

專題譯丛

熱傳層面附流案

內部資料

国防科学技术資料研究所

1962.12

目 录

1. 有压力梯度的附面层傳热問題(1)
2. 有攻角平板在极高超音速下的紊流表皮摩擦系数及
傳热系数(39)
3. 关于鈍头体在高超音速流中的层流、轉捩及紊流的
傳热研究(61)
4. 具有高度冷却附面层的鈍头物体上的附面层轉捩問題(77)
5. 20° 錐体恢复系数的实验測定及流場之解析解(89)
6. 馬赫数为5时的恢复溫度、轉捩点和傳热的測量(110)
7. 高馬赫数和高雷諾数下空气和氮气的紊流表皮摩擦(129)

有压力梯度的附面层傳热問題

R. A. Seban 和 H. W. Chan, PB 151414

摘要: 本文提出了求层流附面层和紊流附面层傳热量的各种計算方法。考虑了变自由流速度和变壁面溫度的情况, 目的在于找出最佳的計算方法。

文中評述了求算流动屬性几乎为常值的层流附面层的几种典型計算法, 并把計算結果与实验結果作了比較。看来, Lightill 法如經适当的修正是可以用来作一般的計算的, 虽然在某些情况下, 計算的傳热量誤差可达 20%。

当流动虽为层流, 但参数为变数时, 計算法就复杂得多了, 要与实验作专门比較也是不可能的。但如将問題加以簡化, 例如設壁面溫度几乎不变, 且設气流是一种連續加速的流动, 那么, 即使原来适用于定屬性流动的簡單計算法也适用于做高馬赫数流动的計算。

对于紊流來說, 由于还没有像层流情况那样求給定自由流速变化規律和壁面溫度变化規律的精确解, 这就使我們难于提出这样一些假設, 这些假設是作为推导具有所需的通用性的近似計算法的基础。本文对进行能量方程积分的一些常用的近似計算法作了較詳細的分析。將計算結果和实验結果作比較后还不能肯定那一种計算法最好。可以肯定地說, 在紊流情况下流体力学性质对热力性质的影响远比层流时为小, 看来如果完全不考虑流体力学性质的影响計算出来的傳热量誤差也不致超过 30%。

用于层流和紊流的較好的計算方法在文中通过詳細的算例作了介紹, 这些算例可以作为这些方法的应用示范。

符 号

A	常数, 列于表 I 中
B	常数, 列于表 I 中
b	溫度分布参数, 表 II
C	Chapman 与 Rubesin 常数, $\rho u = C\rho_1 u_1$, 用下式决定: $C = \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} \frac{T_1 + S}{T_0 + S}$, 式中的 S 是 Sutherland 常数
C_f	当地表皮摩擦系数, $2\tau/\rho u_1^2$, 无因次
C_{f*}	紊流平板按受热长度計算的当地表皮摩擦系数: $C_{f*}/2 = 0.0295 (\nu/u_1 x_h)^{1/5}$, 无因次
c_p	定压比热, 大卡/公斤·秒 ² /米 ² ·°K
D	1:3 的橢圓柱体之长軸, 0.15 米; 图 11 中的半球柱体之直径

E	紊流的形状因子, $E = \frac{5}{4} \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right)$
F	$\times \times \times$ 的函数
f	$\times \times \times$ 的函数
$f'(\eta)$	无因次的速度分布, u/u_1
f_z	楔型流分析的无因次速度分布, u/u_1
f_{zz}	楔型流分析中壁面处的无因次速度梯度
g	附面层中的无因次溫度分布
g_z	壁面处的无因次溫度梯度
H	焓, $c_p T$, 千卡/公斤·秒 ² /米
h	傳热系数, 千卡/时米 ² ·°C
h_0	常值壁温下的傳热系数, 千卡/时米 ² ·°C
I	Lightill 分析(第 4-2 节)中之积分
K	相似因子, $h/\rho u_1 c_p = K C_{f*}/2$

K_1	相似因子, $K_1 = K \frac{N}{N+1}$	α	热扩散率, 米 ² /秒
k	导热率, 千卡/时米 ² C/米	β	描写具体速度分布的参数, 自由流速的幂函数
L	长度, 米, 平板用 0.3 米	γ	壁面温度幂次律变化之指数
M	馬赫数	δ	附面层厚度, 米
N	定义为 $h/(\rho u_1 c_p) = K_1 \frac{C_f}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_t} \right)^{\frac{1}{N}}$	δ_t	温度附面层的厚度, 米
n	幂次律的速度分布之指数	δ^*	位移厚度
p	压强, 公斤/米 ²	ϵ	微量长度, 米
Q	总傳热量, $Q = \int_0^x q dx$, 千卡/时米(宽度)	ϵ_H	渦的热扩散率, 米 ² /秒
q	壁面上的热流量, 千卡/时米 ²	ϵ_M	渦的动量扩散率, 米 ² /秒
R	軸对称体在 x 处的半径, 米	η	自变量, 方程(24)
r	恢复系数, $(T_r - T_1)/(u_1^2/2c_p)$, 无因次	η	积分之哑变量
S	Lighthill 分析(第 4-2 节)中的积分 I_1 之平方	θ	动量厚度
s	自变数, $s = \int_0^x \mu_1 \rho_1 u_1 dx$	θ_t	热厚度
s	自变数, $ds = (1/5.93) \frac{C_f}{2} u_1 (u_1)^{\frac{1}{N}} dx$	k	多項式速度分布的形状参数, $(\theta^2/\nu) \frac{du_1}{dx}$, 对楔型流, 便相当于 βz_i^2
S'	积分之哑变量	λ	方程(13)中的指数
T	温度, °K; T_0 壁温; T_r 絕热壁温; T_s 駐点温度; T_1 自由流靜温; T^* 方程(3a)所定义之参考温度。	μ	绝对粘性系数, 公斤-秒/米 ²
t	附面层內靜温余量, °C; t_0, t'' 对絕热壁; t_0 壁面对絕热壁; t_r 絕热壁对自由流	ν	运动粘性系数, 米 ² /秒
u	附面层內 x 向的分速, 米/秒	ξ	自变数, $d\xi = \frac{C_f}{2} (\rho u_1)^{\frac{N+1}{N}} \theta^{\frac{1}{N}} dx$
u_∞	参考速度, 米/秒; 平板取为距前緣 0.0713 米或 0.0832 米处的流速; 椭圆柱取为上游的流速, 米/秒	ξ'	积分的哑变量
u_1	当地的自由流速, 米/秒	ρ	密度, 公斤/米 ³
v	附面层內的 y 向分速, 米/秒	ν/α	(普朗特数, 空气取为 0.70)
x	由平板前緣起順板面計量的距离; 对鈍头体則从前駐点沿曲面計量, 米	τ	壁面上的剪切应力, 公斤/米 ²
x_k	受热长度, $x - x_1$, 米	() _a	表示在参考点計算的物理量
x_1	开始加热的长度, 或壁温起跃变之长度; 对平板此值为 0.0427 米	() _b	表示一微段的起点
x'	积分之哑变数	() _c	表示一微段的終点
x''	积分之哑变数	() _d	表示壁面上的条件
y	垂直于物面的距离, 米	() ₁	除另作規定外, 一般用来表示按当地自由流条件計算的量
z	由壁面量起的无因次距离	() [*]	作变属性的层流附面层分析时的无因次条件
Z	方程(60)的自变数	()	表示与軸对称三元流相对应的当量二元流
z_i	层流附面层的无因次动量厚度, 自由流速的幂函数		
z_t	层流附面层的无因次热厚度, 是自由流速和壁温的幂函数		

引 言

本报告旨在提出求附面层傳热量的計算方法, 流动条件是一般的, 自由流速和壁面温度是任意給定的变值, 气流流过的是光滑而不可穿越的固壁。这样一个傳热問題的解当然包括了热能方程的解, 所以得預先或同时求解动量方程。这样, 有了对傳热情况的說明后即可了

解摩擦和其他流动特性。

只有对自由流速、壁面温度或参数的变化规律作很严格的限制，才有可能得出动量方程和能量方程的精确解。例如曾有人在自由流速和壁面温度不变的给定情况下就层流附面层求解过这两个方程，求解的精度是为验证其结果所做的实验所不能达到的。但如果自由流速作复杂变化，那么即使参数不变，壁面温度不变，也不可能得出精确解，这时只有作大量的近似假设之后才可能估算出传热量来。这些近似假设用到微分方程里去，微分方程就有可能解出；或者更普遍的办法是用动量和能量方程的积分形式，这时，对附面层内的流速分布和温度分布作一些假设后，把这些方程解出来。

