JINGJI SHUXUE JICHU WEIJIFEN

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础
微积分

主　编　赵利彬
副主编　马合保　肖祖荣

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础——微积分

主　编　赵利彬
副主编　马合保　肖祖荣

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”要求的基础上，按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求，结合一些本专科院校学生的基础和特点进行编写的.

全书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、广义积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、无穷级数、常微分方程. 书内各节后均配有相应的习题，书末附有习题参考答案.

本书体系结构严谨、知识系统、讲解透彻、内容难度适宜、语言通俗易懂、例题习题丰富. 适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的微积分课程的教材使用，也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础. 微积分 / 赵利彬主编. -- 上海：同济大学出版社，2013.8

ISBN 978-7-5608-5234-8

Ⅰ.①经… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材②微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0②O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第171395号

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础——微积分

主　编　赵利彬　**副主编**　马合保　肖祖荣

责任编辑　张　莉　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　江苏句容排印厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　26

印　数　1—4 100

字　数　520 000

版　次　2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-5234-8

定　价　46.00元

本书若有印装质量问题，请向本社发行部调换　版权所有　侵权必究

前　　言

“微积分”是普通高等院校经济管理类本、专科各专业普遍开设的一门公共基础课程. 在培养具有良好数学素质及应用型人才方面起着特别重要的作用. 为适应21世纪教学改革的需要与市场经济对人才的需求、适应我国高等教育从“精英型教育”向“大众化教育”的转变、满足一些高等院校新的教学形势、学生基础和教学特点，我们根据多年的教学改革实践，在多次研讨和反复实践的基础上，编写了这部微积分课程的教材.

本教材在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新提出的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，参考了近几年来国内出版的一些优秀教材，结合编者多年的教学实践经验编写而成. 全书以严谨的知识体系、通俗易懂的语言、丰富的例题深入浅出地讲解微积分的知识，培养学生分析问题和解决问题的能力.

全书内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用、不定积分，定积分、定积分应用、广义积分，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，无穷级数，常微分方程. 各节后均配有相应的习题，书后附有习题参考答案. 本书的主要特色有以下几点：

(1) 在满足教学基本要求前提下淡化理论推导过程，加强训练、强化应用. 在第1章中没有介绍映射的内容，直接通过实例给出函数的定义，同时在有些章节中还淡化了定理证明的推导过程，既简明易懂，又解决了课时少、内容多的矛盾.

(2) 内容结构设计合理，突出重点，消除难点. 篇幅比传统教材少，但微积分的基本内容都讲到了，且有一定的理论深度.

(3) 较为通俗、易懂，便于教师授课，也便于学生阅读、理解.

(4) 注重理论联系实际，增加了数学在经济上应用的例子，培养学生解决实际问题的能力.

(5) 注重渗透现代化教学思想及手段，注重渗透数学建模思想.

本教材结构严谨、知识系统、讲解透彻、难度适宜、通俗易懂、适应面宽. 适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的高等数学课程的教材使用，也可作为大学本、专科理工类学生高等数学课程的教学参考书，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由赵利彬担任主编，编写大纲由赵利彬提出，并经过编者充分讨论而确定. 具体分工如下：第 1 章、第 9 章由马合保编写，第 2 章、第 3 章由林志宝编写，第 4 章、第 5 章由肖祖荣编写，第 6 章、第 10 章由赵利彬编写，第 7 章、第 8 章由任丽编写. 全书由赵利彬统稿、定稿.

在本书的编写过程中得到了闽江学院数学系的领导、老师的支持，也得到了同济大学出版社曹建副总编的大力支持，在此我们表示诚挚的谢意！在编写过程中参考了书后所列的参考文献，对参考文献的作者在此一并表示感谢！

虽然编者力求本书通俗易懂、简明流畅、便于教学，但由于作者水平与学识有限，本书疏漏与错误之处在所难免，书中一定还有不少不尽人意之处，敬请专家和读者不吝批评和赐教，我们将万分感激. 本书将不断改进与完善，突出自己的特色，更好地服务于教学.

赵利彬

2013 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

微积分研究的基本对象是定义在实数集上的函数，应用无限逼近的方法即极限方法来研究函数的性态. 本章介绍函数的概念及其运算和特性，给出初等函数的构造，讲述数列极限与函数极限的概念以及性质，最后讨论函数的连续性.

1.1　函　　数

1.1.1　集合、区间和邻域

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的一个概念，它的定义是描述性的.

