

GCT入学资格考试应试指导

GCT 2013

入学资格考试 应试指导

第9版

数学分册

GCT入学资格考试应试指导编审委员会 编著



购买正版图书

附赠

清华大学刘庆华教授
21讲GCT网上授课

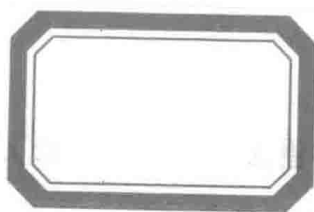


价值**500元**



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

GCT



GCT 入学资格考试应试指导

数 学 分 册

GCT 入学资格考试应试指导编审委员会 编著



机械工业出版社

本书是“GCT 入学资格考试应试指导”之一，全书每章内容均由基本概念和考点综述、典型例题精解、配套强化练习与提高 3 部分组成。其中基本概念和考点综述精解历年真题，详细介绍解题技巧。

本书由 GCT 入学资格考试应试指导编审委员会倾力打造，内容紧扣考试大纲，体例切合应试人员需求，注重实际演练，讲究方法与技巧，定位准确、思路清晰，有助于应试者从容应考，获得高分。

图书在版编目 (CIP) 数据

GCT 入学资格考试应试指导. 数学分册/《GCT 入学资格考试应试指导》
编审委员会编著. —9 版. —北京: 机械工业出版社, 2013.4

ISBN 978-7-111-42209-9

I. ①G… II. ①G… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 079520 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 郑文斌 责任编辑: 郑文斌

版式设计: 墨格文慧

北京振兴源印务有限公司印刷

2013 年 5 月第 9 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 29.25 印张 · 701 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-42209-9

ISBN 978-7-89433-434-3 (光盘)

定价: 50.00 元 (含 1DVD)

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

社服务中心: (010) 88361066

销售一部: (010) 68326294

销售二部: (010) 88379649

读者购书热线: (010) 88379203

网络服务

教材网: <http://www.cmpedu.com>

机工官网: <http://www.cmpbook.com>

机工官博: <http://weibo.com/cmp1952>

封面无防伪标均为盗版

丛书序言

随着工程硕士研究生教育的蓬勃发展,2001 年底国家成立非全日制研究生入学资格考试研究小组,在借鉴国外研究生选拔方式的基础上,提出了改革我国非全日制硕士研究生入学资格考试的新办法。国务院学位办工程硕士入学考试研究小组经过充分的调查研究,提出了两段制考试录取办法,定于 2003 年开始实施,考试大纲也随之改变。

2004 年,国务院学位办发布了《硕士专业学位研究生入学资格考试指南(2004 年版)》,适用范围除工程硕士外,还增加了农业推广硕士和兽医硕士。硕士专业学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test,简称 GCT)作为国务院学位办新实行的一种考试,考试名称虽然在原来的基础上去掉了“工程”二字,但其考试对象主要还是工程硕士考生。

GCT 试卷由 4 部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语(语种为英语、俄语、德语和日语)运用能力测试。GCT 试卷满分 400 分,每部分各占 100 分。考试时间为 3 小时,每部分为 45 分钟。

语言表达能力测试部分主要是以语文为工具,测试考生在知识积累基础上的语言表达能力。通过考生对字、词、句、篇的阅读、分辨与理解,考查其掌握基本的自然科学和人文社会科学知识的水平,特别是运用语言工具对知识进行表达的能力。

数学基础能力测试部分主要是以数学基础知识为背景,重点考查考生所具有的基本数学素养、对基本数学概念的理解,考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及分析问题、解决问题的能力。

逻辑推理能力测试部分主要是考查考生应用常用的逻辑分析方法,通过对已获取的各种信息和综合知识的理解、分析、综合、判断、归纳等,引出概念、寻求规律,对事物间的关系或事件的走向趋势进行合理的判断与分析,确定解决问题的途径和方法。

外语运用能力测试部分考试所涉及的基本内容相当于四年制大学非外语专业毕业生应达到的水平,通过词汇与语法、阅读理解、完形填空等题型着重测试考生运用外语的能力。

GCT 试题均采用客观选择题,含阅读理解、分析判断、正误辨识、情景分析、数理解题、逻辑推理等。答题形式为选择、填空等。试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学……

为帮助广大考生把握考试方法和技能,我们组织相关专家对本套 GCT 入学



资格考试应试指导在 2012 年版的基础上进行了精心的修订,包括语文分册、数学分册、英语分册和逻辑分册共 4 册。我们对本套丛书作了不同程度的调整和改动。不仅使本套丛书更加科学、系统,也使其针对性较前一年有所增强。本套丛书的编写充分体现了如下特色。

