^2$，$x\in(-\infty, 1)$上，$f(x)$为增函数，$x\in(1, +\infty)$上，$f(x)$为减函数。

∴　$g(x)$ 在（-1，0）是增函数

在（0，1）上是减函数，选（B）。

错误出在没有考虑中间变量的取值范围，$u=2-x^2\leqslant 2$，即$u\in(-\infty, 2]$，而不是$(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$。

正确的解法是：

设　$u=2-x^2\leqslant 2$

当　$x\in(-\infty, 0)$ 时，u为增函数，

$x\in(0, +\infty)$ 时，u为减函数。

由于　$u\in(-\infty, 2]$

$$f(u)=8+2u-u^2$$

$$=9-(u-1)^2$$

$u\in(-\infty,\ 1)$ 时，$f(u)$ 为增函数

$u\in(1,\ 2)$ 时，$f(u)$ 为减函数

当 $x\in(-1,\ 0)$ 时，$u\in(1,\ 2)$

∴ $x\in(-1,\ 0)$ 时 $g(x)$ 为减函数

∴ 正确的选择为A。

15． 已知函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且$x\in(0,\ +\infty)$ 时，有 $f(x)=\frac{1}{x}$，则当 $x\in(-\infty,\ -2)$ 时，$f(x)$ 的解析式为：

（A）$-\frac{1}{x}$；（B）$\frac{1}{2-x}$；

（C）$\frac{1}{x+2}$；（D）$-\frac{1}{x+2}$。

错选（A）、（B）、（C）。

选（A），则其图象关于 y 轴对称，而不关于$x=-1$ 对称了；

选（B），则将 $y=-\frac{1}{x}$图象向左平移两个单位误为 $y=\frac{1}{-x+2}$；

选（C），则其图象不关于$x=-1$对称；

正确选（D），$y=f(x)$ 的图象关于 $x=-1$对称。因此 $x\in(0,\ +\infty)$ 关于$x=-1$的对称区间为$(-\infty,-2)$，

$f(x)=\frac{1}{x}$关于$x=-1$的对称曲线为 $y=-\frac{1}{x}$的图象向左平移 2 个单位，其解析式为：

$$y=-\frac{1}{x+2}.$$

如果画出假设图象更能很准确选出。

16．下列函数中，定义域为全体实数的是（　　）．

（A）$y=\lg(x^2-4x+5)$；　（B）$y=\sqrt{x^2-x}$；

（C）$y=\lg|x+1|$；　　（D）$y=\dfrac{1}{\sin x}$．

错选（B）、（C）、（D）．

（B）的定义域为$x^2-x\geqslant 0$，即$1\leqslant x$或$x\leqslant 0$；

（C）$x+1\neq 0$，即　$x\neq -1$．这里要特别注意，极容易漏掉；

（D）$x\neq k\pi$，$k\in z$；

（A）中，$x^2-4x+5>0$．

由于　$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

无论x为何实数恒成立，因此其定义域为一切实数．

17．函数$y=f(x)$的图象怎样变化才能得到$y=f(1-x)$的图象．

错解：$f(1-x)=f(-x+1)$

∴　$f(x)$　的图象关于y轴的对称图形再沿x轴正向平移1个单位，就得到$y=f(1-x)$的图象．

错了，错在加上1个单位是作用到$-x$身上的．

正确的解是：

$$f(1-x)=f(-(x-1))$$

∴　$f(x)$　的图象关于y轴的对称图形再沿x轴正向平移1个单位，就得到了$y=f(1-x)$的图象．

这里的$+1$作用到x身上是-1，即沿x轴正向平移1个单位．

18．函数$y=\dfrac{1}{-3x+1}-2$的图象是（　　）得来的．

（A）将函数$y=\dfrac{1}{-3x}-2$的图象向x轴正向平移1

个单位；

（B）函数 $y=\dfrac{1}{3x-1}-2$ 的图象关于 y 轴对称图形；

（C）将函数 $y=\dfrac{1}{-x+\frac{1}{3}}-2$ 的图象上每一点的纵坐标缩小到原来的 $\dfrac{1}{3}$；

（D）将函数 $y=\dfrac{1}{-x+1}-2$ 的图象上的每一点横坐标缩小到原来的 $\dfrac{1}{3}$.

错选（A）、（B）、（C）.

（A）的函数为 $y=\dfrac{1}{-3(x-1)}-2$,

即 $y=\dfrac{1}{-3x+3}-2$;

（B）的函数为 $y=\dfrac{1}{3(-x)-1}-2$,

即 $y=\dfrac{1}{-3x-1}-2$;

（C）的函数为 $y=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{-x+\frac{1}{3}}-2\right)$

即 $y=\dfrac{1}{-3x+1}-\dfrac{2}{3}$,

（D）的函数为 $y=\dfrac{1}{-(3x)+1}-2$,

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com