定义 1.1.1　具有某种特定性质的事物的全体称为集合. 集合中的事物称为该集合的元素.

设 A 是一个集合，如果 x 是 A 的元素，则称 x 属于 A，记为 $x \in A$；如果 x 不是 A 的元素，则称 x 不属于 A，记为 $x \overline{\in} A$ 或 $x \notin A$.

集合中的元素具有确定性和可区分性.

一个集合，如果其元素的个数是有限的，则称为有限集，否则就称为无限集. 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

一般地，表示一个集合有两种方法. 一种是列举法，即将集合中的元素逐一列举出来. 例如，由数字 1, 3, 5, 7, 9 组成的集合表示为 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$；自然数的集合表示为 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

集合中的元素之间没有次序关系，也就是说，在集合的表示中，同一元素在不同位置上的出现不具有任何特殊意义. 例如，$\{1, 2, 3\}$ 与 $\{2, 1, 3\}$ 表示的是同一个集合.

习惯上用 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合，$\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数的集合，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合，$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合.

另一种是描述法，即用集合中的元素所具有的性质来描述，记为 $\{x \mid x$ 具有性质 $P(x)\}$.

例如，方程 $x^2 - 2 = 0$ 的实数根全体组成的集合可表示为 $\{x \mid x^2 - 2 = 0\}$.

定义 1.1.2　设 A, B 是两个集合，如果 A 中的元素都是 B 中的元素，即

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$，读作 A 包含于 B，或记为 $B \supset A$，读作 B 包含 A.

如果 A 中至少存在一个元素 x 不属于 B，即 $\exists x \in A$，但 $x \overline{\in} B$，那么 A 不是 B 的子集，记为 $A \not\subset B$.

符号"$\forall$"表示"对于任意的"或"对于每一个"；符号"$\exists$"表示"存在"或"可以找到".

例如，设 $A = \{2, 3, 4\}$，$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则 $A \subset B$.

显然. $\mathbf{N}^{+} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

由定义 1.1.2 可知，任何集合都是其自身的子集；空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

定义 1.1.3 设 A，B 是两个集合，如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$. 此时 A 与 B 的元素完全相同，实际上是同一个集合.

例 1.1.1 设 $A = \{a, b, c\}$，写出 A 的所有子集.

解 $\varnothing$；$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$；$\{a, b, c\}$，共有 2^3 个子集.

容易证明，由 n 个元素组成的集合共有 2^n 个子集.

2. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差 3 种.

设 A，B 是两个集合，由 A 与 B 的全部元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集（简称并），记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 与 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交），记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

特别地，如果 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 不相交.

由属于 A 但不属于 B 的一切元素构成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差），记为 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}.$$

例 1.1.2 设 $A = \{1, 2, 4\}$，$B = \{3, 4, 5\}$，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ A \cap B = \{4\},\ A \backslash B = \{1, 2\},\ B \backslash A = \{3, 5\}.$$

注 一般地，$A \backslash B \neq B \backslash A$.

通常在讨论一个问题时，所涉及的集合总是某个最大集合 X 的子集，此时称 X 是全集.

如果 $A \subset X$，则称集合

$$X \backslash A = \{x \mid x \in X \text{ 且 } x \overline{\in} A\}$$

为集合 A 关于全集 X 的余集或补集，记为 A_X^C. 在不会发生混淆的前提下，通常也简称为 A 的余集或补集，记为 A^C.

显然，有下列简单事实：

(1) $A \cup A^C = X$, $A \cap A^C = \varnothing$；

(2) $(A^C)^C = A$；

(3) $A \backslash B = A \cap B^C$.

以上等式根据集合相等的定义易证. 现就等式(3)证明如下：

因为 $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A$ 且 $x \overline{\in} B \Leftrightarrow x \in A$ 且 $x \in B^C \Leftrightarrow x \in A \cap B^C$，所以 $A \backslash B = A \cap B^C$.

关于集合的并、交、余及其联合运算，有下列规律：

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$；

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(3) 分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) 对偶律(De Morgan 公式)　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

以上运算规律根据集合相等的定义易证.

由于集合的并与交满足结合律，于是有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists i: 1 \leqslant i \leqslant n, x \in A_i\};$$

有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交记为

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \forall i: 1 \leqslant i \leqslant n, x \in A_i\};$$

注　集合运算不满足消去律 $A \cup B = A \cup C \nRightarrow B = C$, $A \cap B = A \cap C \nRightarrow B = C$.

