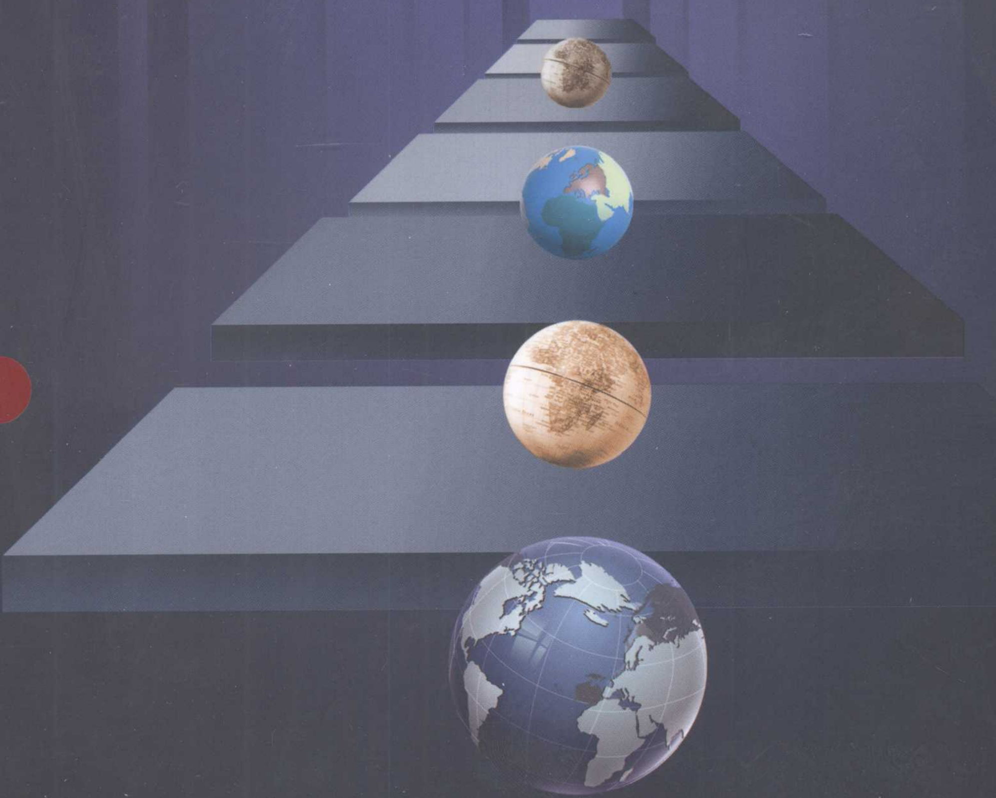
微积分 I

Calculus

经济管理类课程教材

主编◎苏继红　符才冠　许　明



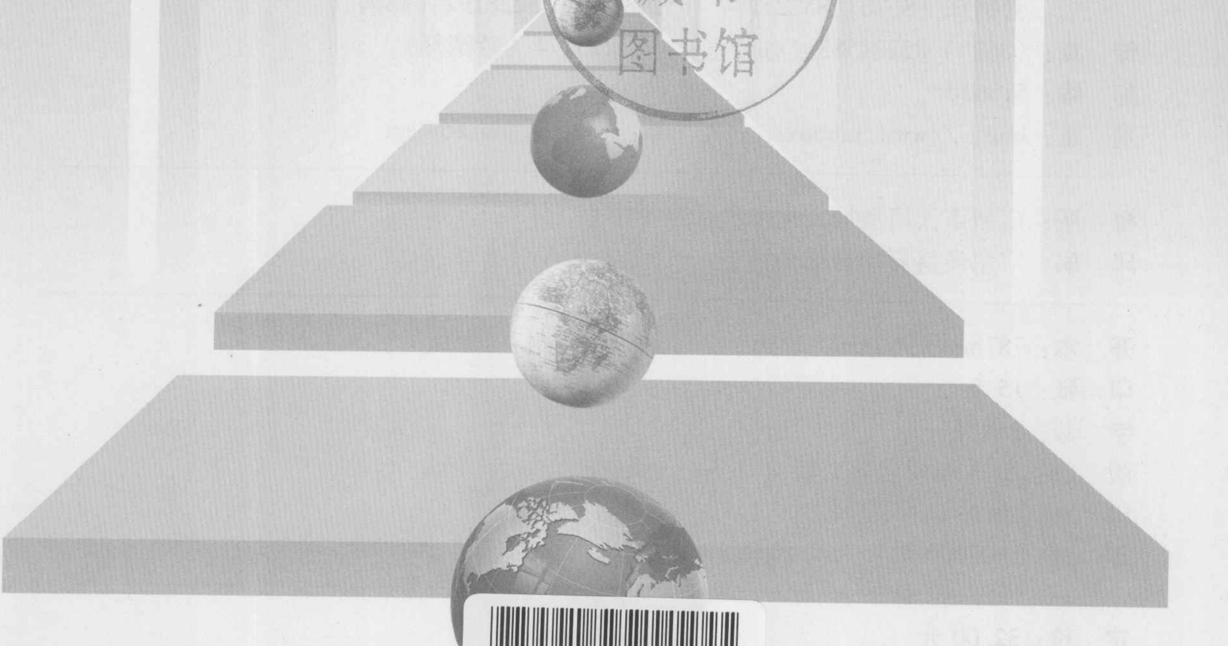
暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