由于自由流速和壁面温度是任意变化的，传热计算方法的选择就只好取决于各种方法的计算值与能够相当严密地验证计算方法的相应实验值的比较结果。本文分别对层流和紊流做了这种比较，分章讨论了各种解法和实验的比较，并推荐较好的计算方法。

在提出求解具体问题所需的近似假设之前，这里先把确定流过小曲率壁面的二元层流流动的附面层内速度场和温度场的基本方程写出来。这些方程是在附面层的假设前提下说明质量守恒、动量守恒和热能守恒的。

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0 \quad (1a)$$

$$\rho u u_x + \rho v u_y = -p_x + (\mu u_y)_y \quad (1b)$$

$$\rho u H_x + \rho v H_y - u p_x = (k T_y)_y + \mu u_y^2 \quad (1c)$$

当气流的密度和输运特性的变化很小，以至可以忽略不计时，这些方程可取如下的形式(式中 $dH = c_p dT$)

$$u_x + v_y = 0 \quad (2a)$$

$$u u_x + v u_y = -\frac{p_x}{\rho} + \nu u_{yy} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} u(T - T_1)_x + v(T - T_1)_y = \\ = \alpha(T - T_1)_{yy} + \frac{\nu}{c_p} u_y^2 \end{aligned} \quad (2c)$$

除能量方程之外，这些方程和用于液体的完全一样；能量方程表明，当上述的假设用于

气体时，必须用定压比热，而当地的自由流温度是确定应变数——温度高低的基准。

这些方程也可以用于紊流，只要把所有的应变数都看作为瞬时的平均值，且把涡的输运项 $\rho \epsilon_M$ 和 $\rho c_p \epsilon_H$ 分别加到绝对粘度和导热率中。这两个涡的输运项决定于至壁面的法向距离，这时方程(1)和(2)之形式略有改变。

这些基本方程所取的形式的最重要的特点就是动量方程和能量方程无关，而且当不计消耗项时，能量方程是线性的。正是由于后一特点我们可以单独测定绝热壁温度，并且可把求算绝热壁温的解与该方程的无消耗形式的另一个解相叠加。为了满足边界条件，发现用了这种加法之后，有效的温度差就是实际的壁面温度和绝热壁温度之差。

当属性为变值时，这两个特点都不存在，只有在自由流速和壁面温度不变的层流情况下，方能不作进一步的限制假设，而求出方程(1)的解。Crocco 首先对这些方程作过积分，以后又有不少人对这些方程在很宽的属性范围内作过多次积分，所考虑的流体都是空气。Eckert⁽³⁶⁾ 曾证明过，所有这些结果都可以用定属性的解表达出来，只要其中的物理属性都取为一个参考温度下的值，该温度规定为：

$$\begin{aligned} T^* = T_1 + 0.5(T_0 - T_1) + \\ + 0.22(T_r - T_1) \end{aligned} \quad (3a)$$

用这个属性求出来的传热系数、剪应力和恢复系数分别由下列各方程给出：

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho u_1^2} = \frac{c_f}{2}; \quad \frac{c_f}{2} = 0.332 \sqrt{\frac{\nu}{u_1 x}}; \\ \frac{h}{\rho u_1 c_p} = \frac{c_f}{2} \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^{2/3}; \quad r = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} \end{aligned} \quad (3b)$$

传热量仍为

$$q = h(T_0 - T_r)$$

所以有效的温度差仍是 $(T_0 - T_r)$ ，虽然定属性的线性关系不再存在。

Eckert 在研究类似条件下紊流的较粗糙的近似解及相应的实验结果后，建议仍按同一方

法用同样的参考温度，这样所需要的量仍可以按方程(3b)计算，只是得用平板紊流的摩擦系数和恢复系数的适当表达式。

由于自由流速和壁面温度不变情况下所求得的结果，与自由流速及壁温可变的一般情况下所得出的往往相当含混的解之间有矛盾，所以最好能把自由流速和壁面温度变化的上下限加以规定，从而可在这个限度之内应用这些已确知的解。但是，由于自由流速和壁面温度分布有变化时会产生各种影响，所以这一点尚办不到；看来这些影响总是必须计及的。

第一章 层流附面层

在许多应用技术会上会遇到层流附面层，这就使人对于层流附面层的流体力学特性和热力学特性提出了几乎数不清的计算方法。最一般的情况，当自由流速任意变化，且附面层壁面温度也是任意的，这时连附面层形式的基本方程都很难处理，所以得用积分形式的基本方程。然后得假设速度和温度分布曲线。不同的假设产生不同的近似解法，各种解法的可用程度只有和实验作比较后才能作出结论。

只有流动属性为常值的流体力学特性计算做过足够多的比较，以致可以对某些具体的解法下可靠的结论了。但在计算有关的热力特性方面，对近似算法尚无肯定的结论可言。至于属性是变化的情况，则不论是流体力学特性还是热力学特性，其各种近似解之精度都还不够清楚，虽然看来对自由流速和壁面温度的变化作一些限制的话，在有些场合还有可能作出一些结论。

定属性的解

1-1 积分形式的动量方程

一般情况下，自由流速为变数时，只有利用积分形式的动量方程才能得出解来。这是一种众所周知的普通方法，把方程(2b)积分一下，得到积分形式的方程：

$$\frac{1}{2} \frac{u_1}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = \frac{\tau\theta}{\mu u_1} - \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right) \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_1}{dx} \quad (4)$$

式中

$$\theta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \frac{u}{u_1} dy$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy$$

方程(2b)在壁面上的值

$$-u_1 \frac{du_1}{dx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

这是在使用方程(4)假设的速度分布时的一个限制条件，这个速度分布得满足所有可能的边界条件或所需要的边界条件，还得满足从方程(2b)微分得出来的条件。原来的卡门-普尔豪森(Karman-Pohlhausen)速度分布就是一个例子：

$$\frac{u}{u_1} = \left[2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right] + \frac{\lambda}{6} \left[\frac{y}{\delta} - 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + 3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right]$$

从方程(5)得：

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_1}{dx}$$

或从动量厚度的估算中得当量表达式

$$k = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_1}{dx} \quad (6)$$

方程(4)的右边可以用所设的速度分布算出来，于是动量方程的积分形式变成

$$\frac{d\theta^2/\nu}{dx} = \frac{F(k)}{u_1} \quad (7)$$

这个解法是 Holstein 和 Bohlen 提出来的；Schlichting⁽¹²⁾ 对于这种算法作了详尽的叙述，并给了算例和有关各量($F(k)$ 等等)的数值。

不用多项式的速度分布，也可以用从楔型流的精确解(Hartree)得到的速度分布 [$u_1 \sim x^{\beta/2-\beta}$; $u/u_1 = f_z(z)$]，这里面与壁面垂直的距离和 z 的关系是 $z = \frac{y}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{u_1}{\nu x}}$ ，从而

$$z_i = \frac{\theta}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{u_1}{\nu x}} \text{ 等等。}$$

于是方程(5)就给出形状参数：

$$\beta z_i^2 = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_1}{dx} \quad (6)$$