(1) 集合清华大学、北京大学和中国人民大学等名校的权威信息,综合名师的辅导精华,全力推出 2013 年 GCT 入学资格考试整体解决方案。

(2) 精辟阐明解题思路,全面展现题型变化。根据命题思路,列题型、讲方法,充分展示解题技巧和其内在规律性。

(3) 科学预测、权威预测、最新预测。有效地把握命题特点,精编了足量的经典习题和模拟试题,强调反应速度,迅速提高考生的应试能力。

本套丛书的出版得到了北京大学和清华大学部分专家和教授的大力支持,在此表示深深的谢意。

GCT 入学资格考试应试指导编审委员会

前 言

自 2003 年起, 工程硕士专业学位研究生的入学资格考试开始了重要变革。其中, 数学基础能力测试旨在考查考生对数学基础知识的掌握以及分析问题和解决问题的能力。数学基础能力测试共分 5 部分: 算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数。考试题目共 50 个, 考试时间为 45 分钟。

为了有助于广大考生系统备考, 并顺利通过本门考试, 我们特别对 GCT 入学资格考试应试指导《数学分册》进行了精心的修订。

本书共分为 6 个部分: 算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分、线性代数及模拟试题与解析。全书每章内容均由基本概念和考点综述、典型例题精解、配套强化练习与提高 3 部分组成。其中基本概念和考点综述精解历年真题, 详细介绍解题技巧。

GCT 入学资格考试应试指导《数学分册》是广大专家和教授智慧和劳动的结晶, 是一份宝贵的资料。其中的每一道试题, 既反映了 GCT 联考数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求, 又蕴含着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此, 对照考试大纲分析、研究这些试题, 考生不仅可以了解 GCT 联考以来数学考试的全貌, 而且可以方便地了解有关试题和信息, 从中发现规律, 归纳出各部分内容的重点、难点以及常考的题型, 进一步把握考试的特点及命题的思路和规律, 从容应考, 获得高分。

在此, 给考生的数学复习备考提出以下几点建议:

第一, 动手做题, 因为“纸上得来终觉浅, 绝知此事要躬行”。本书给 GCT 联考考生提供了锻炼自己和检测自己的机会。参阅本书时, 应该先动手做题, 然后将所得结果与本书的解法加以比较, 看自己哪些做对了、哪些做错了, 为什么会做错。建议考生把本书的全部试题做 2 到 3 遍, 达到对所有的题目一见就能够熟练、正确地解答出来的程度。要准确把握哪些知识是要求了解的, 哪些知识是要求理解的, 哪些知识是要求掌握的, 哪些知识是要求灵活运用, 对这 4 个层次进行概括性的归纳, 进而明确复习的重点。

第二, 准确定位, 注重基础知识的掌握与训练。首先, 考生应系统掌握大纲规定的基础知识, 对大纲规定的内容进行梳理, 形成知识网络; 其次, 在接触一定量的题型之后, 头脑中留下的不是纷繁的题目, 而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能, 以及基本的数学思想和方法。不论是数学理论的建立, 还是数学运算和逻辑推理, 无一不是以明确而又清晰的概念为基础的。



第三，注重实际演练，讲求方法与技巧，高效补差。复习时演练一定量的习题是非常必要的，它是提高考试成绩的重要手段，但也不要搞题海战术，重要的是要吃透大纲规定的基本考点，提高分析问题和解决问题的能力。解题时既要考虑解题的通性、通法，又要分析它的特殊性，寻求最佳解决方法，提高解题能力和对新题型的适应能力。

第四，“做题—总结—再做题”，实现高效复习的良性循环。在解题的基础上认真总结，及时归纳。这样既能梳理所学的知识、掌握解题的方法和规律，又能培养探索和创新的能力。如果只是一味地做题，把做题的多少作为复习效果与努力程度的一个标准，而不注重及时总结，那么考生所收到的实际复习成效是值得怀疑的。如果不对疑难问题进行认真的分析和清理，那么下次碰到类似或者相同的问题时还是会束手无策。

参加本书编写的有童武、李铁红、高鹏、刘爽、苗红宜、刘岩、汪华、刘仕文、陈欢、李雪、王芳、王德军、陈明慧、孟楠、张杰、管卫勇、李征、罗福生、郭庆、梅涛、潘小春、刘佩、翟自飞、李春艳、谢描、张艳霜、张一平、沈二婵、吴经林、范秋杏和李建霞。另外，国外的朋友 Michael Anderson 对本丛书的审订工作付出了很多艰辛的劳动，在此一并表示感谢。