微积分 I

Calculus

经济管理类课程教材

主编◎苏继红　符才冠　许　明



暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

微积分Ⅰ/苏继红，符才冠，许明主编．—广州：暨南大学出版社，2013.8
ISBN 978－7－5668－0673－4

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①苏…②符…③许…　Ⅲ.①微积分—高等学校—教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 166582 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：广东昊盛彩印有限公司

开　本：787mm×960mm　1/16
印　张：15.5
字　数：368 千
版　次：2013 年 8 月第 1 版
印　次：2013 年 8 月第 1 次
印　数：1—3000 册

定　价：32.00 元

前言

数学是抽象的，又是具体的. 在当今社会，数学不仅是一种工具，也是一种文化，更是一种信息. 数学是反映客观世界的一门科学，是对客观世界的定性把握和定量描述，进而逐渐抽象概括形成方法和理论，并且进行广泛应用的科学. 数学可以帮助人们探求客观世界的规律，并对现代社会中大量繁杂的信息作出最佳的判断和选择，同时为人们交流信息提供了一种有效而简捷的手段，从而达到解决问题的目的，直接为社会创造价值. 数学又是经济管理工作必不可少的基础，经济管理工作中的计划、预测、优化、评估、组织、控制、决策等问题都需要运用数学进行分析研究、计算求解.

在现代文科综合院校中，“高等数学”课程是经济、管理类各专业的一门必修公共基础课，其中，“微积分”是一门最基础的重要课程，它将为学生学习后续专业课程中的数学概念、理论方法、运算技能打下基础，并能提高其分析问题、解决问题的能力.

1. **教材主要内容**

本教材由四章组成：第一章预备知识，第二章极限与连续，第三章导数与微分，第四章中值定理与导数的应用. 第一章主要是复习初等数学的基本内容，这是后续学习高等数学所必需的基础，第二章至第四章的内容融汇微积分的主要基本内容.

2. **教材面对的主要对象及目的**

本教材根据本科高等院校经济管理类专业微积分课程的教学大纲组织编写，编入的知识都是微积分最基本的内容，强调掌握重要的基本概念、运算，同时又注重理论知识的应用. 编写从港、澳、台及海外华侨学生的特点、基础和知识体系结构出发，遵循“教材适应学生”的原则，主要目的是希望读者在课后通过本教材轻松自学，做到无师自通，巩固课堂所学内容，从而学到自然、常用、经典的微积分内容，为学习后继课程提供必要的基础知识.

3. **教材主要特点**

本教材吸收国内外教材的优点，在保持经典微积分内容的系统性和完整性的前提下，力求通俗简明. 在对极限理论的叙述上，从概念到运用上都比传统教科书的编排更加循序渐进. 每个概念的引入尽量从描述性入手，在感性认识的基础上，归纳概括出精确定义. 教材采用大量的几何图解，直观明了地给读者带来数形结合的空间想象，便于发现数学思想的本质，有利于提高读者对数学实质的理解. 在纯理论的学习中，适当降低了某些理论的深度. 例如，在极限定义部分，先采用描述性定义通俗地说明，再用分析性定义精确地叙述. 除了在极限定义中的几何解释时，用了“$\varepsilon-N$”与“$\varepsilon-\delta$”的语言外，其他部分尽量避免这类语言求证定理和做题，和传统教材不同的是，书中采用大量的图形，从直观上给出常用的数列及基本初等函数在某些极限过程中的结论，为后续丰富的极限计算提供依

