

GONGCHENGSHUXUE JIETIZHINAN

裴竹弼 主 编
姜峰泉 副主编
马忠林 主 审

工程数学解题指南

吉林教育出版社

高等学校数学参考资料

工程数学解题 指南

《高等数学解题指南》续集

裴竹弼 主编

姜峰泉 副主编

马忠林 主审

吉林教育出版社

工程数学解题指南

裴竹弼 主 编
姜峰泉 副主编
马忠林 主 审

责任编辑：白 国 才

封面设计：梁怀学

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米开本 14125印张 插2页 312000字

1989年11月第1版 1989年11月第1次印刷

发行：吉林教育出版社 印数：1—800 册 定价：460元

印刷：四平师院印刷厂 ISBN 7—5383—0859—8/G·800

本书共分13章为下册，上册共分6章是一元微积分和常微分方程。

因此，上、下册可供高等学校以及其它各类专业生作为数学参考资料使用。

编 者 的 话

本书是由裴竹弼编演著的《高等数学解题指南》一书(共6章内容)的续集。本书共分13章;第七章向量代数与空间解析几何;第八章多元函数微分学;第九章重积分学;第十章两个特殊函数;第十一章无穷级数;第十二章拉普拉斯变换;第十三章行列式;第十四章矩阵;第十五章概率;第十六章数理统计;第十七章线性规划;第十八章计算方法;第十九章图论等内容。有关这些内容的典型例题和综合题共有1300道。编者结合教学和企业实际把这些题一一详细解答,并且对重点题进行指导,形式多样,既有巩固性的习题,又有启发性的实际参考题,所以读者宜于参考。本书可供工科大学、大专和中专学生以及自学工程数学的同志做参考书。特别是本书结合企业,编入了工业上的实际例题。因此,还可供企业工程技术人员做参考资料用。

本书由东北师范大学教授马忠林导师主审。参加本书审稿的还有副教授张必忠、任殿升、高景文、曹晔、辛涤远以及高级讲师岳振林等同志。还有四平市轧钢厂厂长工程师于云才和工程师李莲子以及吉林省梨树县蔡家粮库主任宋玉瑛反复进行审查本书中的全部实例数据。这些审稿的同志对本书提出了许多宝贵的意见,使本书增色不少。还有本书出版受到四平师院印刷厂厂长杨俊岱为首的全厂各位同志们的大力支持,在此一并表示衷心感谢!

本书第七章由裴竹弼，第八章由李玉琴，第九章由李海龙和高歌，第十章由姜峰泉，第十一章由付艳茹，第十二章由苏雅春和顾灵玉，第十三章由孔凡令，第十四章由恽鹏伟，第十五章由宋立新，第十六章由赵秀梅，第十七章由张忱和丁艳芬，第十八章由康永海，第十九章由梁怀学等同志编写的。

最后，根据审稿者的意见，又由裴竹弼和姜峰泉执笔统一修改、整理和定稿后交付出版。

由于编者水平，加之编写时间仓促，错误和不当之处在所难免。诚望广大读者批评指正。

编 者

1989年3月

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	(1)
§ 7—1 向量及其加减法 向量与数量的乘法.....	(1)
§ 7—2 空间直角坐标系 向量的坐标.....	(4)
§ 7—3 向量的数量积与向量积.....	(9)
§ 7—4 平面的方程.....	(16)
§ 7—5 直线的方程.....	(22)
§ 7—6 曲线的方程.....	(29)
§ 7—7 空间曲线.....	(33)
综合题.....	(36)
第八章 多元函数微分学	(57)
§ 8—1 多元函数的概念.....	(57)
§ 8—2 偏导数.....	(62)
§ 8—3 全微分.....	(69)
§ 8—4 多元复合函数的求导法则.....	(76)
§ 8—5 二元函数的极值.....	(84)
§ 8—6 最小二乘法.....	(88)
第九章 重积分学	(90)
§ 9—1 二重积分的概念和性质.....	(90)
§ 9—2 二重积分的计算方法.....	(94)
§ 9—3 三重积分的计算方法.....	(109)
§ 9—4 重积分应用举例.....	(115)
第十章 两个特殊函数	(121)

