高等学校理工类课程学习辅导丛书

全国教育科学"十一五"规划课题研究成果

大学物理学习题分析与解答

吴泽华　陈小凤　主编
胡　昉　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校理工类课程学习辅导丛书

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

大学物理学习题分析与解答

Daxue Wulixue Xiti Fenxi yu Jieda

吴泽华　陈小凤　主编

胡　昉　副主编

白　磊　王子煜　张秋兰　舒华兵　参编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书是与吴泽华、陈小凤主编的《大学物理学》配套的教学辅导书，是全国教育科学“十一五”规划课题研究成果。主教材是供应用型本科院校、少学时的“大学物理”课程使用的教材。本书按章节顺序对主教材中的习题给出了相应解答，并对每章的基本概念和公式作了简要的梳理，以帮助学生全面系统地理解主教材的内容，巩固所学知识。

本书可供以《大学物理学》或同类教材作为主要授课教材的师生使用，也可供其他读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习题分析与解答 / 吴泽华，陈小凤主编. --北京：高等教育出版社，2012. 11

ISBN 978-7-04-035880-3

Ⅰ.①大… Ⅱ.①吴… ②陈… Ⅲ.①物理学-高等学校-题解 Ⅳ.①O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 181478 号

策划编辑 程福平　责任编辑 程福平　封面设计 张 楠　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　责任校对 胡晓琪　责任印制 田 甜

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京铭成印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 12.25
字　　数 220 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2012 年 11 月第 1 版
印　　次 2012 年 11 月第 1 次印刷
定　　价 19.70 元

物 料 号 35880-00

前　　言

《大学物理学习题分析与解答》是与吴泽华、陈小凤主编的《大学物理学》配套的教学辅导书，是全国教育科学“十一五”规划课题研究成果，主教材是供应用型本科院校、少学时的“大学物理”课程使用的教材。

编写这本题解，是为了帮助读者进一步掌握“大学物理”的基本概念、基本定理和基本定律，并正确灵活地应用于实际，提高分析问题和求解问题的能力。在“题解”示例中，强调正确、规范的解题方法，在理解物理过程并进行定性分析的基础上，依据基本定理、基本定律列式。我们特别注意帮助读者建立起良好的学习习惯，避免乱套公式，拼凑答案。为了突出重点，解题过程中的运算过程从简。

本书在每章开头都简要地列出了基本概念和基本公式，便于读者复习和回顾。

本书由吴泽华、陈小凤担任主编，胡昉担任副主编，主教材上册（力学、振动与波动、热学）的习题主要由陈小凤编写，下册（电学、光学、相对论、量子物理学）的习题主要由吴泽华负责编写。胡方编写了第6、第7、第8、第9、第10、第11、第12章，张秋兰参编了第12章，白磊、王子煜、舒华兵参加编写了第1、第2、第3、第4、第5章部分题解。胡方制作了第6、第7、第8、第9、第10、第11、第12章插图。全书由吴泽华统稿并定稿。

编　者

2012年2月

目　　录

第 1 章　质点运动学

一、基本概念和基本公式

1. 描述物体运动的物理量

(1) 位置矢量

位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示任意时刻质点在空间的位置. 在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示 x,y,z 三个坐标轴方向的单位矢量,$x(t)$,$y(t)$,$z(t)$ 分别为 t 时刻质点在 x,y,z 轴上的坐标.

(2) 位移　路程

质点运动时,其位置的变化用位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示. 质点由位置 A(位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$)运动到位置 B(位置矢量 $\boldsymbol{r}_2$)的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

在直角坐标系中,位移可表示为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$$

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

(3) 速度　速率

瞬时速度的定义为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中,瞬时速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} + v_z(t)\boldsymbol{k}$$

瞬时速度的大小为 $|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$. 在直角坐标系中可表示为

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

瞬时速度的方向表示质点前进的方向.

瞬时速率的定义为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

式中 s 为质点运动的路程.