据，而无须再证明这些结论，这样就避开了极限学习的难点. 书中贯彻“学、练反复，适当结合”的原则，每给出一个重要常用的概念，都列举相应的例题，同时给出【即学即练】及其答案，以便读者举一反三，即时检查巩固所学内容. 在例题及习题的编排配备上，注意使读者能掌握基本内容，而不过分追求技巧及难度. 同时，编排突出层次性，除设置了通俗易懂的巩固性问题外，还配备拓展性、探索性等问题，以满足那些有意深入学习的读者的需要. 每章中配有相应的实际应用例题和习题，既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也加强了与后续专业课程的联系. 总之，本书力求读者系统而又轻松地获得经典的微积分基础理论和常用的运算方法并将其应用于现代实际. 另外，在第一章中，考虑到读者是来自世界各地的学生，对初等数学基础程度要求不尽相同，为方便学生自学参考的需要，复习中学数学知识的内容较多，教师授课时可酌情删减. 书中最后给出两套第一章至第四章综合测试练习题及其答案，以方便学生了解自己对知识内容掌握的程度. 书后的附录列出“初等数学常用公式”、“数学术语中英文对照及希腊字母表”，以方便学生学习参考.

本书也可供经济管理类各专业的广大自学者作为教材或自学参考书，对全日制文科类专业的大学生来说，本书也是一本适合的参考书.

本书由苏继红、符才冠、许明共同编写. 我们力求能编出适合实际教学需要的教材，但由于水平和时间有限，又因教材是初版，书中难免有不足或错误之处，在此恳请各位读者、同仁指证并提供宝贵意见，以使本书更加完善.

最后，我们非常感谢暨南大学教务处的大力支持以及暨南大学出版社的热情帮助和辛勤工作，使得本书顺利出版.

编 者

2013 年 7 月

目录
CONTENTS

第一章　预备知识

要掌握微积分的基本概念、基本原理和基本方法，复习好初等数学是非常重要的．本章主要复习实数、方程、不等式、集合、区间、函数等一些主要的概念、性质及运算方法，介绍学习微积分所需要的有关预备知识，为后续各章节的学习打好基础．

§1.1　集合与不等式

一　集合

1. 集合及集合与元素的关系

通常将一定范围内某些确定的、具有某种共同属性(确切含义)的事物的全体称为集合，将构成集合的每一事物称为集合的元素．集合无所不包，大到宇宙，小到粒子，无论是物质，还是精神，世间的万物，均可以成为集合中的元素．

集合元素有三个特征：①确定性；②互异性；③无序性．

确定性：某一个具体对象，它或者是一个给定的集合的元素，或者不是该集合的元素，两种情况必有一种且只有一种成立．

例如，“所有接近 1 的数”就不是集合，因为“接近 1 的数”是不确定的．

互异性：同一集合中不应重复出现同一元素．

无序性：集合中的元素没有顺序．

一般我们用大写字母 A，B，C，D 等来表示集合，用小写字母 a，b，c，d 等来表示集合的元素．

非负整数集(自然数集)：全体非负整数组成的集合，记作 $\mathbf{N}$；

正整数集：所有正整数的集合，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$；

整数集：全体整数的集合，记作 $\mathbf{Z}$；

有理数集：全体有理数的集合，记作 $\mathbf{Q}$；

实数集：全体实数的集合，记作 $\mathbf{R}$．

若 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记作 $a \in A$；

若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a \notin A$；

例如，1 是自然数，所以 $1 \in \mathbf{N}$；而 -1 不是自然数，所以 $-1 \notin \mathbf{N}$．

2. 集合的表示方法

集合的表示方法通常有列举法和描述法．

列举法——将集合中的所有元素按任意顺序一一列出，并用花括号括起来．

例 1 所有非负整数(自然数)的全体是一个集合 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

所有整数的全体也是一个集合，记为 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

注意： 不必考虑顺序，用“,”隔开；集合中的元素是不同的，同一集合中不能重复出现同一元素，集合中的元素是无序的，可以任意列出. 因此在用列举法表示集合时，必须列出集合中所有的元素，不得遗漏和重复.

描述法——用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为**描述法**，一般形式为 $A=\{x \mid x$ 具有的特征$\}=\{x \mid P(x)\}$.

其中 x 代表元素，$P(x)$ 为某个与 x 有关的条件或法则，A 为满足 $P(x)$ 的一切 x 构成的集合.

例如，方程 $x^2-1=0$ 的实数解集表示为 $A=\{x \mid x^2-1=0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$.