而方程(4)变成

$$\frac{d\theta^2/\nu}{dx} = \frac{F(\beta z_i^2)}{u_1} \quad (7)$$

图1表示方程(7)中的函数 $F(\beta z_i^2)$ 和这些速度分布,图2给出 z_i 、 β 和 f_{zz} (即壁面上一级化的速度梯度)的值。

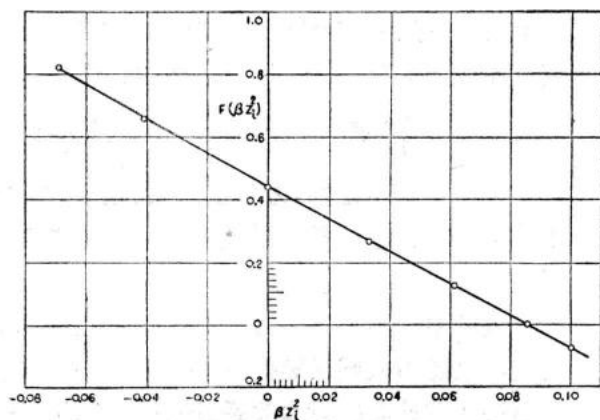


图1 楔型流速度分布之函数 βz_i^2

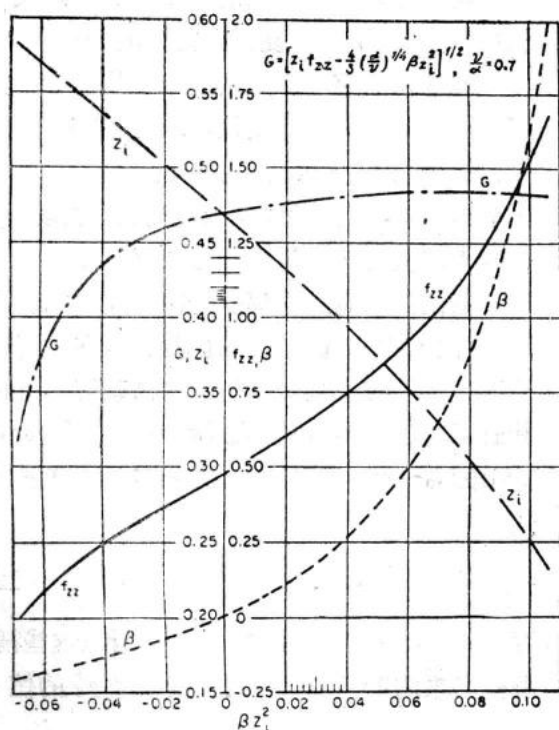


图2 与楔型流速度分布有关的一些物理量

解方程(7)所需要的动量厚度的初始值可

以是零,也可以是因有驻点流而为一定值,如果是零的话,方程(7)在流动发展的初始阶段是很难做准确计算的。由于起始的流动通常总是接近于楔型流的,所以通常总可以从自由流速和距离的对数图线上定出一个合适的 β 值来。有了形状参数之后,动量厚度就决定了:

$$\theta = z_i \sqrt{2 - \beta} \sqrt{\frac{\nu x}{u_1}}$$

在楔型流近似不能用的 x 距离上的 θ 值就是方程(7)的初始值,由这个数值开始用方程(7)继续运算到出现分离点($\tau=0$)为止。在分离点上形状参数 $k=-0.156$ 或 $\beta z_i^2=-0.069$ (见表1)。

在计算过程中,如果 $(\theta^2/\nu)(du_1/dx)$ 之值超过了对应于 $\beta=2$ 的 $\beta z_i^2=0.107$ (或 $k=0.095$),那末在发生这种情况的区域中可采用对应于这个最大 β 值的速度分布。也就是说,方程(4)中的 $\tau\theta/\mu u_1$ 和 $(2+\delta^*/\theta)$ 都是按这个最大 β 值来计算的。

方程(7)可以用普通的前向积分法(往往用等斜法)求解,或利用把函数 $F(k)$ 作线性近似的简化办法求解。例如,当 $F(k)=B-Ak=B-A(\theta^2/\nu)(du_1/dx)$ 时,(式中的 B 和 A 是常数,见表1),则方程(7)可以积分成为

$$\frac{\theta^2}{\nu} = \frac{B}{u_1^A} \int_0^x u_1^{A-1} dx \quad (\text{积分常数为零}) \quad (8)$$

通常取 x_b 与 x_e 两截面之间的流动来看较为简单,因为在这两个截面中速度与 x 几乎成线性变化,斜率为 $\Delta u_1/\Delta x$ 。这时方程(8)就变成

表1 方程(8)中使用的各常数

速度分布	形状参数	A	B
Hartree	$\beta z_i^2 = 0.107$	8.30	0.78
	$0 < \beta z_i^2 < 0.107$	5.12	0.44
	$-0.069 < \beta z_i^2 < 0$	5.32	0.44
P ₄ 多项式	$0 < k < 0.08$	6.00	0.47
	$-0.08 < k < 0$	7.06	0.47
	$-0.16 < k < -0.08$	8.90	0.31

$$\left(\frac{\theta^2}{\nu}\right)_e \left(\frac{u_{1e}}{u_{1b}}\right)^A - \left(\frac{\theta^2}{\nu}\right)_b = \frac{A/B}{\Delta u_1} \times \left[\left(\frac{u_{1e}}{u_{1b}}\right)^A - 1\right] \quad (8a)$$

决定了动量厚度之后,即可求得取多项式速度分布时的剪应力为

$$\tau = \left[\mu \frac{du}{dy} \right]_{y=0} = \frac{\mu u_1}{\theta} \left[2 + \frac{\lambda}{3} \right] \frac{\theta}{\delta}$$

Schlichting⁽¹²⁾列出了系数 $\frac{\mu u_1}{\theta}$ 对 k 的函数关系的表。

若用 Hartree 速度分布,则

$$\tau = \left[\mu \frac{du}{dy} \right]_{y=0} = \frac{\mu u_1}{\theta} f_{zz} z_i$$

式中 f_{zz} 和 z_i 的值在图 2 给出。

第 4-1 节中有说明上述用 Hartree 速度分布的计算法的算例。用多项式速度分布几乎得出完全相同的结果,只是分离通常出现较晚。Hartree 速度分布往往可以得到更准确的分离点位置。

1-2 积分形式的能量方程

说明传热特性的热能方程(2c)的解和处理动量方程的许多现有统一的而且较为可靠的方法有很大的区别。当然需要两种解,一种解是考虑绝热壁面条件之下的消耗效应的,另一种解是处理变壁面温度之下的传热量的;后一个解和前一个解加在一起应满足给定问题的边界条件。第一种解一般都是一致的;但关于无消耗形式的能量方程,则所提出的解彼此有很大差别。这里将介绍其中的一些解,最后和实验结果对比之后,作出一个选择。

当流体为楔型流,且普朗特数为 0.70 时,绝热壁温度的精确解表明,恢复系数的大小对压强梯度并不敏感。所以用于气流时,看来可以根据恢复系数(等于普朗特数开方根)来求算绝热壁面的温度。

$$r = \frac{T_r - T_1}{u_1^2 / 2c_p}, \quad r = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}} \quad (10)$$

至于第二种解,本文先回顾一下积分形式

的能量方程在略去消耗项后的几种求解办法。该方程是

$$\frac{d}{dx} (u_1 t_0 \theta_t) = \frac{q}{\rho c_p},$$

$$\text{式中} \quad \theta_t = \int_0^{\delta_t} \frac{u}{u_1} \frac{t}{t_0} dy \quad (11)$$

这里的 q 是壁面上的热流量, t 是以绝热壁面温度为基准的温度值,即 $t = T - T_r$ 。

用前一节的办法把流动的流体力学特性决定之后,速度分布 u/u_1 就完全定型了。设温度分布型为 $t/t_0 = g(y/\delta_t)$, 即得壁面上的热流量 $q = -\frac{kt_0}{\delta_t} g'(0)$ 。斜率 $g'(0)$ 当然是为所设的分布型所规定的,方程 11 中的应变数变成了 δ_t , 因为温度 t_0 是为壁面上的给定温度分布所决定的。

表 II 中列出了求解方程(11)用的几种典型假设,以说明人们已经提出的多种方法。其中以解法 3 和前面的讨论关系最直接,选了一个满足边界条件的四项式来表示温度,此式和求解动量方程中所确定的速度分布多项式一起使用。决定 δ_t 需经复杂而冗长的计算。

普朗特数等于 1 或接近于 1 的流体,其温度厚度和流体力学厚度往往取为相等(如解法 4),并且在温度多项式中多添一项,从而引入一个参数 b 。这样做就大大地简化了计算过程,这时 b 的值是按满足方程(11)来决定的。

也往往从能量方程的精确解来取温度分布,解法 1 和 2 就是这种典型例子,在这两种解法里温度分布型是从楔型流的精确解得出的,壁面温度取为幂函数,如 Levy⁽¹⁾ 和 Tifford⁽¹³⁾ 给出的 $t_0 \sim x^\gamma$ 。这时,温度分布型具有下列形式:

$$\frac{t}{t_0} = g(z, \beta, \gamma); \quad \text{故} \quad q = -kt_0 \frac{z_i}{\theta} z_i^* \quad (12)$$