§ 01—1	Γ -函数〔伽马 (Gamma) 函数〕 (121)
§ 10—2	β -函数〔贝塔 (Beta) 函数〕 (125)
第十一章	无穷级数 (129)
§ 11—1	数项级数 (129)
§ 11—2	数项级数审敛法 (135)
§ 11—3	幂级数 (140)
§ 11—4	函数展开为幂级数 (145)
§ 11—5	幂级数的应用举例 (150)
§ 11—6	傅立叶 (Fourier) 级数 (157)
§ 11—7	周期为 $2l$ 的周期函数的傅氏级数 (166)
§ 11—8	傅氏级数的复数形式 (176)
§ 11—9	频谱图与傅立叶积分 (178)
第十二章	拉普拉斯 (Laplace) 变换 (183)
§ 12—1	拉氏变换的基本概念 (183)
§ 12—2	拉氏变换的性质 (185)
§ 12—3	拉氏变换的求法 (193)
§ 12—4	拉氏变换的应用举例 (196)
第十三章	行列式 (205)
§ 13—1	n 阶行列式 (205)
§ 13—2	解线性方程组的克莱姆 (Cramer) 法则与消去法 (214)
第十四章	矩阵 (226)
§ 14—1	矩阵的概念及其运算 (226)
§ 14—2	逆矩阵 (240)
§ 14—3	矩阵的秩与初等变换 (249)
§ 14—4	一般线性方程组 (258)

第十五章 概率	(275)
§ 15—1 随机事件.....	(275)
§ 15—2 事件的概率.....	(280)
§ 15—3 条件概率.....	(284)
§ 15—4 独立性.....	(291)
§ 15—5 离散型随机变量.....	(297)
§ 15—6 连续型随机变量.....	(302)
§ 15—7 分布函数与随机变量函数的分布.....	(307)
§ 15—8 数学期望.....	(312)
§ 15—9 方差.....	(319)
§ 15—10 二元随机变量及其分布.....	(324)
第十六章 数理统计	(334)
§ 16—1 样本与分布的近似求法.....	(334)
§ 16—2 期望与方差的点的估计.....	(337)
§ 16—3 期望与方差的置信区间.....	(342)
§ 16—4 假设检验.....	(345)
§ 16—5 一元线性回归.....	(356)
第十七章 线性规划	(362)
§ 17—1 线性不等式(组)的解域.....	(362)
§ 17—2 线性规划的基本问题.....	(366)
§ 17—3 单纯形法.....	(373)
§ 17—4 运输问题.....	(384)
第十八章 计算方法	(390)
§ 18—1 方程的近似解法.....	(390)
§ 18—2 插值法.....	(398)
§ 18—3 定积分的近似计算.....	(405)

§ 18—4 用蒙特——卡罗 (Monte—Carlo)

法计算定积分和重积分……………(406)

§ 18—5 微分方程的数值解法……………(415)

§ 18—6 皮卡 (Picard) 逐次逼近法……………(421)

§ 18—7 处理试验数据的方法……………(425)

第十九章 图论……………(435)

§ 19—1 图与子图……………(435)

§ 19—2 树……………(438)

§ 19—3 最短通路与最小树……………(440)

第七章 向量代数与空间解析几何

与平面解析几何相仿，空间解析几何也是用坐标法，把空间的点与三个有次序的数、空间的图形与方程对应起来，从而用代数方法研究空间的几何图形。是学习多元函数微积分的必不可少的知识。在工程技术上有广泛应用。

本章以向量为工具讨论空间的平面、直线、空间曲面和空间曲线。

§ 7-1 向量及其加减法 向量与数量的乘法

1. 给定非零向量 a 、 b 、 c ，作出下列各向量（略作图）

- (1) $b - a$; (2) $-a - b$; (3) $2a + (1/3)b$;
(4) $(1/2)a - 3b$; (5) $a + b - c$; (6) $a - 2b - 2c$;
(7) $2a + 3b - (1/2)c$ 。

