GONGCHENGSHUXUE
JIETIZHINAN

裴竹弼 主 编
姜峰泉 副主编
马忠林 主 审

工程数学解题指南

吉林教育出版社

高等学校数学参考资料

工程数学解题指南

《高等数学解题指南》续集

裴竹弼 主编

姜峰泉 副主编

马忠林 主审

吉林教育出版社

工程数学解题指南

裴竹弼　主　编
姜峰泉　副主编
马忠林　主　审

责任编辑：白　国　才　　封面设计：梁怀学

出版：吉林教育出版社　787×1092毫米开本　14125印张　插2页　312000字
1989年11月第1版　1989年11月第1次印刷
发行：吉林教育出版社　印数：1—800 册　定价：460元
印刷：四平师院印刷厂　ISBN 7—5383—0859—8／G·800

本书共分13章为下册，上册共分6章是一元微积分和常微分方程。

因此，上、下册可供高等学校以及其它各类专业生作为数学参考资料使用。

编者的话

本书是由裴竹弼编演著的《高等数学解题指南》一书（共6章内容）的续集。本书共分13章；第七章向量代数与空间解析几何；第八章多元函数微分学；第九章重积分学；第十章两个特殊函数；第十一章无穷级数；第十二章拉普拉斯变换；第十三章行列式；第十四章矩阵；第十五章概率；第十六章数理统计；第十七章线性规划；第十八章计算方法；第十九章图论等内容。有关这些内容的典型例题和综合题共有1300道。编者结合教学和企业实际把这些题一一详细解答，并且对重点题进行指导，形式多样，既有巩固性的习题，又有启发性的实际参考题，所以读者宜于参考。本书可供工科大学、大专和中专学生以及自学工程数学的同志做参考书。特别是本书结合企业，编入了工业上的实际例题。因此，还可供企业工程技术人员做参考资料用。

本书由东北师范大学教授马忠林导师主审。参加本书审稿的还有副教授张必忠、任殿升、高景文、曹晔、辛涤远以及高级讲师岳振林等同志。还有四平市轧钢厂厂长工程师于云才和工程师李莲子以及吉林省梨树县蔡家粮库主任宋玉瑛反复进行审查本书中的全部实例数据。这些审稿的同志对本书提出了许多宝贵的意见，使本书增色不少。还有本书出版受到四平师院印刷厂厂长杨俊岱为首的全厂各位同志们的大力支持，在此一并表示衷心感谢！

本书第七章由裴竹弼，第八章由李玉琴，第九章由李海龙和高歌，第十章由姜峰泉，第十一章由付艳茹，第十二章由苏雅春和顾灵玉，第十三章由孔凡令，第十四章由恽鹏伟，第十五章由宋立新，第十六章由赵秀梅，第十七章由张忱和丁艳芬，第十八章由康永海，第十九章由梁怀学等同志编写的。

最后，根据审稿者的意见，又由裴竹弼和姜峰泉执笔统一修改、整理和定稿后交付出版。

由于编者水平，加之编写时间仓促，错误和不当之处在所难免。诚望广大读者批评指正。

编　者

1989年3月

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

与平面解析几何相仿，空间解析几何也是用坐标法，把空间的点与三个有次序的数、空间的图形与方程对应起来，从而用代数方法研究空间的几何图形。是学习多元函数微积分的必不可少的知识。在工程技术上有广泛应用。

本章以向量为工具讨论空间的平面、直线、空间曲面和空间曲线。

§7—1　向量及其加减法　向量与数量的乘法

1．给定非零向量 a、b、c，作出下列各向量（略作图）

（1）$b-a$；（2）$-a-b$；（3）$2a+(1/3)b$；（4）$(1/2)a-3b$；（5）$a+b-c$；（6）$a-2b-2c$；（7）$2a+3b-(1/2)c$。

2．已知$|a|=13$，$|b|=19$，$|a+b|=24$，求$|a-b|$。答：22

3．用三角形法则验证：$(a+b)+c=a+(b+c)$。（略证）

4．说明下列各式的几何意义：（略解）

（1）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

（2）$|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$；

（3）$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$。

5．向量a和b具有怎样的特征，才能满足下列各等式：

（1）$|a+b|=|a-b|$，（2）$a/|a|=b/|b|$，

（3）$|a+b|=|a|+|b|$；（4）$|a-b|=|a|+|b|$。

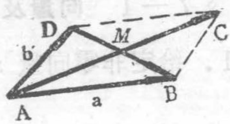
解：（1）当a与b垂直时，有$|a+b|=|a-b|$；

（2）当a与b同向时，有$a/|a|=b/|b|$；

（3）当a与b同向或相等时，有$|a+b|=|a|+|b|$。

（4）当a与b反向时，有$|a-b|=|a|+|b|$。

6．M为平行四边形 ABCD 的对角线的交点，设 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，试用a和b表示向量$\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$。



解：由于平行四边形的对角线互相平分，所以 $a+b=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA}$

即 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(a+b)$。

而 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(a+b)$。

又 $a-b=-2MD$，所以$\overrightarrow{MD}=-\dfrac{1}{2}(a-b)$。

而 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(a-b)$。

7．如果四边形对角线互相平分，则它是平行四边形。

证：设四边形顶点按顺序为A、B、C、D，其对角线交点为M。由假设

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MC},\quad \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}.$$

因此 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$

即 $|AB|=|DC|$ 且 $AB /\!/ DC$.