例 2 单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上的所有点是一个集合，记为 $\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$.

例 3 参加 2010 年在南非举行的世界杯足球赛的所有球员也是一个集合，可用列举法表示.

注： 列举法与描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示法，一般集合中元素较多或有无限个元素时，不宜采用列举法.

【即学即练】

1. 用集合表示所有大于 0 且小于 10 的奇数组成的数.

(答案：$\{1, 3, 5, 7, 9\}$).

2. 下列问题中，哪些能构成集合（若构成集合用适当的方法表示出来）?

①不等式 $x-1>0$ 的解；②方程 $x^2-2x+1=0$ 的解；③a, b, c, d；

④中国古代四大发明；⑤地球上的七大洲；⑥地球上的小河流

(答案：能构成集合的有①②③④⑤).

①$A=\{x \mid x-1>0\}$；②$C=\{1\}$；③$D=\{a, b, c, d\}$；

④$E=\{$造纸，印刷，火药，指南针$\}$；

⑤$F=\{$亚洲、非洲、北美洲、南美洲、南极洲、欧洲、大洋洲$\}$.

3. 分别用集合的描述法与列表法表示方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集.

(答案：$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}=\{1, 2\}$).

---

3. **集合的分类**

集合由含有元素的量的多少可分为**有限集、无限集、全集、空集**.

由有限个元素构成的集合，称为有限集；例如某专业全体学生的集合为有限集. 由无限多个元素构成的集合，称为无限集；例如，有理数集合是无限集. 在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则将某个集合称为全集，记为 U，即全集就是一个集合含有我们所研究问题中所涉及的所有元素的集合(注：全集是相对的，一个集合在一定的条件下是全集，在另一个条件下就可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于有理数，则全体有理数集合就是全集；讨论的问题包括有理数和无理数，则全体有理数的集合

就不是全集)；不含任何元素的集合称为空集，记作 Φ.

例如，自然数集是无限集，则$\{1, 2, 3\}$是有限集.

又例如，$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in\mathbf{R}\}$，即方程 $x^2+1=0$ 的实数根集合为空集.

4. 子集；真子集；两个集合相等（集合与集合之间的关系）

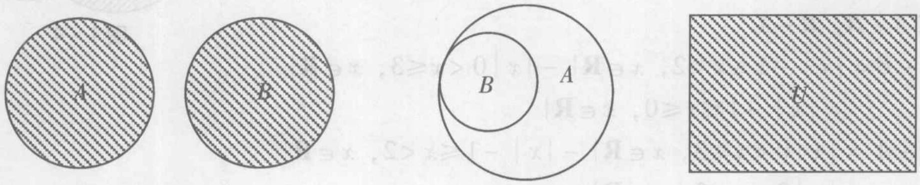
设 A，B 为两个集合，若 B 中的每个元素都是 A 中元素，那么将 B 称为 A 的子集，记作 $B\subseteq A$；若 $B\subseteq A$ 且 $B\neq A$，则称 B 为 A 的真子集，记作 $B\subset A$，读作："B 包含于 A 或 A 包含 B"；若 B 不是 A 真子集，记作 $B\not\subset A$. 若 $B\subseteq A$ 且 $A\subseteq B$，则 A 等于 B，记为 $A=B$.

例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$，但 $\mathbf{R}\not\subset\mathbf{Q}$.

由此我们有数集之间的关系：$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

空集是所有集合的子集.

集合以及集合之间的关系可由文氏(Venn)图直观表示. 如图 1－1 所示，文氏图是用简单的平面区域表示的一个集合，集合内的元素由区域内的点表示.



集合相等文氏图　　包含文氏图　　全集文氏图

图 1－1

5. 集合的运算

集合的运算主要有交、并、差、补运算及集合的笛卡尔乘积.

(1) 并集

设 A，B 是两个任意集合，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作："A 并 B". 用描述法表示为：$A\cup B=\{x \mid x\in A, \text{或 } x\in B\}$.

如文氏图 1－2 所示，图中阴影部分为 $A\cup B$.

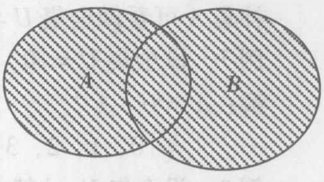


图 1－2

(2) 交集

设 A，B 是两个任意集合，既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作："A 交 B".

用描述法表示为：$A\cap B=\{x \mid x\in A, \text{且 } x\in B\}$.

如文氏图 1－3 所示.