(4) 加速度

瞬时加速度的定义为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中,加速度可表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

2. 运动学第二类问题的求解

运动学第二类问题是指,已知 $t=0$ 时物体的位置 r_0 和速度 v_0,求解质点的运动方程.

根据 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$,解得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$$

再根据 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,解得

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{r}_0 + \int_0^t (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t)\,\mathrm{d}t$$

对于匀加速直线运动,已知初始条件为:$t_0 = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$,则上述积分的结果为

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

3. 圆周运动

(1) 圆周运动的角量描述　角速度　角加速度

角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

(2) 切向加速度　法向加速度

质点做圆周运动时,加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{e}_\mathrm{t})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}=a_\mathrm{t}\boldsymbol{e}_\mathrm{t}+a_\mathrm{n}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$$

式中 $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ 为圆周运动中任意点处切线方向的单位矢量,a_t 为切向加速度的大小;$\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ 为圆周运动中任意点处法线方向的单位矢量,a_n 为法向加速度的大小.

切向加速度的方向在运动轨道的切线方向,切向加速度的大小可表示为

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha$$

法向加速度的方向在运动轨道的法线方向,法向加速度的大小可表示为

$$a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_\mathrm{t}^2+a_\mathrm{n}^2}=R\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$

(3) 角量与线量的关系

速率与角速度的关系

$$v=R\omega$$

切向加速度 a_t 与角速度、角加速度的关系

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha$$

法向加速度 a_n 与角速度的关系

$$a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

加速度 a 与角速度、角加速度的关系

$$a=R\sqrt{\omega^4+\alpha^2}$$

4. 伽利略变换

设 S 系为静止参考系,S′系为运动参考系.伽利略位移变换可表示为

$$\boldsymbol{r}_{AO}=\boldsymbol{r}'_{AO'}+\boldsymbol{r}_{O'O}$$

式中 $\boldsymbol{r}_{AO}$ 为 S 系中质点 A 的位置矢量,$\boldsymbol{r}'_{AO'}$ 为 S′系中质点 A 的位置矢量.$\boldsymbol{r}_{O'O}$ 为 S′系的坐标原点在 S 系中的位置矢量.

伽利略速度变换可表示为

$$\boldsymbol{v}_{AO}=\boldsymbol{v}'_{AO'}+\boldsymbol{v}_{O'O}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{AO}$ 为质点 A 相对于 S 系的运动速度,$\boldsymbol{v}'_{AO'}$ 为质点 A 相对于 S′系的运动速度,$\boldsymbol{v}_{O'O}$ 为 S′系相对于 S 系的运动速度.

伽利略加速度变换可表示为

$$\boldsymbol{a}_{AO} = \boldsymbol{a}'_{AO'} + \boldsymbol{a}_{O'O}$$

式中 $\boldsymbol{a}_{AO}$ 为质点 A 相对于 S 系的运动速度，$\boldsymbol{a}'_{AO'}$ 为质点 A 相对于 S′系的运动速度，$\boldsymbol{a}_{O'O}$ 为 S′系相对于 S 系的运动速度.

二、习题解答

1－1 一质点在平面上运动，其坐标由下式给出：$x = 3.0t - 4.0t^2$，$y = -6.0t^2 + t^3$，其中 x 以 m 为单位，t 以 s 为单位. 求：(1) 在 $t = 3.0$ s 时质点的位置矢量；(2) 从 $t = 0$ 到 $t = 3.0$ s 时质点的位移；(3) 前 3.0 s 内质点的平均速度；(4) 在 $t = 3.0$ s 时质点的瞬时速度；(5) 前 3.0 s 内质点的平均加速度；(6) 在 $t = 3.0$ s 时质点的瞬时加速度.