由于时间有限，本书的错误和纰漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

编 者

目 录

丛书序言

前言

第一部分 算 术

第一章 算术	1
基本概念和考点综述	1
第一节 数的概念与性质	1
第二节 数的四则运算	5
第三节 比和比例	7
典型例题精解	11
配套强化练习与提高	19

第二部分 初 等 代 数

第二章 数和代数式	25
基本概念和考点综述	25
第一节 实数	25
第二节 复数	29
第三节 代数式	34
典型例题精解	39
配套强化练习与提高	46
第三章 方程和方程组	50
基本概念和考点综述	50
第一节 一元一次方程	50
第二节 一元二次方程	51
第三节 二元一次方程组	54
第四节 一元高次方程	56
第五节 简单的超越方程	56
典型例题精解	57
配套强化练习与提高	59
第四章 不等式	64
基本概念和考点综述	64



典型例题精解	67
配套强化练习与提高	74
第五章 集合、映射和函数	80
基本概念和考点综述	80
第一节 集合	80
第二节 映射和函数	82
典型例题精解	91
配套强化练习与提高	93
第六章 数列、数学归纳法	98
基本概念和考点综述	98
第一节 数列的基本概念	98
第二节 等差数列	99
第三节 等比数列	102
第四节 数学归纳法	105
典型例题精解	106
配套强化练习与提高	107
第七章 排列、组合、二项式定理和古典概率	111
基本概念和考点综述	111
第一节 排列和组合	111
第二节 二项式定理	113
第三节 古典概率问题	114
典型例题精解	123
配套强化练习与提高	128

第三部分 几何与三角

第八章 常见几何图形	135
基本概念和考点综述	135
典型例题精解	149
配套强化练习与提高	152
第九章 三角学	157
基本概念和考点综述	157
第一节 三角函数	157
第二节 解三角形	162



第三节 反三角函数	167
典型例题精解	168
配套强化练习与提高	172
第十章 平面解析几何	180
基本概念和考点综述	180
第一节 平面向量	180
第二节 直线方程	182
第三节 圆	189
第四节 椭圆	191
第五节 双曲线	192
第六节 抛物线	195
典型例题精解	196
配套强化练习与提高	200

第四部分 一元函数微积分

第十一章 极限与连续	206
基本概念和考点综述	206
第一节 函数的有关概念和几种特性	206
第二节 数列的极限	209
第三节 函数的极限	210
第四节 无穷小量与无穷大量	215
第五节 函数的连续性	218
典型例题精解	220
配套强化练习与提高	226
第十二章 一元函数微分学	232
基本概念和考点综述	232
第一节 导数的概念	232
第二节 导数的运算	235
第三节 微分	239
第四节 中值定理与泰勒公式	241
第五节 洛必达法则	242
第六节 函数的增减性、极值、最值	243
第七节 曲线的凸凹、拐点及渐近线	245
典型例题精解	248



配套强化练习与提高	258
第十三章 一元函数积分学	271
基本概念和考点综述	271
第一节 不定积分的概念与计算	271
第二节 不定积分的计算方法	273
第三节 定积分的概念及性质	275
第四节 微积分基本公式与定积分的计算	278
第五节 定积分的应用	283
典型例题精解	285
配套强化练习与提高	298

第五部分 线 性 代 数

第十四章 行列式	309
基本概念和考点综述	309
第一节 行列式的概念与性质	309
第二节 行列式的计算	314
典型例题精解	316
配套强化练习与提高	324
第十五章 矩阵	332
基本概念和考点综述	332
第一节 矩阵的概念与运算	332
第二节 可逆矩阵	337
第三节 初等变换与初等矩阵	341
第四节 矩阵的秩	343
第五节 分块矩阵	346
典型例题精解	347
配套强化练习与提高	352
第十六章 向量	361
基本概念和考点综述	361
第一节 基本概念	361
第二节 向量的线性相关性	362
第三节 向量组的极大无关组与秩	367
典型例题精解	369
配套强化练习与提高	374



第十七章 线性方程组	383
基本概念和考点综述	383
第一节 线性方程组的基本概念	383
第二节 齐次线性方程组 $Ax=0$	385
第三节 非齐次线性方程组 $Ax=B$	388
典型例题精解	392
配套强化练习与提高	401
第十八章 矩阵的特征值和特征向量	410
基本概念和考点综述	410
第一节 特征值和特征向量的基本概念	410
第二节 n 阶矩阵的相似关系与对角化	414
典型例题精解	417
配套强化练习与提高	424
第六部分 模拟试题与解析	
模拟试题(一)	432
模拟试题(一) 参考答案与解析	436
模拟试题(二)	445
模拟试题(二) 参考答案与解析	448