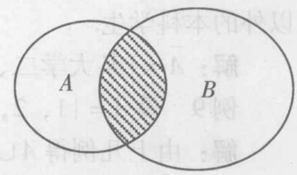


图 1－3

如果两个集合 A 和 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\Phi$，集合 A 与 B 叫做不相交集.

例 4　设集合 $A=\{x \mid -2<x<2, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：
$$A\cup B=\{x \mid -2<x<2, x\in\mathbf{R}\}\cup\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}$$
$$=\{x \mid -2<x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}$$
$$A\cap B=\{x \mid -2<x<2, x\in\mathbf{R}\}\cap\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}$$

$=\{x\mid 0\leqslant x<2,\ x\in\mathbf{R}\}$.

例 5　设 A 为奇数集合，B 为偶数集合，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解：$A\cup B=\{x\mid x$ 为奇数或偶数$\}=\{x\mid x\in\mathbf{Z}\}$

（①因为当 $x\in A$ 时，x 为奇数；当 $x\in B$ 时，x 为偶数．所以 $A\cup B$ 中的元素或者是奇数，或者是偶数，从而是一切整数）；

$A\cap B=\{x\mid x$ 既是奇数，又是偶数$\}=\Phi$

（②因为当 $x\in A$ 时，x 为奇数；当 $x\in B$ 时，x 为偶数．所以 $A\cap B$ 中的元素既是奇数，又是偶数，这样的数不存在，从而是空集）.

（3）差集

设 A，B 是两个任意集合，属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的差集，记作 $A-B$．即 $A-B=\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$，如文氏图 1－4 表示的阴影部分.

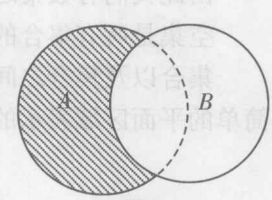


图 1－4

例 6　设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{R}\}$，求 $A-B$，$B-A$.

解：
$$A-B=\{x\mid -1\leqslant x<2,\ x\in\mathbf{R}\}-\{x\mid 0<x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{R}\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0,\ x\in\mathbf{R}\}$$
$$B-A=\{x\mid 0<x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{R}\}-\{x\mid -1\leqslant x<2,\ x\in\mathbf{R}\}=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3,\ x\in\mathbf{R}\}.$$

（4）补集

设 U 为全集，$A\subseteq U$．由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$，读作：“A 在 U 中的补集”，即 $\overline{A}=\{x\mid x\in U$，且 $x\notin A\}$．如文氏图 1－5 表示的阴影部分.

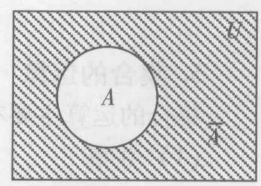


图 1－5

补集 $\overline{A}$ 可看做全集 U 与集合 A 的差集，$\overline{A}=U-A$.

例 7　设全集 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{0,1,2\}$，求 $\overline{A}$.

解：
$$\overline{A}=U-A=\{0,1,2,3,4,5\}-\{0,1,2\}=\{3,4,5\}.$$

例 8　设全集 $U=\{$某大学的全体本科学生$\}$，$A=\{$某大学本科全体一年级学生$\}$，求 $\overline{A}$.

解题分析：补集是全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，应该是本科中除一年级以外的本科学生.

解：$\overline{A}=\{$某大学二、三、四年级的本科学生$\}$.

例 9　设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,5\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$.

解：由上几例得 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，$A\cap B=\{2\}$，$A-B=\{1,3\}$.

（5）集合的笛卡尔乘积

设 A，B 是两个任意集合，$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A\times B$.

即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$.

当 A，B 是有限集合时，$A\times B$ 中的元素个数是集合 A 的元素个数乘以 B 的元素个数.

例 10　设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3\}$，求 $A\times B$.

解题分析：$A\times B$ 中的元素个数是集合 A 的元素个数乘以 B 的元素个数．因此所得结果中应有 $4\times2=8$ 个元素.

解：$A\times B=\{(x,\ y)\mid x\in A,\ y\in B\}$

$=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)\}$.

注：如果 A 与 B 中至少有一个是无限集，那么 $A\times B$ 必然也是无限集.

类似可推广得 $A\times B\times C=\{(x,\ y,\ z)\mid x\in A,\ y\in B,\ z\in C\}$.

例 11　设 $A=\{1\}$，$B=\{2,\ 3\}$，$C=\{0,\ 4,\ 5\}$，求 $A\times B\times C$.