解 (1) 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = [(3.0t - 4.0t^2)\boldsymbol{i} + (-6.0t^2 + t^3)\boldsymbol{j}]$$

将 $t = 3.0$ s 代入，得 $t = 3.0$ s 时质点的位置矢量

$$\boldsymbol{r}\Big|_{t=3.0\ \mathrm{s}} = -27(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

(2) 从 $t = 0$ 到 $t = 3.0$ s 时质点的位移

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0 = -27(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

(3) 前 3.0 s 内质点的平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0}{3.0\ \mathrm{s} - 0} = -(9.0\boldsymbol{i} + 9.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

(4) $t = 3.0$ s 时质点的瞬时速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=3.0\ \mathrm{s}} = -(21.0\boldsymbol{i} + 9.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

(5) 前 3.0 s 内质点的平均加速度

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_0}{3.0\ \mathrm{s} - 0} = -(8.0\boldsymbol{i} + 3.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$$

(6) $t = 3.0$ s 时质点的瞬时加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=3.0\ \mathrm{s}} = -(8.0\boldsymbol{i} - 6.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$$

1－2 某物体的速度为 $\boldsymbol{v}_0 = (125\boldsymbol{i} + 25\boldsymbol{j})$，3.0 s 后它的速度为 $\boldsymbol{v} = 100\boldsymbol{i} - 75\boldsymbol{j}$，其中 $\boldsymbol{v}$ 以 m/s 为单位，在这段时间内它的平均加速度是多少？

解 根据平均加速度的定义

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_0}{3.0\ \mathrm{s} - 0} = -(8.33\boldsymbol{i} + 33.3\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$$

1－3　质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+4t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$，其中 $\boldsymbol{r}$ 以 m 为单位，t 以 s 为单位. 请写出：(1) 其速度作为时间的函数；(2) 加速度作为时间的函数；(3) 质点的轨道方程.

解　(1) 质点的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(8t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\ \mathrm{m/s}$$

(2) 质点的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=8\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

(3) 质点运动的轨道方程

$$x=1\ \mathrm{m},\quad y=4z^2$$

1－4　质点的运动方程为 $x=2.0t, y=2.0-t^2$，其中 x, y 以 m 为单位，t 以 s 为单位. 求：(1) 质点的运动轨迹；(2) 从 $t=0$ 到 $t=2.0$ s 时间间隔内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 及位矢的径向增量.

解　(1) 从运动方程中消去 t 得运动轨道方程

$$y=2.0-0.25x^2$$

(2) 根据 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2.0t\boldsymbol{i}+(2.0-t^2)\boldsymbol{j}$，从 $t=0$ 到 $t=2.0$ s 时间间隔内质点的位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0=(4.0\boldsymbol{i}-4.0\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

从 $t=0$ 到 $t=2.0$ s 位矢的径向增量

$$\Delta r=|r_2|-|r_0|=2.5\ \mathrm{m}$$

1－5　一质点做平面运动，已知其运动方程为 $x=3\cos \pi t, y=\sin \pi t$，其中 x, y 以 m 为单位，t 以 s 为单位. 试求：(1) 运动方程的矢量表示式；(2) 质点的轨道方程；(3) 质点的速度与加速度.

解　(1) 运动方程的矢量表示式

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=3\boldsymbol{i}\cos \pi t+\boldsymbol{j}\sin \pi t$$

(2) 已知运动方程 $x=3\cos \pi t, y=\sin \pi t$，消 t 得质点运动的轨道方程

$$\frac{x^2}{9}+y^2=1$$

(3) 质点的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\pi(-3\boldsymbol{i}\sin \pi t+\boldsymbol{j}\cos \pi t)$$

质点的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\pi^2(3\boldsymbol{i}\cos \pi t+\boldsymbol{j}\sin \pi t)$$

1-6 质点的运动方程为 $x=12t-6t^2$,其中 x 以 m 为单位,t 以 s 为单位.求:(1) 质点速度和加速度与时间的关系;(2) 质点通过坐标原点时的速度;(3) 质点速度为零时的位置.

