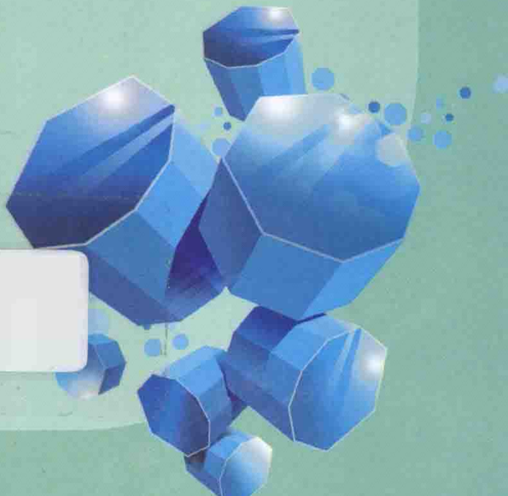
高职高专公共基础课“十二五”规划教材

经济数学

主编　陈　宇　郑　丽



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高职高专公共基础课“十二五”规划教材

经济数学

主　编　陈　宇　郑　丽

副主编　李　亮　王海龙　贾敬堂

参　编　韩田君　徐爱华　张岳鹏　王艳艳

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书共分六章，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学和线性代数初步。本书注重实用性，每章都有经济方面的应用实例和 Mathematica 实验，并配有适量习题，书末还给出了各章习题的参考答案。

本书可作为高职高专院校经济管理类各专业的数学基础教材，也可作为经济管理人员学习相关数学知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/陈宇，郑丽主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2013.8

高职高专公共基础课“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-3126-4

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①陈… ②郑… Ⅲ. ①经济数学一高等职业教育一教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 160625 号

策　　划　邵汉平　杨航斌

责任编辑　张晓燕　邵汉平

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　西安文化彩印厂

版　　次　2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　印张 12.5

字　　数　248 千字

印　　数　1～3000 册

定　　价　23.00 元

ISBN 978-7-5606-3126-4/F

XDUP 3418001-1

前　言

本书依据教育部制订的《高职高专数学教学基本要求》，由多年从事高职高专经济数学教学工作的教师编写而成。本书注重概念的直观性和方法的启发性，突出“以应用为目的，以必需、够用为度”的思想，内容通俗易懂，由浅入深，注重应用，体现了高职高专教育特色。

全书系统讲解了高职高专经济管理方面的微积分基础知识和线性代数的基本知识，共分为六章，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学和线性代数初步。每章都配有经济方面的应用实例和 Mathematica 实验，并配有适量习题，书末还给出了各章习题的参考答案。

本书理论系统、举例丰富、讲解透彻、难度适宜，可作为高职高专院校经济管理类各专业的数学基础教材，也可作为经济管理人员学习经济管理方面所需数学知识的参考书。

参加本书编写的有陈宇、郑丽、李亮、王海龙、贾敬堂、韩田君、徐爱华、张岳鹏、王艳艳等。由于编者水平所限，书中难免存在不足之处，敬请广大读者批评指正，以使本书在教学实践之中不断完善。

编　者

2013 年 4 月

目　录

第一章

函　　数

经济数学主要包括微积分与线性代数的基本内容。

数学中研究导数、微分及其应用的部分称为微分学，研究不定积分、定积分及其应用的部分称为积分学。微积分学是微分学与积分学的统称，是现代数学许多分支的基础。另外，线性代数是代数学的一个重要分支，主要处理线性关系问题，在经济研究、工程技术各领域中有着广泛的应用。本书将逐步介绍上述内容。

函数是微积分学中的基本概念，也是微积分研究的对象。本章从分析日常和经济现象中常见的变量出发，引入函数的一般定义，着重介绍经济现象中常用的几个简单函数，并研究建立函数模型的方法。应当指出的是，本书的所有研究范围都是在实数范围内进行的。

第一节　函数的定义

一、函数的定义

在观察各种自然现象或研究实际问题时，经常遇到两种量：一种是考察过程中保持不变的量，叫做常量；另一种是在考察过程中会发生变化的量，叫做变量。如圆周率 π、某一时期的一年期存款利率等为常量，而上证综指每个交易日的收盘点位、某银行账户上每天的存款余额等为变量。