解：$A\times B\times C=\{(1,\ 2,\ 0),\ (1,\ 3,\ 0),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 4),\ (1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 5)\}$.

当 A，B，C 是有限集时，$A\times B\times C$ 中的元素个数是集合 A 的元素个数乘以 B 的元素个数再乘以 C 的元素个数．以此可类推.

【即学即练】

1. 设 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{0,\ 3,\ 7,\ 9\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

（答案：$A\cup B=\{0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$A\cap B=\{3,\ 7\}$）.

2. 设 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{2,\ 5\}$，求 $A\times B$.

（答案：$A\times B=\{(1,\ 2),\ (1,\ 5),\ (2,\ 2),\ (2,\ 5),\ (3,\ 2),\ (3,\ 5)\}$）.

---

6. 集合的运算规律

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

（4）吸收律：$(A\cup B)\cap A=A$，$(A\cap B)\cup A=A$.

（5）摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上定律可以通过文氏(Venn)示意图来直接验证.

二、实数集

1. 实数与数轴

全体实数的集合记为 **R**.

实数集 **R** 是一类数学上非常重要的数集，微积分就是建立在实数集上的．实数包含有理数与无理数，有理数就是可以表示成分数的数或者无限循环小数，而无理数就可以定义为无限不循环小数.

例如，1 是有理数，同时 $1=0.999\ 9\cdots=0.\dot{9}$．而 π 就是无理数．在数学的发展历史上，首先认知了整数集 **Z**，然后是有理数，对于无理数的认知是后来的发展成果．现代数学分析理论告诉我们，“任何两个不同的有理数之间都有无理数，同样任何两个不同的无理数之间都存在有理数”.

实数又分为正数与负数，人类首先认识了正数，后来人类发现在加减法运算中，减法运算可以通过引入负数称为加法运算. 如设 $a>0$，$a-a=a+(-a)$，这里 $-a$ 就是负数.

通过数轴，我们可以找到任何实数的位置，如图 1－6 所示.

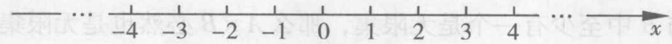


图1－6

2. **实数的运算规则**

（1）加法、乘法运算规则

加法交换律　$a+b=b+a$；　加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律　$a\cdot b=b\cdot a$；　乘法结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

分配律　$a(b+c)=ab+ac$.

（2）括号规则

$a+(b-c)=a+b-c$；　$a-(b-c)=a-b+c$；

$a+b-c=a+(b-c)$；　$a-b+c=a-(b-c)$.

（3）正负规则

$a(-b)=-(ab)$；　$(-a)b=-(ab)$；

$(-a)(-b)=ab$.

（4）比例规则

$\dfrac{a}{b}=a\cdot\dfrac{1}{b}(b\neq0)$；　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{ac+bd}{bc}(b\neq0,\ c\neq0)$；

$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}(b\neq0,\ d\neq0)$；　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}(b\neq0,\ c\neq0,\ d\neq0)$.

（5）乘方规则

n 个数 a 相乘 $a\cdot a\cdots a=a^n$ 称为 a 的 n 次方（或 a 的 n 次幂）；

正数的非 0 次幂是正数；

负数的非 0 偶次幂是正数，奇次幂是负数；

0 的正数次幂等于 0，非 0 数的 0 次幂等于 1.

例如，$2^5=32$，$(-4)^3=-64$，$(-1.3)^2=1.69$，$0^{100}=0$，$a^0=1(a\neq0)$.

（6）开方规则

数 a 的 n 次方根是指求一个数，它的 n 次方恰好等于 a. a 的 n 次方根记为 $\sqrt[n]{a}$（n 为大于 1 的自然数）.

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$（$a\geqslant0$）；$(\sqrt[n]{a})^n=a$；$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）；$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$（$a\geqslant0$，$b>0$）；

正数的奇次方根是一个正数；正数的偶次方根有两个互为相反的数；0 的 n（n 为正整数）次方根是 0；

负数的奇次方根是一个负数，在实数范围内，负数没有偶次方根.

例如，$\sqrt[3]{125}=5$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$，$\sqrt[n]{0}=0$（$n$ 为正整数），

如果 $x^2=a$，那么，x 叫做 a 的平方根.

一个正数 $a(a>0)$ 的平方根，是两个互为相反的数 $\pm\sqrt{a}$，其中正的平方根 $\sqrt{a}$ 叫做 a 的**算术平方根**（或算术根）.

