

14

微分方程与数学物理问题

(中文校订版)

经典方法和现代新方法
非线性数学物理问题
对称性和不变性理论

■ [瑞典] Nail H. Ibragimov 著

■ 卢琦 杨凯 胡享平 译

■ 胡享平 校订



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013071024

0175
150-2

现代数学基础

现代数学基础

(瑞典) 奈伊·H. 伊布拉吉莫夫 著

卢琦 杨书凯 胡享平 译

胡享平 校订

14

微分方程与数学物理问题

(中文校订版)

经典方法和现代新方法
非线性数学物理问题
对称性和不变性理论

■ [瑞典] Nail H. Ibragimov 著

■ 卢琦 杨书凯 胡享平 译

■ 胡享平 校订



北航

C1680259

0175

150-2



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

130170310

图书在版编目 (C I P) 数据

微分方程与数学物理问题: 中文校订版 / (瑞典)
伊布拉基莫夫 (Ibragimov, N. H.) 著; 卢琦, 杨凯, 胡享
平译. -- 2 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2013. 8
ISBN 978-7-04-038040-8

I. ①微… II. ①伊… ②卢… ③杨… ④胡… III.
①微分方程 - 研究生 - 教材 ②数学物理方程 - 研究生 - 教
材 IV. ① O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 164268 号

策划编辑 王丽萍
责任校对 胡晓琪

责任编辑 李 鹏
责任印制 尤 静

封面设计 张 楠

版式设计 范晓红

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 化学工业出版社印刷厂
开 本 787 mm × 1092 mm 1/16
印 张 22.5
字 数 420 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2010 年 1 月第 1 版
2013 年 8 月第 2 版
印 次 2013 年 8 月第 1 次印刷
定 价 49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 38040-00

中文版序

1996 年,我推导了非线性弹性悬链线的准确解.如果人们用准确的微分方程来描述复杂自然现象,那么该方程及其解必然存在着完整性和对称性.那时我正困惑于将这一思想推广.2000 年,在一次国际非线性振动会议上,我与土耳其教授嘎赞富·尤纳 (Gazanfer Ünal) 一次交谈中,他向我介绍了纳伊尔·伊布拉基莫夫 (Nail Ibragimov) 教授.从那以后,我与纳伊尔保持着密切联系,并且将他的《现代群分析引论》通读一遍,收益颇深,随后纳伊尔被邀请作为《非线性科学与数值模拟》杂志核心编委会成员.此次承蒙伊布拉基莫夫教授邀请我为他的新书在中国出版写序,倍感荣幸.

纳伊尔·伊布拉基莫夫教授是一位世界著名数学家.他是微分方程群分析资深专家和传人.微分方程群分析是由索菲斯·李在 19 世纪末创造,而且在 20 世纪 60 年代有着惊人的突破.微分方程群分析是用来寻找非线性微分方程的对称性,从而获得精确解来准确描述复杂自然现象.为获得非线性微分方程解,沿袭简单线性叠加原理是不可以的.李群和李代数有着广泛的应用,它和其他的现代分析方法一起,是求非线性微分方程的解析解的重要工具.

纳伊尔·伊布拉基莫夫毕业于莫斯科物理及工程技术学院,后在苏联新西伯利亚州立大学深造.在 1963 年至 1980 年,纳伊尔在苏联科学院西伯利亚分院水动力研究室工作.在这期间,他系统地发展了微分方程群分析方法.1983 年,纳伊尔·伊布拉基莫夫被授予物理学、数学博士头衔和苏联国家科学技术奖以表彰他的突出贡献.从那以后,他非常积极地主持国际会议,并推广群理论和李代数在工程和物理上的应用.纳伊尔延伸了欧拉方程守恒定律的存在性定理,给出

了充分条件, 并且获得了有限李群泛函不变性. 他发现了二阶双曲方程解的惠更斯原理与其在黎曼空间上保形不变性的相互关系. 纳伊尔还揭示了如何有效地应用 Lie-Backlund 理论去解决数学物理问题. 为了表彰纳伊尔·伊布拉基莫夫在理论物理和纯数学上的贡献, 2008 年在葡萄牙波尔图市举行的第二届非线性科学及复杂性大会上他被授予拉格朗日奖.