第一部分

算 术

第一章 算 术



基本概念和考点综述

第一节 数的概念与性质

一、自然数和整数

用来表示物体个数的 $0, 1, 2, 3, \dots$ 叫做自然数。一个物体也没有用 0 表示， 1 是自然数的单位， 0 也是自然数，自然数都是整数。

► 真题链接 1 (2012 年第 8 题) 若 n 是大于 100 的正整数，且 $M = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} +$

$\frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$ ，则 M 所在的区间是 ()。

A. $(0, 1)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 3)$

D. $(3, 4)$

答案: A

解析: 因为 $\frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$ ，所以 $M = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = 1 - \frac{1}{n!}$ ，显然 $0 < M < 1$ ，故正确答案为 A。

► 真题链接 2 (2003 年第 2 题) 记不超过 10 的素数的算术平均数为 M ，则与 M 最接近的整数是 ()。



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

答案: C

解析: 不超过 10 的素数为 2, 3, 5, 7; $M = \frac{2+3+5+7}{4} = 4.25$, 故与 M 最接近的整数为 4。

二、分数和百分数

1. 分数

将单位“1”平均分成若干份, 表示这样的一份或几份的数叫做分数。表示其中一份的数是这个分数的单位。分数有真分数、假分数、带分数等。把“1”平均分成多少份的数, 称为分数的分母; 表示取了多少份的数, 称为分数的分子。

分子比分母小的分数称为真分数。如 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 。

分子比分母大或者分子、分母相等的分数称为假分数。如 $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{2}$ 。

一个整数和一个真分数合成的数, 称为带分数。如 $2\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{5}$ 。

两个自然数相除, 它的商可以用分数表示。如 $a/b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

两个数的比, 也可用分数表示。如 $a:b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

2. 百分数

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数。百分数也叫百分率或者百分比。百分数通常用“%”来表示。

3. 分数的基本性质

分数的分子和分母都乘以或者都除以相同的数 (零除外), 分数的大小不变。
即

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \quad (b \neq 0, m \neq 0)$$

4. 约分和通分

把一个分数化成同它相等, 但分子、分母都比较小的分数, 称为约分。公约数为 1 的两个数为互质数。若一个分数的分子、分母是互质数, 则这个分数称为最简分数, 通过约分可以把分数化为最简分数。



把几个异分母分数分别化成和原来分数相等的同分母分数，称为通分。通分的方法是：先求出原来几个分母的最小公倍数，然后把各分数分别化成这个最小公倍数作为分母的分数。

乘积是 1 的两个数互为倒数。1 的倒数是 1，0 没有倒数。

► **真题链接 1** (2010 年第 12 题) 若某公司有 10 个股东，他们中任意 6 个股东所持股份的和都不少于总股份的 50%，则持股最多的股东所持股份占总股份的最大百分比是 ()。

- A. 25% B. 30% C. 35% D. 40%

答案：A

解析：假设持股最多的股东所持股份占总股份的百分比为 x ，则因为剩余 9 人中任意 6 人的股份之和要不少于总股份的 50%，所以将剩余的 $1-x$ 均分成 9 份，才能使得所需的 $1-x$ 达到最小，从而使 x 达到最大。此

时， $\frac{6}{9}(1-x) \geq 50\%$ ，即 $x \leq 25\%$ 。故正确答案为 A。

► **真题链接 2** (2006 年第 9 题) 一个容积为 10L 的量杯盛满纯酒精，第一次倒出 a L 酒精后，用水将量杯注满并搅拌均匀，第二次仍倒出 a L 溶液后再用水将量杯注满并搅拌均匀，此时量杯中的酒精溶液浓度为 49%，则每次的倒出量 a 为 () L。

- A. 2.55 B. 3 C. 2.45 D. 4

答案：B

解析：量杯中剩余的酒精量为 $10 \times 49\% = 10 - a - \frac{10-a}{10} \times a$ ，整理得 $a^2 - 20a + 51 = 0$ 。

解方程得 $a=3$ 或 $a=17$ (舍去)，故应选 B。

► **真题链接 3** (2005 年第 6 题) 2005 年，我国甲省人口是全国人口的 $c\%$ ，其生产总值占国内生产总值的 $d\%$ ；乙省人口是全国人口的 $e\%$ ，其生产总值占国内生产总值的 $f\%$ ，则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是 ()。