如果 $x^3=a$，那么，x 叫做 a 的立方根.

按照实数运算顺序规则是，在没有括号的算式中，先计算乘方、开方，再计算乘法、除法，最后计算加法、减法；如果算式中有括号，先计算小括号内的算式，然后计算中括号内的算式，最后计算大括号内的算式.

3. 一个数的绝对值

（1）一个数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的距离，记为 $|a|$.

正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0.

即 $|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

（2）绝对值有以下性质：

①任何实数都有唯一的绝对值，且绝对值非负，即 $|a|\geqslant 0$.

②任何一个实数都不大于它的绝对值，且不小于它的绝对值的相反数，

即 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

③互为相反的一对数，其绝对值相等，即 $|-a|=|a|$.

④两个实数乘积的绝对值等于两个实数绝对值的乘积，即 $|ab|=|a|\cdot|b|$.

⑤两个实数和的绝对值不大于两个实数绝对值之和，即 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

⑥两个实数差的绝对值不小于两个实数绝对值之差，即 $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

⑦任何一个实数的绝对值等于该实数平方后的算术平方根，即 $|a|=\sqrt{a^2}$.

以上性质可由不等式的性质、绝对值定义和已有性质推得，例如，对于性质⑤ $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，由性质②得 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，由不等式性质两式相加得 $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$，即由性质②得 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

例 12 去掉绝对值 $|2x-3|$ 符号.

解题分析：按照 $|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$ 确定使 $2x-3=0$ 的值，即 $x=\frac{3}{2}$；

然后分别讨论 $x>\frac{3}{2}$，$x=\frac{3}{2}$，$x<\frac{3}{2}$ 时的 $2x-3$ 取值情况.

解：因为当 $x>\frac{3}{2}$ 时，$2x-3>0$，即 $|2x-3|=2x-3$；

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$2x-3=0$，则 $|2x-3|=0$；

当 $x<\frac{3}{2}$ 时，$2x-3<0$，则 $|2x-3|=-(2x-3)=3-2x$.

所以综上所述，得 $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & x > \dfrac{3}{2} \\ 0 & x = \dfrac{3}{2}. \\ 3-2x & x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

【即学即练】

去掉式子 $|2x+5| - |x-3|\ (-2<x<2)$ 的绝对值符号.

（答案：$x+8$）.

---

4. 区间与邻域

区间是常用的一类数集，分为开区间、闭区间、半开半闭区间. 设 a，b 是实数，且 $a<b$.

（1）开区间　　　　$(a,\ b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a<x<b\}$.

（2）闭区间　　　　$[a,\ b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

（3）半开半闭区间　　$(a,\ b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a<x \leqslant b\}$；$[a,\ b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x<b\}$.

用数轴表示三类区间，如图 1-7 所示.

图 1-7

以上区间称为有限区间，因为区间长度为 $b-a$.

将满足不等式 $a<x<+\infty$ 或 $-\infty<x<b$ 或 $a \leqslant x<+\infty$ 或 $-\infty<x \leqslant b$ 或 $-\infty<x<+\infty$ 的所有实数组成的集合，我们称此类区间为无限区间，此时区间长度为无穷大，如：$\{x \in \mathbf{R} \mid x>a\}$，或者 $\{x \in \mathbf{R} \mid x<b\}$. 为简单起见，引进符号 $+\infty$，读作："正无穷大"；引进符号 $-\infty$，读作："负无穷大". 那么无限区间有：

（1）$(a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a<x<+\infty\}$，$(-\infty,\ b) = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty<x<b\}$. 如图 1-8 (a)、(b)所示.

（2）$[a,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x<+\infty\}$，$(-\infty,\ b] = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty<x \leqslant b\}$. 如图 1-8 (c)、(d)所示.

（3）$\mathbf{R} = (-\infty,\ +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid -\infty<x<+\infty\}$. 如图 1-8(e)所示.