图 3 所示为普朗特数等于 0.70 时从这些精确解得出来的壁面上一般的温度梯度 g'_z 的值。

* 公式 12 有错误,应改为 $q = -kt_0 \frac{z_i}{\theta} g'_z(0)$, 校者注

Levy⁽¹⁾ 也提出了求 g_z 值的一个经验表达式:

$$-g_z = 0.57 \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} (\beta + 0.205)^{0.104} \times [1 + \gamma(2 - \beta)]^{0.37 + 0.06\beta} \quad (13)$$

当 $\beta = 1.6 \quad 1.0 \quad 0 \quad -0.20$

式中的 $\lambda = 0.367 \quad 0.355 \quad 0.327 \quad 0.254$

图 3 表明这个式子在 $[1 + \gamma(2 - \beta)] > 1$ 时, 其近似结果还过得去, 但当 $[1 + \gamma(2 - \beta)] < 1$ 时, 差别就大了, 下面将要谈到在某些问题上这个差别是个很大的问题。图 4 以另一种形式来表示精确解的结果, 用的关系式是 $-g_z = \left(\frac{\nu}{\alpha} \right) z_t [1 + \gamma(2 - \beta)]$, 给出了 $(\nu/\alpha) z_t$ 对 $[1 + \gamma(2 - \beta)]$ 的函数关系。

在基于这种温度分布型的近似解中, β 的值是由流体力学的解确定的, 还有 z 和 γ 有待确定, 并在一般的意义下, z 取做 γ/θ_t , 而不

是流体力学解已经求定了的那个“ z ”。因为用方程 (11) 只能再决定一个变数, 所以得另外对连接 γ 和 θ_t 的关系作个任意规定, 或者把二者

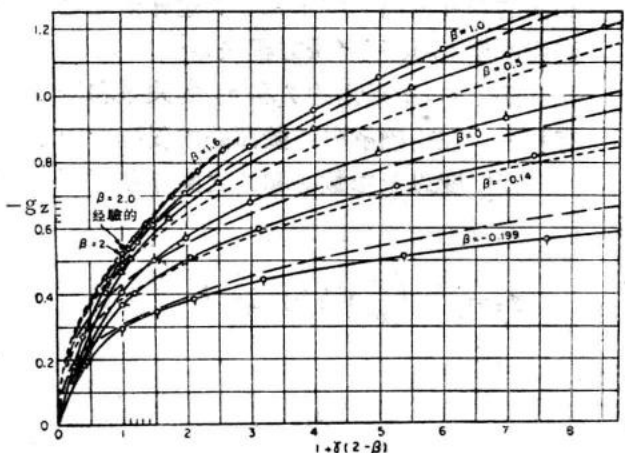


图 3 层流楔型流的壁面温度梯度。(虚线是用方程 13 求得的结果, 实线取自 Levy⁽¹⁾ 和 Tifford⁽¹³⁾ 的结果)

表 II 解方程 11 所用的典型假设

解法	温度分布型 $\frac{t}{t_0} =$	分参布型的数	相关的速度分布	温度参数关系	所得参数 (方程(11))	典型参考文献
1	$g\left(\frac{y}{\theta_t}, \beta, \gamma\right)$, 精确	θ_t, γ	$f(z, \beta)$	$-g_z = \left(\frac{\nu}{\alpha}\right) \times z_t [1 + \gamma(2 - \beta)]$	γ	本文
2	$g\left(\frac{y}{\theta_t}, \beta, \gamma\right)$, 精确	θ_t, γ	$f(z, \beta)$	$\gamma = \frac{\beta}{2 - \beta} \frac{u_1}{t_0} \frac{dt_0}{du_1}$	θ_t	Schuh ⁽¹⁴⁾
3	$1 - 2 \frac{y}{\delta_t} + 2 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^2 - \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^4$	δ_t	多项式 P_4 $f\left(\frac{y}{\delta}, k\right)$		δ_t	Kroujiline (见 Eckert 文 ⁽¹⁵⁾)
4	$\left[1 - 10 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 + 15 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^4 - 6 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^5\right] + b \left[\frac{y}{\delta_t} - 6 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 + 8 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^4 - 3 \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^5\right]$	b	多项式 P_4 $f\left(\frac{y}{\delta}, k\right)$		b	Libby ⁽¹⁶⁾
5	$g\left(\frac{y}{\theta_t}, \beta\right)$, 精确 $\gamma = 0$	θ_t	不考虑速度分布 $\beta = \frac{1}{z_t^2} \frac{\theta_t}{\nu} \frac{du_1}{dx}$		θ_t	Eckert ^{(15), (18)}
6	$g(z, \beta, \gamma)$, 精确	γ	$f(z, \beta)$	$\gamma = \frac{\beta}{2 - \beta} \frac{u_1}{t_0} \frac{dt_0}{du_1},$ $\frac{\theta_t}{\theta} = \frac{z_t}{z_i}$		Seban ⁽¹⁹⁾

中的一个和壁面上的温度条件联系起来。在方法2中, γ 的值是取楔型流的这样一点上的值, 在该点上有着预计的当地流动条件且和实际存在的相同的当地壁面温度变化。 γ 这样确定之后, 温度厚度 θ_t 便用能量方程决定。

在解法1中, 所采用的 γ 和 θ_t 的关系和精确解有联系, 在精确解中, 壁面处的斜率、一般化的温度厚度以及参数 β 和 γ 之间存在下列关系:

$$g_z = -z_t \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right) [1 + \gamma(2 - \beta)] \quad (14)$$

还有

$$\frac{\theta_t}{\theta} = \frac{z_t}{z_i}$$

假设这两个关系式在任意场合都成立。因热流量 $q = -k g_z t_0 z_i / \theta$, 故用了关系式 $\theta / \theta_t = z_i / z_t$ 之后, 能量方程(11)便给出 z_t 和 g_z 之间的一个关系式。要求这个关系在每一点上都满足方程(14), 这样就可以确定出 z_t 和 γ 来。一般说来, 能量方程得用数值解, 但当规定了热流量且找出了壁面温度后, 那结果是简单的。现以热流量为常值的情况为例, 方程(11)就变成了

$$u_1 t_0 \theta_t = \frac{q x_h}{\rho c_p} \quad (15)$$

式中 x_h 是受热长度。把方程(14)代入方程(15), 并采用求热流量 q 的关系式, 得:

$$[1 + \gamma(2 - \beta)] = \frac{u_1 \theta}{v} \frac{\theta}{x_h} \frac{1}{z_i^2} \quad (16)$$

上式左边的量是用由流体力学方程已经解得的各量来计算的; 用图3所示的精确解的结果, 或用方程(13), 由该量立即得出 g_z 。

最后还应该提到两种解法, 这两种方法虽然并不能同时满足动量方程和能量方程, 但使用简单, 且在某些场合下能得出很好的结果。在解法5中 Eckert 不考虑动量方程, 而用具有任意流中特定点上所存在的相同的厚度 θ_t 和自由流速度梯度 du_1/dx 的等温楔型流来满足能量方程。这样 β 就确定了, 随后 g_z 也确定

了。方程(11)可以写为:

$$\frac{d}{dx} (u_1 t_0 \theta_t) = - \frac{k g_z t_0}{\rho c_p} \frac{z_t}{\theta_t} \quad (17)$$

此方程可以积分。这种方法只限于研究等温壁面($\gamma=0$)。

在方法6中则把能量方程撇开不管, 而解出动量方程。参数 γ 按方法3* 决定, 使在当量楔上, 流动和当地壁温梯度与前相同。 γ 这样确定之后, 当地的热流量就是

$$q = -k t_0 g_z z_i / \theta,$$

g_z 是从图3得到的。

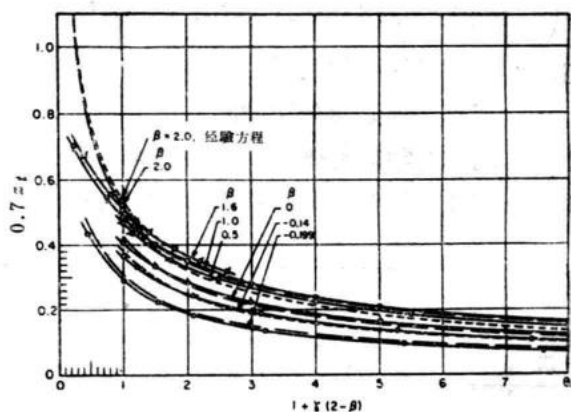


图4 层流楔型流的复合量 $z_t \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)$

1-3 Lighthill 解

Lighthill⁽²⁰⁾ 证明, 略去消耗项的话, 微分形式的能量方程(方程2c)是可以解的, 如果附面层中的速度分布型为线性式 $u = \tau y / \mu$ 。下面所得的结果合乎这种考虑。