现实世界中各种变化着的量不是孤立的，而是相互联系和相互制约的，这种变量间的相互关系反映到数学上就是函数，它描述了自然现象中量的变化规律。

例如，某工厂生产某产品，每日最多生产 100 单位，它的日固定成本为 130 元，生产一个单位产品的可变成本为 6 元。试求该厂日总成本函数及平均单位成本函数。

设日总成本为 C，平均单位成本为$\overline{C}$，日产量为 x，由于日总成本为固定成本与可变成

本之和，因此根据题意，日总成本函数为

$$C = C(x) = 130 + 6x \qquad (0 < x \leqslant 100)$$

平均单位成本函数为

$$\bar{C} = \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{130}{x} + 6$$

又如，利率是经济的指挥棒，表 1－1 是从 2010 年 12 月 26 日至 2012 年 7 月 6 日中国人民银行公布的一年期存款利率。

表 1－1

调息日期	一年期存款利率(%)
2010.12.26	2.75
2011.02.09	3.00
2011.04.06	3.25
2011.07.07	3.50
2012.06.08	3.25
2012.07.06	3.00

从表 1－1 可以看出，随着调息日期的变化，利率也随之有一个确定的值与之对应。

再如，股市是经济的晴雨表，图 1－1 是 2007 年我国股市上证综指收盘价。

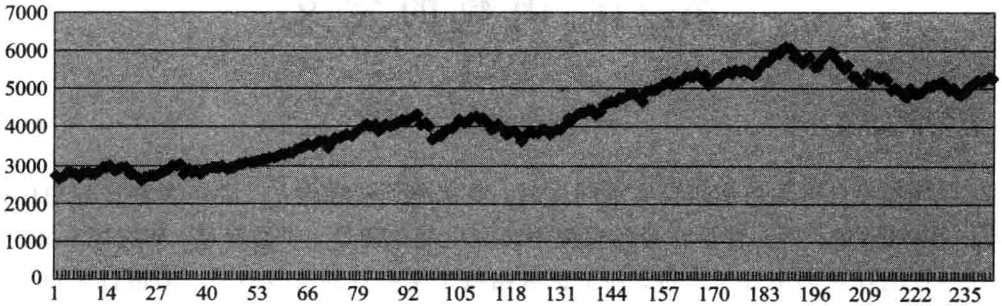


图 1－1

图表也是函数的一种形式。

综合上述各例，针对所包含的具体含义，可抽象出函数的一般定义。

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y 以及非空实数集 D，如果当变量 x 在 D 中任意取一个数时，变量 y 按照某种确定的对应关系 f 总有唯一确定的值和它对应，则称对应关系 f 为

定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记做

$$y = f(x) \quad (x \in D)$$

其中，变量 x 是自变量，变量 y 是函数(也称因变量)，数集 D 是函数的定义域，表示对应关系的 f 是函数的符号。

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应关系 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记做

$$y_0 = f(x_0)$$

函数值的集合称为函数的值域，记做 W。

为了便于理解，对函数的定义做以下几点说明：

(1) 函数的表示方法一般有三种：解析法、列表法、图形法。

(2) 函数的两要素为定义域和对应关系，与它们所采用的符号无关。两个函数相同的充要条件为定义域相同且对应关系相同。

(3) 求函数定义域常涉及的知识点有：分式的分母不为零；偶次根式中被开方数非负；对数的底数大于零且不等于 1，真数大于零；若函数由多个式子表示，求它们的交集，可借助数轴求解；实际问题要考虑使问题有实际意义。

例 1－1 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{x-1}$；

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{\lg x}}{|x|-1}$。

解 (1) 由 $\begin{cases} 4-x \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases}$，解得 $1 \leqslant x \leqslant 4$，所以函数的定义域为 $[1, 4]$。

(2) 由 $\begin{cases} x>0 \\ |x|-1 \neq 0 \end{cases}$，解得 $x>0$ 且 $x \neq 1$，所以函数的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$。