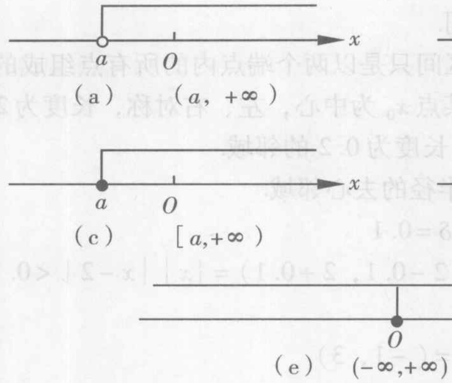
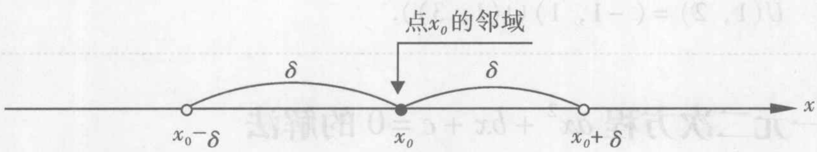


图 1-8

邻域是一类重要的区间，也是一种集合.

设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，在数轴上以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$ 称为以点 x_0 为中心 δ 为半径的邻域，简称**点 x_0 的邻域**，记为 $U(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. 如图 1-9 所示，一般 δ 是很小的正数.



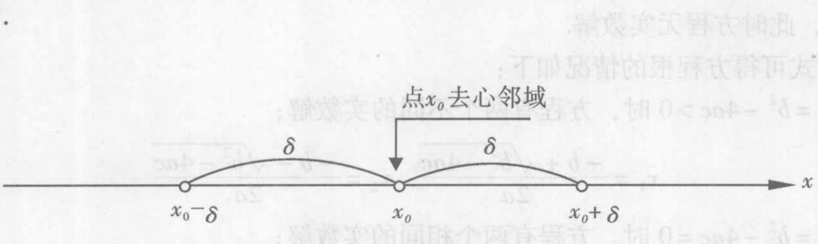
$U(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

图 1-9

在微积分中还常用到**去心邻域**，就是邻域 $U(x_0,\ \delta)$ 去掉中心 x_0 后的集合.

$\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}=(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$，记为 $\mathring{U}(x_0,\ \delta)$，如图 1-10 所示.

将 $(x_0-\delta,\ x_0)$ 和 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 分别称为左邻域和右邻域，分别记为 $\mathring{U}_-(x_0,\ \delta)$ 和 $\mathring{U}_+(x_0,\ \delta)$.



$\mathring{U}(x_0,\ \delta)=(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$

图 1-10

换句话说，某点的邻域是实数轴上以该点为中心，左右对称的、长度为一个很小正数

的2倍的开区间，它是一种特殊的开区间.

开区间与邻域不同在于：一般的开区间只是以两个端点内的所有点组成的集合，它不规定哪一点为对称中心点，而邻域是以某点 x_0 为中心，左、右对称，长度为 2δ 的开区间.

例13 （1）求以点 $x_0=2$ 为中心，长度为0.2的邻域.

（2）求以点 $x_0=1$ 为中心，$\delta=2$ 为半径的去心邻域.

解：（1）依题意 $x_0=2$，$2\delta=0.2$ 则 $\delta=0.1$

所求邻域为 $U(2,\ 0.1)=(2-0.1,\ 2+0.1)=\{x \mid |x-2|<0.1\}$

即是开区间(1.9, 1.3).

（2）因为 $U(1,\ 2)=(1-2,\ 1+2)=(-1,\ 3)$

所以 $\mathring{U}(1,\ 2)=(-1,\ 1)\cup(1,\ 3)$.

【即学即练】

1. 求以点 $x_0=5$ 为中心，$\delta=0.5$ 为半径的邻域.

（答案：$U(5,\ 0.5)=\{x \mid |x-5|<0.5\}$ 或 $(4.5,\ 5.5)$）.

2. 求以点 $x_0=1$ 为中心，$\delta=2$ 为半径的去心邻域.

（答案：$\mathring{U}(1,\ 2)=(-1,\ 1)\cup(1,\ 3)$）.

三、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法

一元二次方程最基本的解法是公式法，有时也可以用配方法或因式分解法求解，下面将一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 几种解法方法复习如下.

1. 公式法

用公式法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 参考步骤如下：

第一步，把方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$，确定 a，b，c 的值；然后用判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 判断方程解的情况；

第二步，根据第一步的判别情况，若 $b^2-4ac\geq0$，则方程有解，再把 a，b，c 及 b^2-4ac 的值代入一元二次方程的求根公式①、②中之一，求出方程的根，作为方程的解；若 $b^2-4ac<0$，此时方程无实数解.

由判别式可得方程根的情况如下：

①当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不同的实数解；

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

②当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相同的实数解；

$$x_1=-\frac{b}{2a}=x_2$$

③当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数解.

由于一元二次方程的解在图形上表示的是与 x 轴相交的点，因此，以上的解可用图