解 (1) 质点速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12-12t$$

质点的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-12\ \mathrm{m/s^2}$$

(2) 质点通过坐标原点的时间有两个:$t=0$ 和 $t=2.0$ s,此时质点速度分别为

$$v=12\ \mathrm{m/s},\quad v=-12\ \mathrm{m/s}$$

(3) 把 $v=0$ 代入运动方程和速度方程,得质点速度为零的时间和位置分别为

$$t=1.0\ \mathrm{s},\quad x=6.0\ \mathrm{m}$$

1-7 一物体沿直线运动,其速度和时间的关系为 $v=0.1+0.02t^2$,其中 v 以 m/s 为单位,t 以 s 为单位.当 $t=0$ 时,物体在坐标原点右方 0.2 m 处.求:(1) $t=0$ 和 $t=2.0$ s 末时物体的加速度;(2) $t=0$ 和 $t=2.0$ s 末时物体的位置;(3) 物体是否做匀加速直线运动?

解 物体的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0.04t$$

(1) $t=0$ 和 $t=2.0$ s 末物体的加速度分别为

$$a=0,\quad a=0.08\ \mathrm{m/s^2}$$

(2) 根据 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,有 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$,积分 $\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$ 得位移随时间变化方程

$$x=x_0+0.1t+\frac{0.02}{3}t^3$$

其中 $x_0=0.2$ m.故 $t=2.0$ s 时物体的位置

$$x=0.45\ \mathrm{m}$$

(3) 物体的加速度是时间的函数,所以物体并非做匀加速直线运动.

1-8 物体沿直线运动,其加速度和时间的关系为 $a=4-t^2$,其中 a 以m/s² 为单位,t 以 s 为单位.已知 $t=3.0$ s 时,该质点的速度为 $v=2.0$ m/s,坐标 $x=9.0$ m,求质点的运动方程.

解 这是运动学第二类问题.用积分法

$$\int_{2.0}^{v}\mathrm{d}v = \int_{3.0}^{t}a\mathrm{d}t = \int_{3.0}^{t}(4 - t^2)\mathrm{d}t$$

即得质点的速度

$$v = -1 + 4t - \frac{1}{3}t^3$$

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,再积分一次

$$\int_{9.0}^{x}\mathrm{d}x = \int_{3.0}^{t}v\mathrm{d}t = \int_{3.0}^{t}\left(-1 + 4t - \frac{1}{3}t^3\right)\mathrm{d}t$$

即得质点的运动方程

$$x = 0.75 - t + 2t^2 - \frac{1}{12}t^4$$

1－9　物体沿直线运动，其加速度和速度的关系为 $a=-bv^2$,已知 $t=0$ 时，$x=0$,$v=v_0$. 求该物体在任意时刻的速度和物体的运动方程.

解　已知加速度 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-bv^2$,分离变量,并积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\int_{0}^{t}b\mathrm{d}t$$

得,物体的速度

$$v = \frac{v_0}{bv_0t + 1}$$

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,再积分

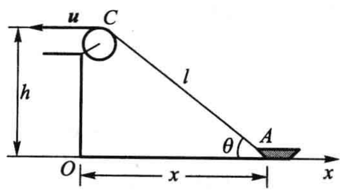
$$\int_{0}^{x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{t}v\mathrm{d}t = \int_{0}^{t}\frac{v_0}{bv_0t + 1}\mathrm{d}t$$

得物体的运动方程

$$x = \frac{1}{b}\ln(1 + bv_0t)$$

***1－10**　在离水面高为 h 的河岸上,有人通过定滑轮用恒定的速率 u 拉绳子使小船靠岸. 当小船与河岸的水平距离为 x 时,小船速度和加速度的大小各为多少?

解　(1) 建立如图所示坐标系. 设船 t 时刻位于 A 处,速度为 v. 绳长为 l,船离岸上 O 点的距离 x. 定滑轮距离地面的高度为 h. 由于人拉绳,船前进时 l、x 和 θ 都在变化. 由图中几何关系,在 $\triangle ACO$ 中,有



题 1－10 图

$$l^2 = h^2 + x^2$$

将上式两边对 t 求导,得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

其中$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=u$ 为绳速,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v$ 为船速.解得

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}u = u\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}$$

可见:① 船速 v 大于人收绳的速度 u(为什么?).