纳伊尔对科学的执着追求, 创造了科学上的辉煌与成就. 在此, 人们在读他的书的同时, 不仅要学习他的知识, 更要领略他的思维方式和为人之道. 他的科学成就将在这本书中反复展现, 并希望中华学子从中获得启迪.

罗朝俊于美国伊利诺伊州戊子秋

(Albert C.J. Luo, Illinois, USA, September, 2008)

校订者序

微分方程在数学、物理及其他领域的研究中有着举足轻重的作用, 同时在实际的生活中存在着广泛的应用. 由瑞典数学家纳伊尔·伊布拉基莫夫 (Nail Ibragimov) 所著的《微分方程与数学物理问题》是一本十分值得阅读和收藏的数学著作. 它使用精练的数学语言、简单的数学实例来阐述复杂的数学问题. 该书从基本的数学知识入手, 逐步介绍了常见的数学物理问题、常微分方程的解法、一阶和二阶偏微分方程的解法; 深入地讨论了线性和非线性常微分方程及偏微分方程的相关解法; 同时也讨论了广义函数及不变原理及基础解的相关问题. 本书是介绍求解常微分方程、偏微分方程李群方法的第一本中文翻译教材. 大量的实例使得初学者可以轻松进入李群分析方法的学习. 正如本书作者所说, 本书侧重于让读者对微分方程的解法有个全面和较新的认识, 同时也使读者能够用已知的算子来求解复杂的数学物理问题中的微分方程.

本书的首次翻译工作由校订者及其他几位译者于 2009 年在瑞典和美国共同完成, 并于 2010 年初由高等教育出版社出版. 应众多读者、原书作者及高等教育出版社的要求, 由校订者对全书做了全面的校订. 在本次校订工作中, 校订者再次仔细地通读了本书的中文版和英文版, 尽最大努力勘误了全书中的用词不当与歧义之处. 多处内容也得到合理的调整和再次翻译. 校订者真诚地希望此次的校订可以使得本书的翻译更加完善, 同时使读者在阅读本书时获得更多有用的知识.

最后, 校订者感谢高等教育出版社和原书作者在整个校订过程中给予的支持, 同时也感谢校订者家人一直以来默默的关怀. 校订者同时也感谢赵康乔、鲁

圣洁在校订本书过程中所提供的及时有用的帮助和建议。

由于校订者时间和水平有限，书中难免仍有不当之处未能得到及时的修正，恳请读者不吝批评指正。

胡享平于挪威特隆赫姆

(Xiangping Hu, Trondheim, Norway, January, 2012)

前言

现代数学有着 300 多年的历史. 最初, 我们主要关注微分方程的研究, 将其作为数学建模的主要工具. 大多数物理、工程科学、生物数学等领域的数学建模都会产生非线性微分方程.

今天, 理工科学生和研究者经常会遇到怎么求解在数学建模中产生的微分方程的问题. 有时, 这些解可以由对特殊型方程进行积分的传统特定方法解析地得到. 尽管我们总结了超过 400 种类型的可积二阶常微分方程的积分方法, 但是, 在一般的情况下, 我们还是不能由这些方法求得所有微分方程的解.

然而, 由微分方程刻画的基本自然规律和技术问题可以由李群分析方法成功地处理并解决. 例如, 李群可以将上述的 400 种类型的方程简化为 4 种类型. 群分析理论的发展给出了大量的证据证明: 当其他的一些积分方法失效的时候, 群理论是求解大量微分方程的通用工具. 事实上, 群分析是求解非线性微分方程解析解的唯一通用和有效的方法. 那些老的积分方法在很大程度上依赖于微分方程的线性性以及常系数的存在性. 但群分析理论处理线性和非线性方程的问题是等同的, 对于常系数和变系数都是同样的处理. 例如, 在传统的意义上, 带有常系数的线性方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

和方程

$$\bar{x}^n \frac{d^n \bar{y}}{d\bar{x}^n} + a_1 \bar{x}^{n-1} \frac{d^{n-1} \bar{y}}{d\bar{x}^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \bar{x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + a_n \bar{y} = 0$$

是不同的, 后一方程称为欧拉方程. 然而, 从群分析的角度讲, 这两个方程仅仅是

一个方程的两种不同表示, 是同一方程使用下述两种已知的交换对称算子的各自表示:

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{和} \quad \bar{X}_1 = \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{X}_2 = \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}.$$

这些对称算子跨越两种相似的李代数, 很容易得到 $x = \ln |\bar{x}|$ 变换. 该变换可将欧拉方程转变为常系数的微分方程.