3. 区间和邻域

在微积分课程中，经常用到的实数集 $\mathbf{R}$ 的子集是区间和邻域两种类型.

设 $a, b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为以 a, b 为端点的开区间，记为 (a, b)，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为以 a, b 为端点的闭区间，记为 $[a, b]$，即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$

集合 $\{x \mid a < x \leqslant b\} = (a, b]$ 和 $\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a, b)$ 都称为半开半闭区间.

以上这几类区间的长度是有限的,称为有限区间.

类似地,记

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\},\ [a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\},\ (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}.$$

这里符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”, $-\infty$ 读作“负无穷大”.

上述这几类区间都称为无限区间.

有限区间和无限区间统称为区间.

数的图像是数轴上的点,反过来,数轴上的点的坐标又是数. 这样实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点就建立了一一对应关系,所以数与点,我们以后不加区别.

定义 1.1.4 设 $a \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 开区间

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\} = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$. 点 a 称为邻域中心, δ 称为邻域半径(图 1-1). 当不需要注明邻域半径时,也简记为 $U(a)$.

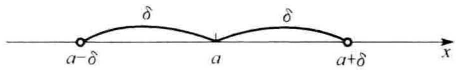

图 1-1

集合 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 去心邻域,记为 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

为了方便,把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,记为 $\mathring{U}^-(a, \delta)$; 把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域,记为 $\mathring{U}^+(a, \delta)$.

1.1.2 函数概念

1. 函数的定义

定义 1.1.5 设数集 $D \neq \varnothing$, 若存在某种对应法则 f, 对于 D 中每个数 x, 按照对应法则 f, 都有实数集 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数 y 与之对应,则称对应法则 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数,记为

$$f: D \to \mathbf{R}$$

$$x \mapsto y,$$

数 x 对应的数 y 称为函数 f 在点 x 的函数值,记为 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域,记为 D_f. 全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的值域,记为 $f(D)$, 即

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}\subset \mathbf{R}.$$

关于函数定义的几点说明：

（1）函数定义包含两个要素，对应法则和定义域. 这时 $f:D\rightarrow\mathbf{R}$ 也称 f 是定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x),\ x\in D$.

（2）函数定义指出，$\forall x\in D$，按照对应法则 f，在实数集 $\mathbf{R}$ 中存在唯一一个数 y 与之对应，这种对应称为由 D 到 $\mathbf{R}$ 中的单值对应. 注意不要求不同的 x 要不同的 y 与之对应，即不同的 x 可能对应相同的 y.

（3）从函数定义来说，给定一个函数一定要指出函数的定义域，没有求定义域的问题. 但是，有时为了方便并不指出函数 $y=f(x)$ 的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即函数的定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $D_f=\{x \mid f(x)\in\mathbf{R}\}$，也即自变量 x 的最大取值范围，此定义域称为该函数的自然定义域.

（4）在函数定义中，并没有表明对应法则非得用一个公式来表达不可. 也就是说，变量间有没有函数关系，在于有没有对应法则，而不在于有没有公式，所以具体表示一个函数时，可以用解析法（或称公式法）、图示法、表格法，甚至用语言描述等.

设函数 $y=f(x),\ x\in D$，坐标平面上的点集

$$G(f)=\{(x,\ y)\mid x\in D,\ y=f(x)\}$$

称为函数 f 的图像.

函数的图像能将函数的几何性态表现得十分明显. 显然，坐标平面上一个点集 G 是某个函数的图像的必要充分条件是，平行 y 轴的每条直线与点集 G 至多有 1 个交点.

例 1.1.3 求下列函数的自然定义域.

（1）$y=f(x)=\lg\sin x$；　　　　（2）$y=g(x)=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

解 （1）由于

$$\sin x>0\Rightarrow 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

所以
$$D_f=\{x\mid 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

（2）因为

$$\begin{cases}x>0,\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant 10\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 100,$$

所以 $D_g=[1,100]$.

例 1.1.4 某运输公司规定货物的运费为：在 100 km 以内，每千米 k 元；超过 100 km 部分每千米 $\frac{3}{5}k$ 元，试建立总运费 c 与路程 s 之间的函数关系.