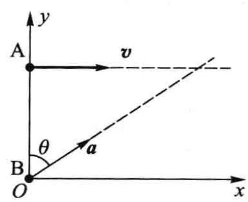
② 随着船离岸的距离 x 的减小,船速 v 越来越快.

(2) 小船的加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}\right) = -\frac{h^2}{x^3}u^2$$

负号表示加速度 a 的方向与 x 轴的正方向相反.

***1－11** 质点 A 以恒定的速率 $v=3.0\ \mathrm{m/s}$ 沿直线 $y=30.0\ \mathrm{m}$ 朝 x 轴正方向运动.在质点 A 通过 y 轴的瞬间,质点 B 以恒定的加速度从坐标原点出发,已知加速度 $a=0.40\ \mathrm{m/s^2}$,其初速度为零.试求:欲使这两个质点相遇,$\boldsymbol{a}$ 与 y 轴的夹角 θ 应为多大?



题 1－11 图

解 质点 A 做匀速直线运动,且 $t=0$ 时

$$x_{A0} = 0,\quad y_{A0} = 30.0\ \mathrm{m}$$

由 $v=3.0\ \mathrm{m/s}$,得质点 A 的运动方程

$$x_A = vt = 3.0t,\quad y_A = y_{A0} = 30.0\ \mathrm{m}$$

质点 B 做匀加速直线运动,已知其加速度 $a=0.40\ \mathrm{m/s^2}$.且 $t=0$ 时,$y_{B0}=0$,$v_{B0}=0$,故质点 B 的运动方程

$$x_B = \frac{1}{2}a_x t^2 = 0.20\sin\theta\cdot t^2$$

$$y_B = \frac{1}{2}a_y t^2 = 0.20\cos\theta\cdot t^2$$

两质点相遇时应满足

$$x_A = x_B,\quad y_A = y_B$$

即

$$3.0t = 0.20\sin\theta\cdot t^2,\quad 30.0 = 0.20\cos\theta\cdot t^2$$

解得 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴的夹角

$$\theta = 60^\circ$$

1 -12　子弹以初速度 $v_0 = 200\ \mathrm{m/s}$ 发射，初速度与水平方向的夹角为 $60°$. 求：(1) 子弹位于轨道最高点处时的速度和加速度；(2) 轨道最高点处的曲率半径.

解　(1) 在轨道最高点处，子弹速度的方向沿轨道切线方向，即水平方向. 速度的大小为

$$v = v_0 \cos 60° = 100\ \mathrm{m/s}$$

子弹在最高点处加速度的方向指向地心，加速度的大小为 $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$.

(2) 在轨道最高点处，子弹加速度方向就是轨道的法线方向. 根据 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，得最高点处轨道的曲率半径

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \approx 1.02 \times 10^3\ \mathrm{m}$$

1 -13　飞机以 100 m/s 的速度沿水平直线飞行，在距离地面 100 m 高处，驾驶员要将救灾物资投放到前方预定地点. 求：(1) 此时目标应在飞机下前方多远？(2) 物品投出 2.0 s 后的切向加速度和法向加速度各为多少？（提示：任意时刻物品的速度与水平轴的夹角 $\theta = \arctan \dfrac{gt}{v}$.）

解　(1) 以飞机前进方向为 x 轴正方向，竖直向下为 y 轴正方向. 以飞机投放救灾物资处为坐标原点，则救灾物资的水平方向运动方程为

$$x = vt$$

竖直方向运动方程为

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

因此，目标应在飞机下前方

$$x = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = 452\ \mathrm{m}$$

(2) 根据 $a_t = g\sin\theta$，$a_n = g\cos\theta$，以及 $\theta = \arctan\dfrac{gt}{v}$，物品投出 2.0 s 后的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t = 1.88\ \mathrm{m/s^2},\quad a_n = 9.62\ \mathrm{m/s^2}$$

***1 -14**　一气球以匀速率 v_0 从地面上升. 由于风的影响，它获得了一个水平速度 $v_x = by$（其中 b 为常量，y 为上升高度）. 求：(1) 气球的运动方程；(2) 气球的水平偏离与高度的关系 $x(y)$；(3) 气球沿轨道运动的切向加速度和曲率如何随着上升高度 y 变化.