2. 已知 $|a| = 13$, $|b| = 19$, $|a + b| = 24$,
求 $|a - b|$ 。 答：22

3. 用三角形法则验证： $(a + b) + c = a + (b + c)$ 。
(略证)

4. 说明下列各式的几何意义：（略解）

(1) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

(2) $|a - b| \geq \left| |a| - |b| \right|$;

$$(3) \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b.$$

5. 向量 a 和 b 具有怎样的特征, 才能满足下列各等式:

$$(1) |a+b| = |a-b|; \quad (2) a/|a| = b/|b|;$$

$$(3) |a+b| = |a| + |b|; \quad (4) |a-b| = |a| + |b|.$$

解: (1) 当 a 与 b 垂直时, 有 $|a+b| = |a-b|$;

(2) 当 a 与 b 同向时, 有 $a/|a| = b/|b|$;

(3) 当 a 与 b 同向或相等时, 有 $|a+b| = |a| + |b|$ 。

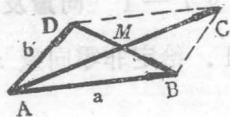
(4) 当 a 与 b 反向时, 有 $|a-b| = |a| + |b|$ 。

6. M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点, 设

$\vec{AB} = a$, $\vec{AD} = b$, 试用 a 和 b 表示向量 \vec{AM} , \vec{MB} , \vec{MC} 和 \vec{MD} 。

解: 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以 $a+b =$

$$2\vec{AM} = -2\vec{MA}$$



$$\text{即 } \vec{MA} = -\frac{1}{2}(a+b).$$

$$\text{而 } \vec{MC} = -\vec{MA}, \text{ 所以 } \vec{MC} = \frac{1}{2}(a+b).$$

$$\text{又 } a-b = -2\vec{MD}, \text{ 所以 } \vec{MD} = -\frac{1}{2}(a-b).$$

$$\text{而 } \vec{MB} = -\vec{MD}, \text{ 所以 } \vec{MB} = \frac{1}{2}(a-b).$$

7. 如果四边形对角线互相平分, 则它是平行四边形。

证: 设四边形顶点按顺序为 A, B, C, D , 其对角线交点为 M 。由假设

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}.$$

因此 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}$

即 $|AB| = |DC|$ 且 $AB \parallel DC$.

于是四边形ABCD是平行四边形。

8. 设A, B, C, D是一个四面体的顶点, M, N分别是棱AB、CD的中点, 证明

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

证: 图示知, 有 $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$

设G是AD的中点, 则

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GN}$$

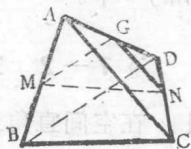
$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$$

$$+ \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$



9. 用向量方法证明梯形两腰中点的连线平行于底边, 且等于两底和的一半。

证: 由上题知, 设 $AD \parallel BC$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \quad (\because \lambda \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2} (\lambda + 1) \overrightarrow{BC} \quad \left(\frac{\lambda + 1}{2} \text{是数量} \right)\end{aligned}$$

\therefore 由两向量平行的充要条件可知, \overrightarrow{MN} 和 \overrightarrow{BC} (或 \overrightarrow{AD}) 平行。从而 $MN \parallel BC$ (或 $MN \parallel AD$)

又 $\because \overrightarrow{AD}$ 和 \overrightarrow{BC} 同向, 有 $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} (|\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|)$ 。故线段 MN 等于 AD 和 BC 和的一半。

§ 7-2 空间直角坐标系 向量的坐标

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点: (略解)

$$A(2, 0, 0); B(0, -1, 2);$$

$$C(-1, 0, -2); D(-1, 2, -1);$$

$$E(-2, -3, -2); F(2, 3, 4)。$$

2. 自点 $A(1, -2, 3)$ 和 $B(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和坐标轴的垂线, 并写出各垂足的坐标。(略解)