解 根据题意可得函数关系为

$$c=c(s)=\begin{cases} ks, & 0<s\leqslant 100, \\ 100k+\frac{3}{5}k(s-100), & s>100. \end{cases}$$

这个函数的对应法则是：当 $s\in(0,100]$ 时，按公式 $c=ks$ 计算函数值；当 $s\in(100,+\infty)$ 时，按公式 $c=100k+\frac{3}{5}k(s-100)$ 计算函数值. 从函数定义来看它是定义在 $(0,+\infty)$ 上的一个函数，是分段表示的函数，而不是两个函数.

这类在定义域的不同部分对应法则由不同的式子表示的函数，称为分段函数.

例 1.1.5 $\forall x\in\mathbf{R}$，对应的 y 是不超过 x 的最大整数. 显然，$\forall x\in\mathbf{R}$ 都对应唯一一个 y，这是一个函数，称为“整数部分”函数（图 1-2），记为

$$y=[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\ n\in\mathbf{Z}.$$

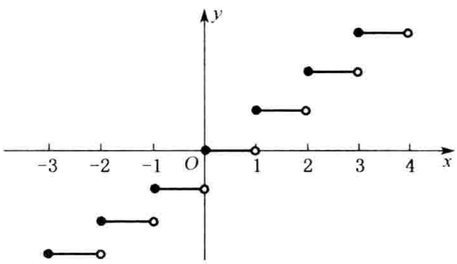

图 1-2

前面所举例子的共同特点是函数形式均为 $y=f(x)$，即因变量 y 单独放在等式的一边，而等式的另一边是只含有自变量 x 的表达式，这种表示形式的函数称为显函数.

例 1.1.6 设变量 x 和 y 满足方程 $e^y=xy$，显然 $\forall x\in\mathbf{R}$，通过方程 $e^y=xy$ 对应唯一一个 y，则由方程 $e^y=xy$ 确定了 x 与 y 之间的一种函数关系，这种表示形式的函数称为隐函数.

隐函数是相对显函数而言的，只是表现形式不同，而与函数的本性无关.

2. 函数的四则运算

设两个函数 f，$x\in D_1$ 和 g，$x\in D_2$. 若 $D_1=D_2$，且 $\forall x\in D_1$，有 $f(x)=g(x)$，则称函数 f 与 g 相等，记为 $f=g$.

例如，函数 $f(x)=\log_a(x^2)$ 与 $g(x)=2\log_a x$ 不相等；函数 $\varphi(x)=\frac{x}{x}$ 与 $h(x)=x^0$ 相等.

给定两个函数 f，$x\in D_1$ 和 g，$x\in D_2$，若 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则函数 f 与 g 的

和 $f+g$、差 $f-g$、积 fg 分别定义为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in D_1\cap D_2,$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ x\in D_1\cap D_2,$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),\ x\in D_1\cap D_2.$$

若 $(D_1\cap D_2)\setminus\{x|g(x)=0\}\neq\varnothing$，则函数 f 与 g 的商 $\dfrac{f}{g}$ 定义为

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ x\in(D_1\cap D_2)\setminus\{x|g(x)=0\}.$$

若 $D_1\cap D_2=\varnothing$，则函数 f 与 g 的四则运算无意义.

函数的四则运算是产生新函数的一种方法.

1.1.3 函数的几种特性

这里讨论函数的 4 种简单特性：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

1. 函数的有界性

定义 1.1.6 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 若 $\exists M\in\mathbf{R},\forall x\in D$，有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 D 上有上界，M 是它的一个上界；否则，称函数 $f(x)$ 在数集 D 上无上界.

显然，如果函数 $f(x)$ 在数集 D 上有上界，则它必有无限多个上界. 定义中，设“函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义”，一般来说，数集 D 不一定是函数 $f(x)$ 的自然定义域 D_f，但总有 $D\subset D_f$.

由定义可得，函数 $f(x)$ 在 D 上无上界，即 $\forall M\in\mathbf{R},\exists x_0\in D$，有 $f(x_0)>M$.

相仿地，可以定义函数 $f(x)$ 在数集 D 上有下界.

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 若 $\exists m\in\mathbf{R},\forall x\in D$，有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 在数集 D 上有下界，m 是它的一个下界；否则，称函数 $f(x)$ 在数集 D 上无下界.

定义 1.1.7 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 若 $\exists M>0,\forall x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 D 上有界；否则，称函数 $f(x)$ 在数集 D 上无界.

由定义，函数 $f(x)$ 在数集 D 上无界 $\Leftrightarrow$ $\forall M>0,\exists x_0\in D$，有 $|f(x_0)|>M$.

定理 1.1.1 函数 $f(x)$ 在数集 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com