二、分段函数

定义 1.2 若在自变量的不同变化范围内，函数的对应关系也不同，必须用两个或两个以上的解析式表示，则称这类函数为分段函数。

例 1－2 某商品共有 1000 吨可供销售，每吨售价 80 元，若销售量 q 不超过 800 吨，则按原价出售；若销售量 q 超过 800 吨，则超过部分按 9 折的价格优惠出售。试求收益函数 $R(q)$。

解 由题意知，不同销售量(需求量)范围对应的售价不同，故收益函数应该分段考虑。由于

$$收益 = 需求量 \times 售价$$

当 $0 \leqslant q \leqslant 800$ 时，售价为 80，故收益函数为

$$R(q) = 80q$$

当 $800 < q \leqslant 1000$ 时，售价为 $80 \times 0.9 = 72$，超过部分为 $q-800$，此时收益函数为

$$R(q) = 80 \times 800 + 72(q - 800) = 64\ 000 + 72q$$

即收益函数为分段函数：

$$R(q) = \begin{cases} 80q, & 0 \leqslant q \leqslant 800 \\ 64\ 000 + 72q, & 800 < q \leqslant 1000 \end{cases}$$

该函数的定义域为[0，1000]。

注意：求分段函数的函数值 $f(x_0)$ 时，应根据 x_0 所在的范围代入相应的解析式，其图形要在同一坐标系中分段作出。分段函数的定义域是它的各部分自变量取值范围的并集，各部分的自变量的取值范围不允许重叠。

例 1－3 画出下列函数的图像：

(1) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\leqslant 0 \end{cases}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$。

解 函数图形分别如图 1－2、图 1－3 所示。

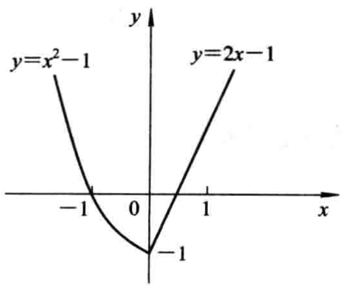


图 1－2

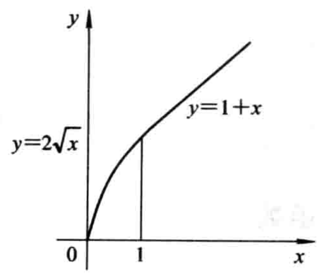


图 1－3

例 1－4 函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，画出其图形。

解 图形如图 1－4 所示。

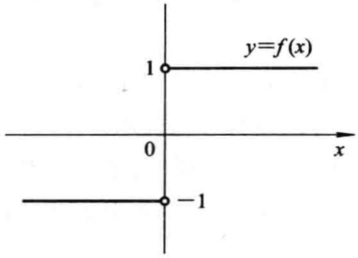


图 1-4

三、函数的特性

函数有四种基本特性，即有界性、单调性、奇偶性、周期性；有界性和单调性是函数的局部特性，奇偶性和周期性是函数的整体特性。这四种特性是从不同角度研究函数所得到的。

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$。如果存在正数 M，使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$在区间 I 上无界。

显然，如果函数 $f(x)$在区间 I 上有界，使上述不等式成立的常数 M 不是唯一的，有界性体现在常数 M 的存在性上。

函数的有界性依赖于区间，例如函数 $y=\frac{1}{x}$在区间$(1, 2)$内是有界的，而在区间$(0, 1)$内是无界的。

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$。如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调增加的；如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 内是单调减少的。

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数。使函数保持单调的区间叫做单调区间。

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，可以用符号↗表示；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，可以用符号↘表示。

如函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的；函数 $y=x^2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，而$(-\infty, 0)$是它的单调减区间，$(0, +\infty)$是它的单调增区间。

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$)。如果对于任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为偶函数。

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 等是奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$ 等是偶函数。

奇函数的图像关于原点中心对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

在两个函数的公共定义域非空的前提下，奇偶函数运算有如下特点：

(1) 两个偶函数相加所得的和为偶函数，两个奇函数相加所得的和为奇函数。

(2) 一个不恒为零的偶函数与一个奇函数相加所得的和为非奇非偶函数。

(3) 两个偶函数相乘所得的积为偶函数，两个奇函数相乘所得的积为偶函数，一个偶函数与一个奇函数相乘所得的积为奇函数。

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D。如果存在一个不为零的实数 T，使得对于任意 $x\in D$ 有$(x\pm T)\in D$，且

$$f(x)=f(x\pm T)$$

恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 为函数的周期。习惯上，函数的周期是指使 $f(x)=f(x+T)$ 成立的最小正数，即最小正周期。