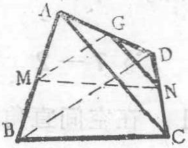
于是四边形ABCD是平行四边形。

8．设A，B，C，D是一个四面体的顶点，M、N分别是棱AB、CD的中点，证明

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

证：图示知，有 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

设G是AD的中点，则



$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GN}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$$

$$+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

9．用向量方法证明梯形两腰中点的连线平行于底边，且等于两底和的一半。

证：由上题知，设 $AD /\!/ BC$，则

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})\quad(\because\ \lambda\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC})$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda+1)\overrightarrow{BC}\quad(\frac{\lambda+1}{2}\text{是数量})$$

$\therefore$ 由两向量平行的充要条件可知，$\overrightarrow{MN}$和$\overrightarrow{BC}$（或$\overrightarrow{AD}$）平行。从而 MN//BC（或MN//AD）

又 $\because\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BC}$同向，有 $|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|)$。故线段MN等于AD 和BC 和的一半。

§7—2 空间直角坐标系 向量的坐标

1．在空间直角坐标系中作出下列各点：(略解)

A(2，0，0)；B(0，－1，2)；

C(－1，0，－2)；D(－1，2，－1)；

E(－2，－3，－2)；F(2，3，4)。

2．自点A(1，－2，3)和 $B(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和坐标轴的垂线，并写出各垂足的坐标。(略解)

3．分别求出 A(－1,2,－3)与$B(x_0, y_0, z_0)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标面为对称的点的坐标。(略解)

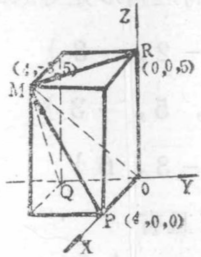
4．求点 M(4，－3，5) 到原点与各坐标轴的距离。

解：$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$$

$$|\overrightarrow{MR}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$$



5. （1）在 y 轴上找一点，使它与A(1， 2， 3)、B(0， 1， − 1) 两点等距。

解：(1)设M(0 , y , 0)，由题意有|MA| = |MB|,即

$$\sqrt{(0-1)^2+(y-2)^2+(0-3)^2}$$

$$=\sqrt{(0-0)^2+(y-1)^2+(0+1)^2}$$

解得y = 6 。故所求的点为M(0， 6， 0)

（2）在YOZ平面上找一点，使它与A(3， 1， 2)，B(4， − 2， − 2)，C(0， 5， 1)三点等距

解：设在YOZ平面上的M(0 , y， z)，，由题意有

|MA| = |MB| = |MC|　即

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$$

$$=\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2}$$

$$= \sqrt{(0-0)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

解得$y=1$，$z=-2$。故所求的点为M(0，1，-2)

6．试证以A(4，1，9)、B(10，-1，6)、C(2，4，3)为顶点的三角形是等腰直角三角形。

证：$\overrightarrow{AB} = \{6,\ -2,\ -3\}$

$\overrightarrow{BC} = \{-8,\ 5,\ -3\}$

$\overrightarrow{CA} = \{2,\ -3,\ 6\}$

即 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = 7$且有

$$\cos\angle A = \cos(\overrightarrow{AB}, \widehat{\ } \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|}$$

$$= \frac{6\times(-2)+(-2)\times 3+(-3)\times(-6)}{7\times 7}$$

$$= 0$$

就是$\angle A = 90°$，线段AB＝AC。故 △ABC 是等腰直角三角形。

7．A(1，2，-3)、B(2，-3，5) 为平行四边形的相邻二顶点，H(1，1，1) 为其对角线的交点，求其余二顶点。

答：(1，0，5)，(0，5，-3)

8．求$\overrightarrow{P_1P_2}$的模及方向余弦，已知

(1) P_1(0，0，-1)，P_2(2，5，5)；

(2) P_1(1，-3，3)，P_2(4，2，-1)。

解：（1）$\overrightarrow{P_1P_2}=\{2,5,6\}$，$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{65}$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{65}},\ \cos\beta=\frac{5}{\sqrt{65}},\ \cos\gamma=\frac{6}{\sqrt{65}}$$

（2）答：$5\sqrt{2}$，$\frac{3}{5\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

9．（1）已知 $a=\{3,-1,2\}$，起点为（2，0，－5），求其终点。（答：（5，－1，－3））

（2）已知$b=-4i+2j+5k$，且终点为（0，4，2），求其起点。（答：（4，2，－3））

10．已知$|\overrightarrow{OM}|=6$，$\alpha=45°$，$\beta=60°$求$\overrightarrow{OM}$

答：$\overrightarrow{OM}=\{3\sqrt{2},3,3\}$或$\overrightarrow{OM}=\{3\sqrt{2},3,-3\}$．

11．已知$\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma$，求向量的方向余弦。

答：$\cos\alpha=\cos\beta=0$，$\cos\gamma=-1$

或 $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=0$

12．求出与向量 $a=2i-3j+5k$ 方向一致的单位向量$a°$，并用$a°$表达a。

解：∵ $a=2i-3j+5k$

∴ $|a|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$

于是，与向量a同向的单位向量$a°$为

$$a°=\frac{a}{|a|}=\frac{2}{\sqrt{38}}i-\frac{3}{\sqrt{38}}j+\frac{5}{\sqrt{38}}k$$