我认为, 李群之所以有趣首先就在于它们可用来求解微分方程. 将它们与这种自然的应用分离开来, 而仅仅将其看成抽象数学的一个分支是极其错误的. “把数学与其他科学的实际需求割裂, 就如同把母牛关起来, 而与公牛隔离开一样, 将导致一无所获.” (P.L. Chebyshev, 1821—1894)

今天, 群分析已经成为微分方程和非线性数学建模的一门课程, 吸引着越来越多的学生. 例如, 在莫斯科物理及工程技术学院, 对于偏微分方程这门课程, 当我使用李群分析理论来进行授课时, 它吸引了 100 多名学生前来听课, 而使用传统方法授课时, 仅仅有 10 个学生. 我在南非和瑞典授课时这种相似的情况也同样发生.

本书以上述课程为基础, 在一定程度上, 也反映我个人的兴趣与经验. 最初, 书稿是为布莱京尔理工学院 (Blekinge Institute of Technology) 的工程专业及数理专业的学生所开的微分方程课程而设计的. 之后, 教材内容又做了修改和扩充, 从而也适用于下列课程:

微分方程: 该课程涵盖常微分和偏微分方程, 它将解线性方程的基础经典方法和求非线性方程解析解的新方法结合起来, 主要面向初学者, 学生将通过求解定方程来学会求微分方程的对称算子.

数学建模中的解析法: 本门课程的重点是在物理、生物和工程科学领域内的非线性数学模型; 它涵盖的主题有: 非线性叠加, 对称和守恒定律, 群不变解系.

微分方程的群分析: 本门课程给数学和工程系的学生介绍群变换和李代数的某些理论, 这些理论在实际的应用中是非常重要的; 通过本门课程, 学生们将提高使用现代方法求解非线性常微分和偏微分方程组的分析技巧.

初值问题中的分布和不变原理: 一门快速入门的关于分布理论基本概念并着重于实用工具的导引课程; 李的无穷小技巧将被延伸到分布空间, 而且将和不变原理一起使用来求基础解系和解常系数或变系数初值问题方程.

在我的课堂上, 我一直致力于使理工科学生更容易地接受微分方程的群分析这个理论. 因此, 本书的重点在于如何应用已知的对称算子而不在于它们的计算. 为了阐述我解不同形式的微分方程的经验, 我改述著名的法国谚语 *cherchez la femme* (法语的字面意思为“寻找那个女人”, 意为当一个男人表现异常或者

处于困难时, 去寻求女人的智慧) 为: *If you cannot solve a nonlinear differential equation, cherchez le groupe* (如果你不能解非线性微分方程, 那么寻求群方法吧).

我真诚地感谢我的同事 Claes Jogréus 对我持续的帮助. 我的妻子 Raisa 阅读了第二版各阶段中的全部原稿, 纠正了打印错误并且贡献了许多有价值的批评和建议, 在此, 我由衷地表示感谢. 也很感谢我的女儿 Sania 和 Alia 给我提出的一些有帮助的意见.

Nail H. Ibragimov

Karlskrona, 瑞典, 2009 年 3 月 3 日

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37525-6	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著

网上购书: academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, www.joyo.com, www.dangdang.com

其他订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账均可。

购书免邮费, 发票随后寄出。

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电 话: 010-58581118/7/6/5/4

传 真: 010-58581113

通过邮局汇款:

地 址: 北京西城区德外大街 4 号

户 名: 高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账:

户 名: 高等教育出版社有限公司

开 户 行: 交通银行北京马甸支行

银行账号: 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120



北航

C1680259

现代数学基础 图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	26547-7	微分方程与数学物理问题	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

目录

中文版序

校订者序

前言

第一章 数学分析中的几个话题	1
1.1 初等数学	1
1.1.1 数值、变量和初等函数	1
1.1.2 二次与三次方程	5
1.1.3 相似图形的面积·以椭圆为例	8
1.1.4 二次代数曲线	10
1.2 微分和积分运算	14
1.2.1 微分法则	14
1.2.2 中值定理	15
1.2.3 微分形式不变性	16
1.2.4 积分法则	17
1.2.5 泰勒级数	17
1.2.6 复变量	19
1.2.7 函数的近似表达式	21
1.2.8 雅可比行列式·函数无关性·多重积分的换元法	22