如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数。

四、反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，可以把任意一个变量看做是自变量或因变量。

如某种商品的单价为 p，销售量为 x，则销售总收入 R 是 x 的函数，即

$$R = px$$

此时 x 是自变量。而如果已知总收入 R，反过来求销售量 x，则有

$$x = \frac{R}{p}$$

此时 R 是自变量。这时我们称后一函数是前一函数的反函数。

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W。如果对于 W 中的每一个 y，都有唯一的 $x\in D$ 与 y 对应，此时得到一个定义在 W 上的新函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)$，而 $y=f(x)$ 称为直接函数。

由定义可见，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域。

函数的两要素为定义域和对应关系，而用什么字母表示自变量和因变量是无关紧要的。习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，因此常常对调 x，y，把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$。今后提到的反函数，一般就是指这种经过改写的反函数。

如 $y=10^x$ 的反函数是 $x=\lg y$，或改写成 $y=\lg x$。

由于 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－5 所示。

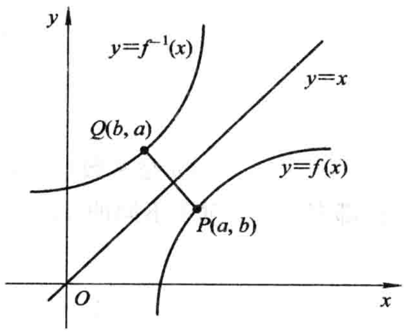


图 1－5

例 1－5　求函数 $y=x+\sqrt{x^2+3}$ $(x>1)$ 的反函数。

解　由 $y=x+\sqrt{x^2+3}$，解得 $x=\dfrac{y^2-3}{2y}$，x 与 y 互换后，得

$$y = \frac{x^2-3}{2x} \qquad (x>3)$$

一般地，求 $y=f(x)$ 的反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，再交换 x、y，同时求出新的定义域(即直接函数的值域)。

第二节 初等函数

一、基本初等函数

1. 常数函数

常数函数形如

$$y = C \qquad (C\text{为常数})$$

如，函数 $y=3$，定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{3\}$，图形(图 1-6)为一条平行于 x 轴的直线。

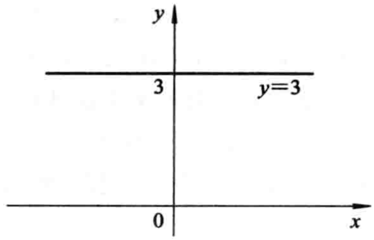


图 1-6

2. 幂函数

幂函数形如

$$y = x^{\mu} \qquad (\mu\text{是常数})$$

对于任意的 μ，x^{μ} 在 $(0, +\infty)$ 内都有定义；对于不同的 μ，x^{μ} 的定义域有所不同。幂函数的图形(图 1-7)过点(1，1)。

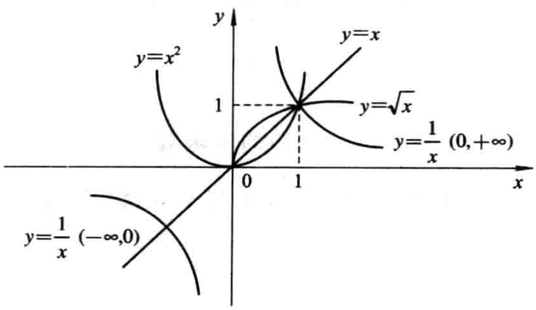


图 1-7

3. 指数函数

指数函数形如

$$y = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$，图形(图 1-8)过点$(0, 1)$。当$0<a<1$时，a^x是单调减少函数；当$a>1$时，a^x是单调增加函数。