如壁面温度给定为 $t_0 = t_0(x)$, 则在壁面上的热流量为:

$$\begin{aligned} \frac{q}{k} &= \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho}{9\mu^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{\tau(x)}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \times \\ &\times \int_0^x \left[\int_{x'}^x \sqrt{\tau(x'')} dx'' \right]^{-\frac{1}{3}} d[t_0(x')] \quad (18) \end{aligned}$$

如果壁面上的热流量给定为 $q = q(x)$, 则壁面温度是

* 原文此处有错, 应为方法2——校者注

$$t_0 = \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \left(\frac{9\mu^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{k} \int_0^x q(x') \times \\ \left[\int_{x'}^x \sqrt{\tau(x'')} dx'' \right]^{-\frac{2}{3}} dx' \quad (19)$$

利用流体力学方程的解确定的剪应力，并给定壁面温度或热流量之后，将方程(18)或(19)进行积分即可得到所需的结果。唯一的困难在于被积式 $\left[\int_{x'}^x \sqrt{\tau(x'')} dx'' \right]^{-\frac{2}{3}}$ 在 $x''=x$ 处有奇点，在这点上的函数只好适当地取近似值。

直接应用方程(18)或(19)当然会因线性的速度分布型的假设而产生很大的误差。为了使这个误差减到最小，Tifford⁽²¹⁾ 提出在上述方程中使用一个“有效剪应力”

$$\tau_{\text{有效}} = \left[\tau_{\text{实际}} + \frac{4}{3} \theta \frac{d\rho}{dx} \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \right] \times \\ \times (0.98) \left(\frac{\nu}{r}\right)^{0.02} \quad (20)$$

用了有效剪应力之后，用方程(18)计算从等温楔传出的热量和精确解所得的结果很符合。但壁面温度是变值的话，情况就不同了；表Ⅲ上的数值说明了这一点，在表上对常值速度 $\beta=0$ 的场合，所得结果确实相符，而对 $\beta=1$ 和 $\beta=1.6$ 的流动，差别就显得很显著。

表Ⅲ 普朗特数为 0.70 时 $\frac{h_{\text{方程(18)}}}{h_{\text{精确}}}$ 之值

β	$\gamma \rightarrow$	0	0.5	1	2
0		1.00	1.00	0.99	0.99
1		1.00	0.97	0.96	0.93
1.6		1.02	1.02	1.17	1.16

这里虽说把 Tifford 修正过的方程(18)和(19)的一般用法算作是 Lighthill 法，不过也应该注意到 Klein 和 Tribus⁽¹⁷⁾ 的贡献，他们对这两个方程作过进一步解释，并举出了一些算例，因而，对方程的应用起了推动作用。Bond⁽²⁹⁾ 独自推导出了 Lighthill 的某些结果，且提出了楔型流的例子，只是没有得出像方程(18)和(19)那样的概括结果来。

1-4 轴对称流

以上介绍的用于二元流的分析法，以及下面将要讲到的用于变属性的二元流的分析法，都可以通过 Mangler 变换⁽¹²⁾，用来处理轴对称的三元流，只要附面层厚度和物体尺寸相比仍然很小就行。横线上标表示当量二元流的量，这个变换是：

$$d\bar{x} = C^2 R^2 dx \quad \bar{y} = CRy \quad (21)$$

式中 R 是 x 处的半径， C 是个任意常数。

所有其他各量(除 ν 之外，而 ν 在我们现在的讨论中并不重要)都可以直接变换。于是，给出了 $u_1(x)$ 之后， $\bar{u}_1(\bar{x})$ 就可以用 $x=x(\bar{x})$ 代入而推得，同理， $t_0=t_0(\bar{x})$ 也一样可以推得，这样就可以解出这个二元流问题。剪应力 $\bar{\tau}$ 和热流量 $\bar{q}$ 就是这样决定的，然后用变换求得轴对称流的值：

$$\tau = CR\bar{\tau}, \quad q = CR\bar{q} \quad (22)$$

因定义形状参数的关系式

$$\beta z_i^2 = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_1}{dx}$$

在两种坐标系里是相同的，所以往往可以不经过变换，就简单地在三元坐标系里得出解来。Drake⁽⁴⁾ 和 Schuh⁽¹⁴⁾ 就用过这种办法。

1-5 与实验结果的比较

对上面介绍过的这类近似解法的评价决定于和已有的精确解以及实验结果的比较，精确解无法考虑的那些条件尤其需要和实验进行比较。不过关于能量方程求出的结果，总是有这样一个问题存在，即进行比较所用的温度边界条件和求解时用的有所不同，因而，已有的理论结果和实验结果的一致性也许不足以在一切场合下成为满意的论据。

在 Schlichting 所著的一书⁽¹²⁾ 中，所述的分析 and 实验的比较证明，用四项式的或 Hartree 的速度分布型能够对流体力学特性做出满意的计算来。只在减速区靠近分离点会出现差异。在这些地方应该在多项式速度分布型中另外多用几项，也有人建议过用两种参数计算法。

热力计算和精确结果的比较工作集中于

Froessling⁽²²⁾ 作的等温面的解析結果上, 他用的自由流速度分布是垂直于气流的圆柱体前段上的典型分布。因为在这一区中大部分流动仍然是典型的初始的駐点流, 所以验证的条件并不太严格, 所有的方法都得出可用的預計結果。更苛刻的条件, 即能够代表各种的流体力学特性的那些条件, 只有通过实验才能得到。

为了給决定温度附面层的各种計算方法提供更多的比較資料, 特测定了装在風洞試驗段中心的橢圆柱体和平板上的向层流附面层中傳遞的热量。用平板作实验时, 自由流速的改变是在風洞壁上加粗糙物来实现的。两种模型的加热法都是在表面上纏鍍鉻帶, 这样物面上的热流量为常数。在平板上留了一段长 0.0427 米的初始未热长度。

已提出的柱体⁽²⁾和平板⁽⁸⁾⁽⁹⁾的实验結果包括自由流速分布的确定、恢复系数和傳热系数的确定。流动是层流的話, 恢复系数和普朗特数开方根相符合, 而复合量 $\frac{hD}{k_a} \sqrt{\frac{r_a}{u_a D}}$ 可用来系統地联系傳热系数的結果, 誤差一般在 $\pm 5\%$ 之內。实验中用了很小的温度差, 唯一的重要屬性变化是当地压强。伴随而生的自由流速分布的变化, 显然已經对消了这个作用。所以在整个层流范围里, 一切場合的数据联系都是按“上游”雷诺数 $u_a D / r_a$ 做的。

在列举的参考文献中已經将实验結果与几种計算方法所得的計算結果做了一些比較, 今将其中一些結果重載于此, 以作进一步的比較。

图 5, 6, 7 是橢圆柱体在攻角为 0° , -6° 和 $+6^\circ$ 情况下的上表面的实验結果。图上載有在最低速度和最高速度时的自由流速度分布, 一条表示当地恢复系数平均值的曲线和两种实验的傳热系数。如前所述, 高速实验的各系数和低速实验的值在实验的精度以內是符合的。

图 5 中画出了按表 II 中的解法 6 所作的計算結果, 这个結果表明有很好的对应关系, 但在分离之前的中間地区, 計算出来的值偏低。根据傳热系数的突变判断出来的分离点本身,

是可以利用流体力学計算作很合适的預計的。在文献[2]里, 还在不同攻角的情况下作了比較, 也說明实验值和預計值之間存在着一致的关系。

图中还給出了解法 I 和 Lighthill 法(第 1-3 节)的計算結果。用解法 1 作計算, 其初始数据与实验数据相一致, 但是在最后, 計算数据則偏低約 20%。Schuh⁽¹⁴⁾ 也得到完全一样的經驗, 他用解法 2 求得的数据和这些数据作比較, 得出的值几乎完全和解法 I 的相当。这就使他对实验結果发生了怀疑, 虽然从所得結果的关系来看, 流动不可能是层流。