3. 分别求出 $A(-1, 2, -3)$ 与 $B(x_0, y_0, z_0)$ 关于原点、三个坐标轴、三个坐标面为对称的点的坐标。(略解)

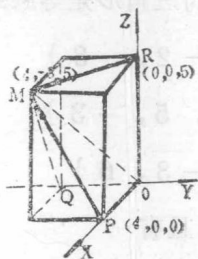
4. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到原点与各坐标轴的距离。

$$\text{解: } |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

$$|\overrightarrow{MQ}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

$$|\overrightarrow{MR}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$



5. (1) 在 y 轴上找一点, 使它与 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(0, 1, -1)$ 两点等距。

解: (1) 设 $M(0, y, 0)$, 由题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0-1)^2 + (y-2)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{(0-0)^2 + (y-1)^2 + (0+1)^2} \end{aligned}$$

解得 $y = 6$ 。故所求的点为 $M(0, 6, 0)$

(2) 在 YOZ 平面上找一点, 使它与 $A(3, 1, 2)$ 、 $B(4, -2, -2)$ 、 $C(0, 5, 1)$ 三点等距

解: 设在 YOZ 平面上的 $M(0, y, z)$, 由题意有

$$|MA| = |MB| = |MC| \quad \text{即}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} \\ &= \sqrt{(0-4)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(0-0)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2}$$

解得 $y=1, z=-2$ 。故所求的点为 $M(0, 1, -2)$

6. 试证以 $A(4, 1, 9)$ 、 $B(10, -1, 6)$ 、 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

$$\text{证: } \overrightarrow{AB} = \{6, -2, -3\}$$

$$\overrightarrow{BC} = \{-8, 5, -3\}$$

$$\overrightarrow{CA} = \{2, -3, 6\}$$

即 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = 7$ 且有

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} \\ &= \frac{6 \times (-2) + (-2) \times 3 + (-3) \times (-6)}{7 \times 7} \\ &= 0 \end{aligned}$$

就是 $\angle A = 90^\circ$ ，线段 $AB = AC$ 。故 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。

7. $A(1, 2, -3)$ 、 $B(2, -3, 5)$ 为平行四边形的相邻二顶点， $H(1, 1, 1)$ 为其对角线的交点，求其余二顶点。

答: $(1, 0, 5)$ 、 $(0, 5, -3)$

8. 求 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模及方向余弦，已知

$$(1) P_1(0, 0, -1), P_2(2, 5, 5);$$

$$(2) P_1(1, -3, 3), P_2(4, 2, -1)。$$

解: (1) $\overrightarrow{P_1P_2} = \{2, 5, 6\}$, $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{65}$
 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{65}}$, $\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{65}}$, $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{65}}$

(2) 答: $5\sqrt{2}$, $\frac{3}{5\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$

9. (1) 已知 $a = \{3, -1, 2\}$, 起点为 $(2, 0, -5)$, 求其终点。(答: $(5, -1, -3)$)

(2) 已知 $b = -4i + 2j + 5k$, 且终点为 $(0, 4, 2)$, 求其起点。(答: $(4, 2, -3)$)

10. 已知 $|\overrightarrow{OM}| = 6$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ 求 \overrightarrow{OM}

答: $\overrightarrow{OM} = \{3\sqrt{2}, 3, 3\}$ 或 $\overrightarrow{OM} = \{3\sqrt{2}, 3, -3\}$.

11. 已知 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\gamma$, 求向量的方向余弦。

答: $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = -1$

或 $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = 0$

12. 求出与向量 $a = 2i - 3j + 5k$ 方向一致的单位向量 a° , 并用 a° 表达 a 。

解: $\because a = 2i - 3j + 5k$

$$\therefore |a| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

于是, 与向量 a 同向的单位向量 a° 为

$$a^\circ = \frac{a}{|a|} = \frac{2}{\sqrt{38}}i - \frac{3}{\sqrt{38}}j + \frac{5}{\sqrt{38}}k$$