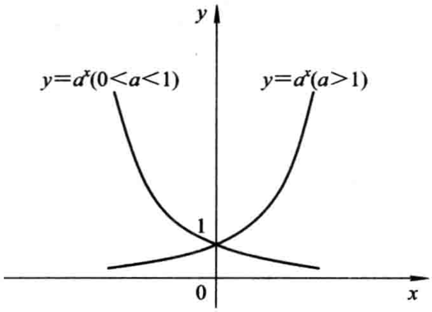


图 1-8

4. 对数函数

对数函数形如

$$y = \log_a x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

对数函数是指数函数$y=a^x$的反函数，其定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$，图形(图 1-9)过点$(1, 0)$。当$0<a<1$时，$\log_a x$ 是单调减少函数；当$a>1$时，$\log_a x$ 是单调增加函数。

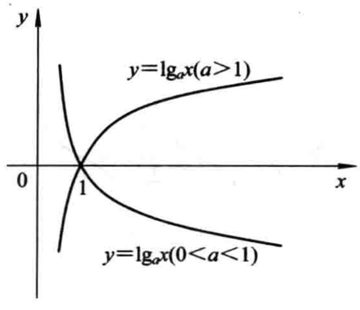


图 1-9

5. 三角函数

三角函数有六个，分别是正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割

函数。

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，它是奇函数，且是以 2π 为周期的周期函数(图 1-10)。

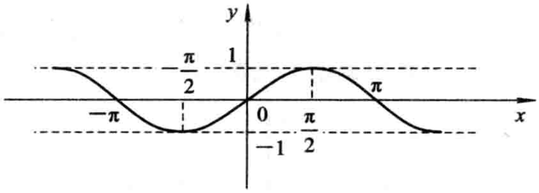


图 1-10

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1, 1]$，它是偶函数，且是以 2π 为周期的周期函数(图 1-11)。

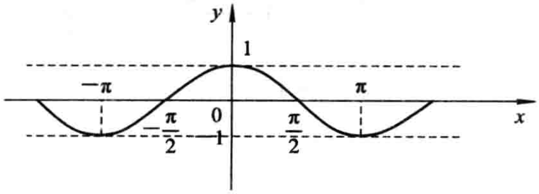


图 1-11

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$的定义域为$\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，它是奇函数，且是以 π 为周期的周期函数(图 1-12)。

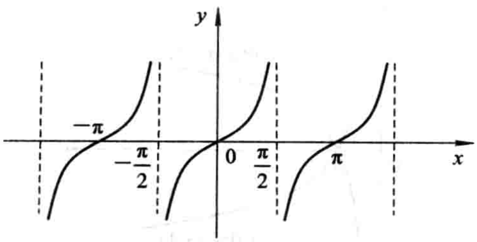


图 1-12

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$的定义域为$\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x\neq k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，它是奇函数，且是以 π 为周期的周期函数(图 1-13)。

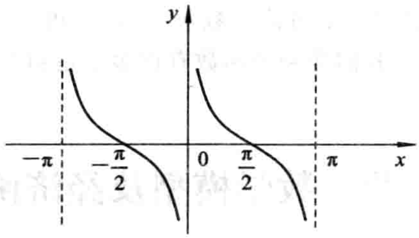


图 1-13

正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$的定义域与正切函数的相同，余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$的定义域与余切函数的相同，它们都是以 2π 为周期的周期函数。

6. 反三角函数

常用的反三角函数有：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，它们是三角函数在规定区间内的反函数。

二、复合函数

设

$$y=u^3,\quad u=1+2x$$

若把 $u=1+2x$ 代入 $y=u^3$ 可以得到函数

$$y=(1+2x)^3$$

这个函数就是由 $y=u^3$ 及 $u=1+2x$ 复合而成的复合函数。

一般地，若函数 $y=f(u)$的定义域为 D，而函数 $u=\varphi(x)$的值域为 Z，若 $Z\cap D\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数。其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量。

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看做由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成，$y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，因此 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$。

注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的。

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由三个或三个以上的函数复合而成。如 $y=(\sin\ln x)^2$ 可以看做由三个函数：$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\ln x$ 复合而成。

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合所构成并且可以用一个式子表示的函数，称为初等函数。例如，$y=\sqrt{1+x^2}$，$y=e^{x^2}$ 等都是初等函数。