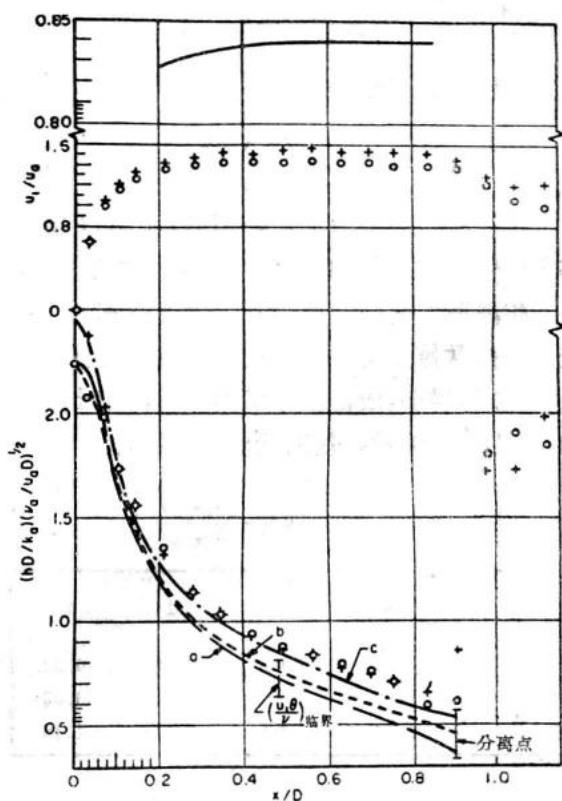


图 5 橢圆柱体在零攻角时的实验結果

图中示出了一条平均恢复系数值的曲线, 以及一条当地速度分布和复合量 $\frac{hD}{k_a} \sqrt{\frac{r_a}{u_a D}}$ 的曲线。这里的 D 是柱体的长轴, 152 毫米。

图中的数据是在下列条件下取得的:

$$0 \quad u_a = 45 \text{ 米/秒}, \quad \frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu}} = 98 \text{ 大卡/小时米}^2\text{C}$$

$$+ u_a = 135 \text{ 米/秒}, \frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu}} = 158 \text{ 大卡/小时米}^2\text{°C}$$

计算是按低速分布进行的。

a. 解法 I, 表 II

b. Lighthill 法, 第 1-3 节

c. 解法 6, 表 II [亦载于文献 2 中]

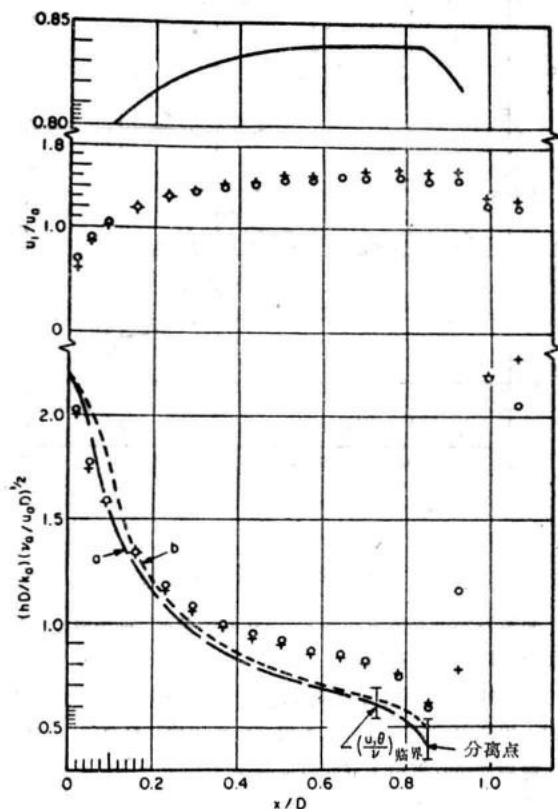


图 6 椭圆柱体在攻角为 -6° 时的实验结果

图上画的是柱体上表面的数值, 与图 5 同。此处, 前缘在 $x/D = -0.05$ 处。

图中的数据是在下列条件下取得的

$$0 \quad u_a = 68 \text{ 米/秒}, \frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu}} = 121 \text{ 大卡/小时米}^2\text{°C}$$

$$+ \quad u_a = 135 \text{ 米/秒}, \frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu}} = 160 \text{ 大卡/小时米}^2\text{°C}$$

计算是按低速分布进行的

a. 解法 I, 表 II

b. Lighthill 法, 第 1-3 节

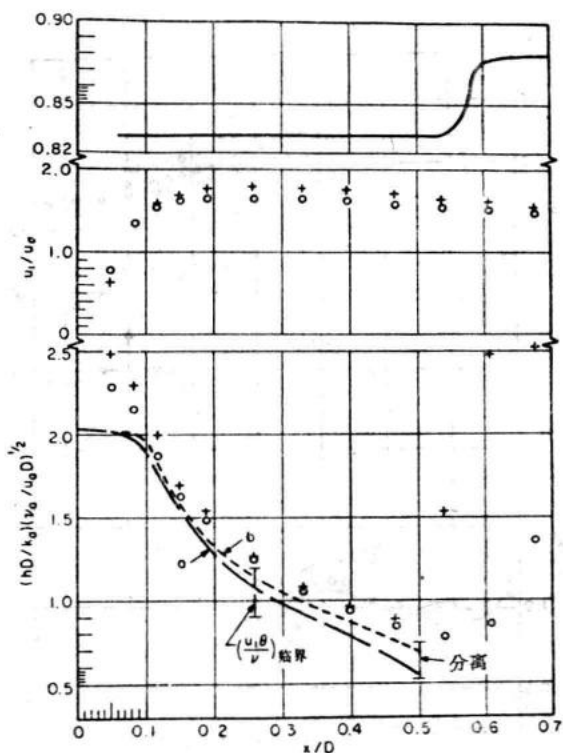


图 7 椭圆柱体在攻角为 $+6^\circ$ 时的实验结果

图上画的是柱体上表面的数值。此处前缘在 $x/D = 0.05$ 处

取得数据的条件是:

$$0 \quad u_a = 47 \text{ 米/秒}, \frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu}} = 100 \text{ 大卡/小时米}^2\text{°C}$$

$$+ \quad 135 \text{ 米/秒}, \frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu}} = 160.6 \text{ 大卡/小时米}^2\text{°C}$$

计算是按低速分布进行的

a. 解法 I, 表 II

b. Lighthill 法, 第 1-3 节

图 6 和 7 画出了用解法 I 和 Lighthill 法求得的计算结果, 曲线表明与实验结果有相似的对应关系。在驻点上, 理论和实验有些差别, 原因在于自由流速的起始斜率不确知, 但这一点对后面并没有多大关系, 后面的计算对于初始值并不很敏感。结论大致和零攻角时一样。这里用的两种算法的优缺点大致相同, 而解法 6 (这里没有写出来) 则可以给出稍微好些的结果。在两个攻角下, 都很确切地求出了分离

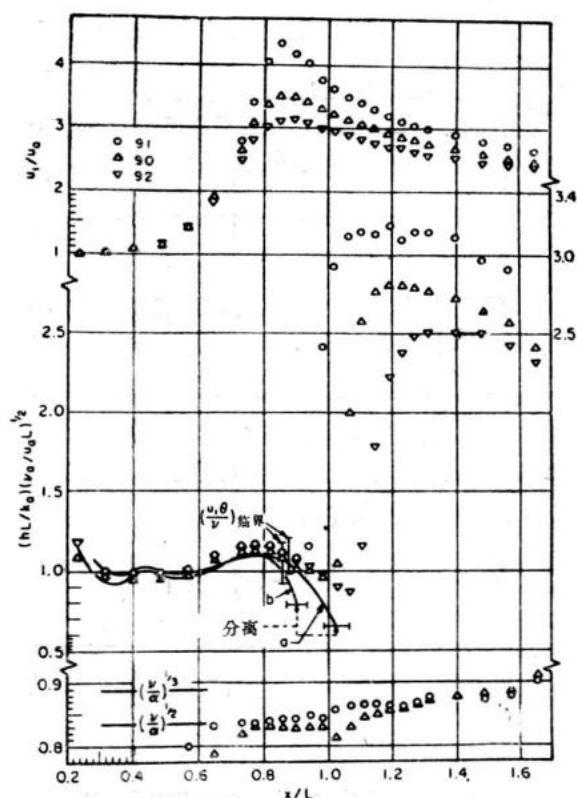


图8 自由流速为变数的平板层流

此图是文献[9]中图5的复制,表示出自由流速的分布、复合的传热量和恢复系数。未加热的起始段长度是0.0427米,板长 L 为0.3米。

曲线“a”是按第92次实验的速度分布用解法I(表II)作的计算,曲线“b”是按第91次实验的速度分布计算的,二者都用各属性的当地值,不过在第92次实验的计算里,这一点几乎没有什么影响。