- A. $\frac{cd}{ef}$ B. $\frac{ce}{df}$ C. $\frac{cf}{de}$ D. $\frac{de}{cf}$

答案：D

解析：此题可设全国人口为 a ，国内生产总值为 b 。

则由题意，有甲省人均生产总值为 $\frac{d\% \cdot b}{c\% \cdot a}$ ，乙省为 $\frac{f\% \cdot b}{e\% \cdot a}$ ，故两者的

比值为 $\frac{de}{cf}$ 。

解此类题就是把未知的假设出来，问题一下就可以简化了。



► **真题链接 4** (2003 年第 5 题) 某工厂月产值 3 月份比 2 月份增加 10%, 4 月份比 3 月份减少 10%, 那么 ()。

A. 4 月份与 2 月份产值相等

B. 4 月份比 2 月份产值增加 $\frac{1}{99}$

C. 4 月份比 2 月份产值减少 $\frac{1}{99}$

D. 4 月份比 2 月份产值减少 $\frac{1}{100}$

答案: D

解析: 设 2 月份产值为 1, 则 3 月份产值为 1.1, 4 月份产值为 0.99, 故 4 月份比 2 月份产值减少 $\frac{1}{100}$ 。

三、数的整除

当整数 a 除以整数 b ($b \neq 0$), 除得的商正好是整数而无余数时, 则称 a 能被 b 整除或称 b 能整除 a 。当 a 能被 b 整除时, 也称 a 是 b 的倍数, b 是 a 的约数。

约数的个数是有限的, 其中最小的约数是 1, 最大的约数是它本身; 一个数的倍数的个数是无限的, 其中最小的倍数是它本身。几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数, 所有公倍数中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。几个数公有的约数叫做这几个数的公约数, 所有公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数。

一个数只有 1 和它本身两个约数, 叫做质数 (素数)。一个数, 如果除了 1 和它本身, 还有其他约数, 叫做合数。公约数只有 1 的两个数, 叫做互质 (素) 数。分子与分母互质的分数称为最简分数。

个位上是 0, 2, 4, 6, 8 的数都能被 2 整除, 个位上是 0 或 5 的数都能被 5 整除, 各位上的数的和能被 3 整除的数本身也能被 3 整除。能被 2 整除的数称为偶数, 不能被 2 整除的数称为奇数。

► **真题链接 1** (2004 年第 1 题) 在一条长 3 600 m 的公路一边, 从一端开始等距竖立电线杆, 每隔 40 m 原已挖好一个坑。现改为每隔 60 m 立一根电线杆, 则需要重新挖坑和填坑的个数分别是 ()。

A. 50 和 40

B. 40 和 50

C. 60 和 30

D. 30 和 60

答案: D

解析: 每隔 40 m 挖坑的数量为: $3\,600 \div 40 + 1 = 91$

每隔 60 m 挖坑的数量为: $3\,600 \div 60 + 1 = 61$

由于 40 与 60 的最小公倍数为 120, 可知挖重叠的坑的数量为:



$$3600 \div 120 + 1 = 31$$

因此需要重新挖坑的数量为: $61 - 31 = 30$

填坑的数量为: $91 - 31 = 60$

故选 D。

► **真题链接 2** (2003 年第 3 题) 1 000 m 的大道两侧从起点开始每隔 10 m 各种一棵树, 相邻两棵树之间放一盆花, 这样需要 ()。

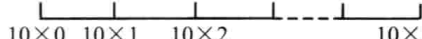
A. 树 200 棵, 花 200 盆

B. 树 202 棵, 花 200 盆

C. 树 202 棵, 花 202 盆

D. 树 200 棵, 花 202 盆

答案: B

解析:  则一侧树的棵数为 $100 + 1 = 101$, 花的盆数为 100, 故两侧乘以 2, 故选 B。

第二节 数的四则运算

一、四则运算

1. 加法

把两个(或几个)数合并成一个数的运算称为加法。

2. 减法

已知两个加数的和与其中一个加数, 求另一个加数的运算, 称为减法。

$$\text{和} - \text{一个加数} = \text{另一个加数}$$

$$\text{被减数} - \text{减数} = \text{差}$$

3. 乘法

一个数乘以整数是求几个相同加数和的简便运算。一个数乘以小数(或分数)是求这个数的几分之几的运算, 即

$$\text{被乘数} \times \text{乘数} = \text{积}$$

$$(\text{因数})(\text{因数})$$

4. 除法

已知两个因数的积与其中一个因数, 求另一个因数的运算, 称为除法, 即

$$\frac{\text{积}}{\text{一个因数}} = \text{另一个因数}$$