解　(1) 由题意，$v_y = v_0$，并有 $y = v_0 t$，而 $v_x = by = bv_0 t$，积分得

$$x = \int_0^t v_x \mathrm{d}t = \int_0^t b v_0 t \mathrm{d}t = \frac{b v_0}{2} t^2$$

所以气球的运动方程可写成

$$\boldsymbol{r} = \frac{b v_0}{2} t^2 \boldsymbol{i} + v_0 t \boldsymbol{j}$$

（2）从运动方程消 t 得运动的轨道方程

$$x = \frac{b}{2 v_0} y^2$$

（3）由于气球的运动速率为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2 v_0^2 t^2 + v_0^2}$$

则切向加速度为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{b^2 v_0^2 t}{\sqrt{b^2 v_0^2 t^2 + v_0^2}} = \frac{b^2 v_0 y}{\sqrt{b^2 y^2 + v_0^2}}$$

由于 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ 和 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = b v_0$，可求得法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{b v_0^2}{\sqrt{b^2 y^2 + v_0^2}}$$

可求得轨道曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(b^2 y^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{b v_0^2}$$

1－15 一质点沿半径为 0.10 m 的圆周运动，角位移用下式表示：$\theta = 2 + t^3$，其中 θ 以 rad 为单位，t 以 s 为单位. 求质点切向加速度的大小正好等于总加速度大小一半时 θ 的数值.

解 由 $\theta = 2 + t^3$ 求得角速度 ω 和角加速度 α 分别为

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$$

其中 ω 和 α 的单位分别为 rad/s 和 rad/s^2. 因此可求得切向加速度和法向加速度分别为

$$a_t = R\alpha = 6Rt, a_n = \omega^2 R = (3t^2)^2 R(\mathrm{SI})$$

当切向加速度的大小正好等于总加速度大小一半时，应满足 $2a_t = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$，即满足 $3a_t^2 = a_n^2$，解得 $t^3 = \sqrt{\frac{4}{3}}\mathrm{s}^3$，代入 $\theta = 2 + t^3$，得

$$\theta = 3.15 \text{ rad}$$

1－16　杂技表演中摩托车沿半径为 50.0 m 的圆形路线行驶，其运动方程为 $s = 10.0 + 10.0t - 0.5t^2$，其中 s 以 m 为单位，t 以 s 为单位. 求：在 $t = 5.0$ s 时，它的运动速率、切向加速度、法向加速度和总加速度各是多少？

解　$t = 5.0$ s 时的速率

$$v = \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=5.0\ \mathrm{s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

$t = 5.0$ s 时切向加速度

$$a_t = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=5.0\ \mathrm{s}} = -1.0 \text{ m/s}^2$$

$t = 5.0$ s 时法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0.50 \text{ m/s}^2$$

总加速度

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 1.1 \text{ m/s}^2$$

1－17　质点做半径为 R 的圆周运动，运动方程为 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$，其中 s 为弧长，v_0 为初速度，b 为正的常量. 求：(1) 任意时刻质点的法向加速度、切向加速度和总加速度；(2) 当 t 为何值时，质点的总加速度在数值上等于 b？这时质点已沿圆周运行了多少圈？

解　(1) 速率

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$$

切向加速度

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

总加速度

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{1}{R}\sqrt{b^2R^2 + (v_0 - bt)^4}$$

(2) 令总加速度 $a = b$，得

$$t = \frac{v_0}{b}$$