下面列出速度 u_a 的值,还列了一个系数,用此数去乘纵坐标传热量即得当地的传热系数,单位为大卡/小时·米²·°C

实验次序 u_a (米/秒) $\frac{k_a}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu a}}$ (大卡/小时米²·°C)

91 66.8 83.94

90 54.6 76.13

92 27.4 54.66

点的位置。

图8是平板的结果,是按文献[9]复制的,图上表明了速度分布,恢复系数和系统整理后的传热系数。在低速实验中用皮托管详细测了气流,这就可以据此计算动量厚度,所以这些实验就可以和流体力学的计算相比较了。最初在

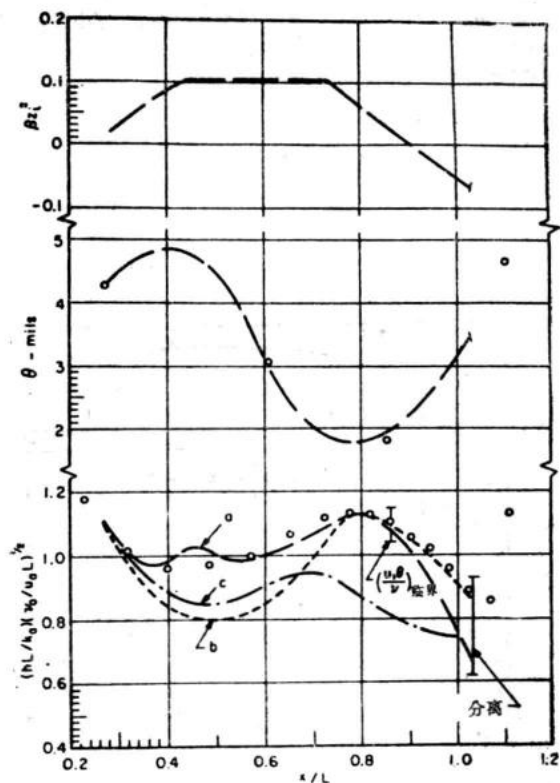


图9 平板的实验结果与计算结果的比较

这里表示的是图8中第92次实验的数据,动量厚度也是按那次实验的条件计算的。

图中的 βz_i^2 值是按得出动量厚度曲线的流体力学计算求出的。用多项式速度分布几乎得到完全相同的结果。

传热量的计算用了下列三种解法

曲线a, 解法I, 表II

b, Lighthill法, 第1-3节

c, 解法4, 表II

几乎是定值自由流速下形成的附面层,在后来受到了加速的自由流流速,这就使当地的形状参数大于驻点流的值,事实上,该参数已达到最大可能值。这样一来,形状参数就在它的整个范围内都有了,故此平板流动较之柱体上的流动具有更严格的流动条件和热力条件。

图9重画了图8中的低速实验的传热结果,表示了用Hartree速度分布型时形状参数的计算值,还作了实测的与计算的动量厚度的比较,计算所得的动量厚度是从流体力学解取得的,而流体力学解是从初始截面上实测的动量厚度

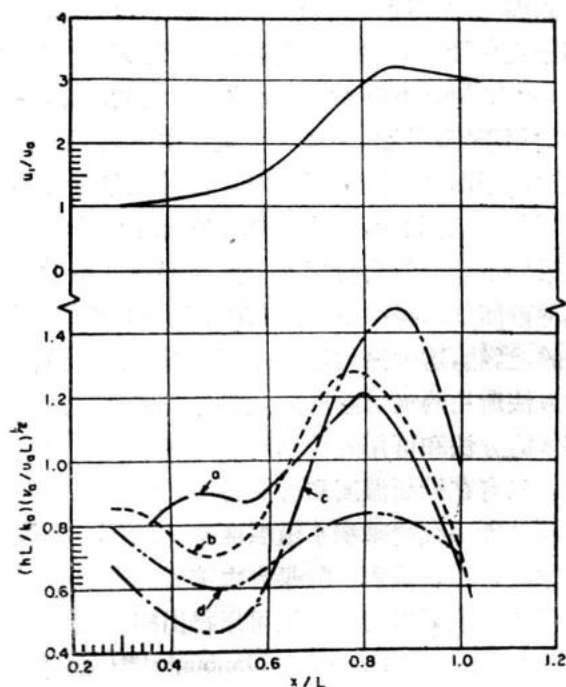


图 10 对应于平板第 92 次实验的按等温壁面条件作的计算

假设未加热的起始长度为 0.0426 米, 计算法计有:

曲线 a, 解法 I, 表 II

b, Lighthill 法, 第 1—3 节

c, 解法 6, 表 II

d, 解法 5, 表 II

开始计算的。

图 9 上画出了好几种传热系数的计算结果, 在这个问题上, 几种解法有很显著的差别。

在图 8 和图 9 上, 用解法 1 算出的结果在加速流区内和实验结果十分符合。接近分离点, 误差就逐渐增大, 到分离点上误差达 15%。因为在这个计算法中用了经验求得的 g_z 值(参看第 4-2 节和图 3), 故它在减速区中的数值是很可能偏高的。

解法 2 和 6 不能直接使用, 因为在定值的传热率下, 参数 γ 应是 $\gamma = (1 - \beta)/(2 - \beta)$, 而这个值在 $\beta = 2$ 的区域是不能适用的。

解法 3 没有用, 但用 Morris 和 Smith 法⁽²³⁾做了类似的计算。在 $x/L < 0.80$ 时所得的结果和用 Lighthill 法求得的很接近, 但在 $x/L > 0.80$ 时, 计算的结果比实验结果大得多。不过在

$x/L > 0.80$ 时计算所用的参数值是用外插法得出的, 因而使结果包含一些不确定的成分。故在此区域, 的确明显地出现很大的差别。

解法 4 先用普朗特数为 1 做了计算, 然后把结果再按普朗特数的立方根折算一下。其结果画在图 9 上, 这比解法 4 用普朗特数 0.70 算出来的更合用。

最后, 图上画出了 Lighthill 的解, 总的看来, Lighthill 解和解 1 是相等的。Lighthill 解在加速流中尽管偏低, 但在减速流中却得到十分好的结果。这情况恰好和解法 1 的相反, 二者的最大误差都是 15% 左右。

解法 5 是 Eckert 提出的, 为了介绍这种解法, 也做了等温壁面从 $x/z = 0.14$ 起的计算, 由 $x/L = 0$ 至 $x/L = 0.14$, 温度为零, 计算结果示于图 10。为便于比较, 图 10 上还画出了用解法 I 和 Lighthill 法对这个等温表面所作的计算结果。后两种解法较之图 9 符合的好些, 而 Eckert 法算出的结果较低了一些。在等温面问题上, 解法 6 中的 $\gamma = 0$, 所以解法 6 可以计算, 其结果示于图 10, 它和解法 I 及 Lighthill 法都不相符。这个等温问题还没有实验结果。

1-6 推荐的计算法

就随圆柱体所作的计算结果与实验结果的比较看来, 解法 I 和 Lighthill 法差不多, 而更为近似的解法 6 则可得出稍佳的结果。在这个问题上, 流体力学特性相当简单, 开始就是一种驻点流动, 此后形状参数作均一地下降, 所以附面层厚度也作均一地增大。由此可以预料, 表 II 中所列的其他各种可用的解法与实验都可能相当一致。

如果是变速流流过平板, 则流动条件严格得多, 形状参数先是增大, 直到最大值, 然后在最大值上停留一段后, 即迅速降为分离值。动量厚度有相当大的变化。只有解法 I 和 Lighthill 法的结果能一般地和实验相对应; 解法 I 由于用了较 1 小得多的复合数 $[1 + \gamma(2 - \beta)]$, 而受到不确定的因素的影响。用 Lighthill 法算出来的结果, 在加速区和实验结果有差别,

但总的说来对应性很好。

所以，在既有加速流又有减速流的情况下（如图9实验所遇到的情况）最好用第1-3节的方法，即经Tifford修正后的Lighthill的能量方程解法。但如流动完全是加速流的话，解法I则比Lighthill法好。