1.2.9 函数的线性无关·朗斯基行列式	23
1.2.10 积分	23
1.2.11 曲线族的微分方程	25
1.3 向量分析	27
1.3.1 向量代数	27
1.3.2 向量函数	29
1.3.3 向量场	30
1.3.4 三个经典的积分定理	31
1.3.5 拉普拉斯方程	32
1.3.6 行列式的微分	32
1.4 微分代数的符号	33
1.4.1 微分变量·全微分	33
1.4.2 乘积和复合函数的高阶微分	34
1.4.3 多元微分函数	34
1.4.4 微分方程的空间曲面	35
1.4.5 换元法求导	37
1.5 变分法	39
1.5.1 最小作用量原理	39
1.5.2 多元欧拉-拉格朗日方程	40
习题一	40
第二章 数学物理问题	45
2.1 导言	45
2.2 自然现象	46
2.2.1 人口模型	46
2.2.2 生态学:放射性的废弃物	47
2.2.3 开普勒 (Kepler) 定律·牛顿万有引力定律	48
2.2.4 地表的自由落体运动	49
2.2.5 流星体	50
2.2.6 降雨模型	51
2.3 物理学和工程学	52
2.3.1 牛顿冷却模型	52
2.3.2 机械振动·钟摆	59
2.3.3 传动轴的失效	62
2.3.4 van der Pol 方程	64
2.3.5 电报方程	65

2.3.6	电动力学	65
2.3.7	狄拉克方程	66
2.3.8	流体动力学	67
2.3.9	Navier-Stokes 方程	68
2.3.10	灌溉系统模型	68
2.3.11	磁流体动力学	69
2.4	扩散现象	69
2.4.1	线性热传导方程	69
2.4.2	非线性热传导方程	71
2.4.3	Burgers 方程和 Korteweg-de Vries 方程	72
2.4.4	经济学数学模型	72
2.5	生物数学	73
2.5.1	巧妙的蘑菇	73
2.5.2	肿瘤的生长模型	75
2.6	波现象	75
2.6.1	绳索的微小振动	76
2.6.2	振动膜	78
2.6.3	极小曲面	80
2.6.4	振动细长杆和板	81
2.6.5	非线性波	82
2.6.6	Chaplygin 方程和 Tricomi 方程	84
	习题二	84
第三章 常微分方程: 经典方法		87
3.1	简介和基础方法	87
3.1.1	微分方程·初值问题	87
3.1.2	方程 $y^{(n)} = f(x)$ 的积分	89
3.1.3	齐次方程	89
3.1.4	齐次性的不同种类	92
3.1.5	降阶	93
3.1.6	微分线性化	94
3.2	一阶方程	94
3.2.1	可分离变量的方程	94
3.2.2	全微分方程	95
3.2.3	积分因子 (A. Clairaut, 1739)	96
3.2.4	里卡蒂方程	98
3.2.5	伯努利方程	101

3.2.6	齐次线性微分方程	102
3.2.7	非齐次线性方程·常数变易法	102
3.3	二阶线性方程	104
3.3.1	齐次方程: 叠加性	104
3.3.2	齐次方程: 等价性质	105
3.3.3	齐次方程: 常系数	108
3.3.4	非齐次微分方程: 常数变易法	109
3.3.5	贝塞尔方程和贝塞尔函数	113
3.3.6	超几何方程	114
3.4	高阶线性方程	115
3.4.1	齐次方程·基础解系	115
3.4.2	非齐次方程·常数变易法	116
3.4.3	常系数方程	116
3.4.4	欧拉方程	118
3.5	一阶微分方程组	118
3.5.1	微分方程组的一般属性	118
3.5.2	首次积分	119
3.5.3	常系数的线性方程组	124
3.5.4	方程组的常数变易法	125
	习题三	128
	第四章 一阶偏微分方程	131
4.1	简介	131
4.2	齐次线性方程	132
4.3	非齐次方程的特解	134
4.4	拟线性方程	135
4.5	齐次方程组	138
	习题四	142
	第五章 二阶线性偏微分方程	145
5.1	多元方程	145
5.1.1	固定点的分类	145
5.1.2	伴随线性微分算子	147
5.2	含两个自变量的方程的分类	149
5.2.1	特征值·三种类型方程	149
5.2.2	双曲型方程的标准形式	151