在第四章中将以图9中的计算曲线为例，详细说明这两种解法的应用。

变属性的解

1-7 精确解和近似解

若属性是变化的且壁面温度和自由流速都作任意变化的话，则2b和2c那样的积分形式的方程就得联解，而所用的速度和温度分布是假设的附面层中的速度分布型和温度分布型。Morris和Smith⁽²³⁾曾就多项式的速度分布型和温度分布型研究过这种困难的演算过程，他们用的温度附面层厚度是从能量方程的一种解法中得出来的。求温度分布用的是个六项式，其基本方法和表II中处理定属性的解法3的基本方法相似。在定属性问题上，前面已经说过了，就图9上用的条件来说，这种一般的解法并不能得到特别合适的结果。

如普朗特数为1，且温度附面层与流体动

力附面层之厚度比设为常数，则这些积分方程用于变属性的问题时，解就可能大大简化。Libby和Morduchow⁽¹⁶⁾就按这办法做计算。这法如用于定属性的问题即为表II中的解法4。此法用于图9所列的条件时，计算结果也并不特别好。尽管如此，在自由流速变化不那么苛刻的条件下，预料会得出更好的结果的。不过在那种较简单的场合下，还有较简单的算法可用的，当然，这种简化通常是靠使用了比上述两种方法所用的更为彻底的假设才得到的。这些简单的方法和可用的精确解有更密切的关系。

只有在壁面温度和普朗特数为常数以及密度与粘性系数的乘积不随温度变化的那些问题中才能得到精确解。如果自由流马赫数很低，因而消耗项可以略去，则可以得出楔型流 $u_1 \sim x^{\beta/2-\beta}$ 的解来，Brown和Donoughe⁽²⁴⁾做过普朗特数为0.70的这种解，Levy⁽⁶⁾则做出过普朗特数为0.70及1.0的这种解。如果自由流马赫数很大，则只有普朗特数为1的 $M_1 \sim s^{\beta/2-\beta}$ （式中的 $ds = u_1 \rho_1 \mu_1 dx$ ）流动才能得到解。Levy⁽⁶⁾、Cohen和Reshotko⁽²⁵⁾以及和Naganmatsu⁽³⁹⁾曾做过这种解。这些结果太多了，这里不能一一细载，不过结果的形式总是这样的：

$$M_1 \rightarrow 0$$

无消耗

$$u = u_1 f'(\eta) \quad (23)$$

$$T = T_{1g}(\eta) \quad (24)$$

$$s = \int_0^x \rho_1 \mu_1 u_1 dx$$

$$\frac{\tau}{\rho_0 u_1^2} = \frac{f''(0)}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{u_1 x}{r_0}} \quad (25)$$

$$\frac{hx}{k_0} = \left[\frac{g'(0)}{1 - \frac{T_0}{T_1}} \right] \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{u_1 x}{r_0}} \quad (26)$$

$$M_1 > 0$$

有消耗，只是 $r/\alpha=1$

$$u = u_1 f'(\eta)$$

$$T_s = T_{s1g}(\eta)$$

$$\eta = u_1 \rho_1 (2s)^{-\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{T_1}{T} dy$$

$$\frac{\tau}{\rho_0 u_1^2} = \frac{f''(0)}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{r_0}{\int_0^x u_1 dx}}$$

$$\frac{h \int_0^x u_1 dx}{k_0} = \left[\frac{g'(0)}{1 - \frac{T_0}{T_1}} \right] \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \sqrt{\frac{\int_0^x u_1 dx}{r_0}} *$$

* 原公式有误，应改为 $\frac{h_1 \int_0^x u_1 dx}{u_1 k_0} = \left[\frac{g'(0)}{1 - \frac{T_0}{T_{s1}}} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\int_0^x u_1 dx}{y_0}}$ ——校者

基本的結果是用 $f''(0)$ 和 $g'(0)/[1-T_0/T_1]$ 量表达的, 而傳热量和摩擦系数也用这些量表达的話, 如方程(25)和(26), 則其結果对于 $\rho\mu=\text{常数}$ 或 $\rho\mu=C\rho_1\mu_1$ (式中的 C 是 Chapman 常数)的情况是相同的。如果这些方程里的属性变成自由流, 那末, Chapman 常数就会在結果中出現。

若 $\beta=0$ 的話, 这时自由流速是常数, 則 $f''(0)$ 和 $g'(0)/(1-T_0/T_1)$ 都不随温度变化。在加速流中 $\beta>0$, 这两个量都随温度比 T_0/T_1 相应增减, 在减速流中 $\beta<0$, 变化恰好相反。 $f''(0)$ 的实际变化相当大, 但 $g'(0)/[1-T_0/T_1]$ 的变化却小得多, 因为在 $T_0/T_1=2$, $\beta=1$ 时, 定属性的 $g'(0)/[1-T_0/T_1]$ 值是 1.10; 而在 $T_0/T_1=0.60$, $\beta=1$ 时定属性的 $g'(0)/[1-T_0/T_1]$ 之值是 0.93。

由于努賽特—雷諾关系式对温度比不那么敏感, 这就意味着以定属性为基础的計算法即使用来計算属性有很大变化的問題, 也可以得出滿意的傳热系数結果。这一点在下面的某些实验中还要进行研究。

Levy⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 提出解积分形式的动量方程只以这些精确解为基础, 这就是說, 在解的过程中, 速度分布型以及温度分布型都是为当地的形状参数所决定的。

取

$$\theta^* = \frac{\theta}{D} \sqrt{\frac{u_a D}{\nu_a}}, \quad x^* = \frac{x}{D},$$

$$u^* = \frac{u_1}{u_a} \text{ 等等}$$

并取 $F(\beta z_i^2)$ 表示那些决定于形状参数的量, 則动量方程变成*

$$u_1^* \frac{d}{dx^*} \frac{\theta^{*2}}{\nu_1^*} = F(\beta z_i^2) + 2\beta z_i^2 \frac{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_1^2} \quad (27)$$

式中

$$\beta z_i^2 = \frac{\theta^{*2}}{\nu_1^*} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \frac{du_1^*}{dx^*} \quad (28)$$

$F(\beta z_i^2)$ 用一个綫性关系, 方程(27)的解就可以写成**

$$\frac{\theta^{*2}}{\nu_1^*} = \frac{B}{(u_1^*)^A} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right]^{(2-A)/2} \times \int_0^{x^*} (u_1^*)^{A-1} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right]^{(A-2)/2} dx^* \quad (29)$$

用于定属性的流动时, 方程(29)和方程(7)等同, 而用于变属性的低速流动时, 則方程(29)变成

$$\frac{\theta^{*2}}{\nu_1^*} = \frac{B}{(u_1^*)^A} \int_0^{x^*} (u_1^*)^{A-1} dx^* \quad (30)$$

Eckert 和 Livingood⁽¹⁸⁾ 用了普朗特数为 0.70, ($M_1 \rightarrow 0$) 的解, 把 Eckert 原来的解法(其中包括过程中的发汗冷却結果)加以推广, 他們的办法是不管动量方程, 而单用能量方程的近似解法算出傳热量。在他們那个解里

$$\beta z_i^2 = \frac{\theta_t^{*2}}{\nu_1^*} \frac{du^*}{dx^*}$$

$$\frac{d(\theta_t^{*2})/\nu_1^*}{dx^*} = F(\beta z_i^2) \quad (31)$$

最后, 厚度 θ_t 最好表为

$$\int_0^y \frac{T_0 - T}{T_0 - T_1} dy$$

这样一来, 能量方程就不必解了, 但这样得出的用于定属性的結果却和別的許多解很一致。和前面的情况一样, 这里所說的計算法也是只限于等温壁面的。

最后, 当地的剪应力可以用由方程(29)决定的动量厚度来求算, Lighthill 法(方程(18))即用了这种办法。虽然摩擦受属性变化的影响較之傳热系数所受的影响大得多, 但 Lighthill 的計算結果却給出比值 $\frac{hx}{k} \sqrt{\frac{\nu}{u_1 x}}$ 取决于 $[f''$

* 在方程(27), (28), (29)中, γ 代表定压与定容下的比热比。

** 文献(6)載有求傳热量和摩擦系数的方程, 并給出了 A , B , z_i 等的必要值。由于数量很大, 这里不予轉录。Eckert 法⁽¹⁸⁾ 也是这样的情况。