

函授教材

解析几何

内蒙古师范学院函授部
数学教材编写组翻印

毛主席语录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

你们学自然科学的，要学会用辩证法。

理论的基础是实践，又反过来为实践服务。

引 言

毛主席指出：“人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来。”解析几何和其他一切科学一样，是从三大革命运动的需要和实践中发生和发展起来的。人类在生产活动中，很早就积累了丰富的初等数学知识，包括算术、代数、几何、三角等。直到十六世纪，欧洲处于资本主义萌芽时期，适应资本原始积累的需要，在残酷剥削劳动人民的基础上，生产力比以前有了很大的发展，科学技术上产生了许多新的数学问题。例如，随着机械工业的诞生和航海、建筑、造船、采矿等事业的发达，推动了天文学和力学等的前进，于是变速运动的瞬时速度、曲线的切线、复杂曲线的性质等问题，都急待研究。但是，这些问题和以往的数学问题有原则的区别，要解决这些问题，初等数学已不够用了，需要创立新的观念和方法。正是在这样的生产需要以及实践经验和知识积累的基础上，产生了一个新的数学分科——解析几何和随之而来的新的数学分科——微积分等等。

恩格斯说：“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”（《反杜林论》第35页①）可见，数学是从“形”与“数”这两个侧面去研究客观世界的，例如，初等几何主要是从“形”这个侧面去研究的，初等代数主要是从“数”这个侧

面去研究的。但是，客观事物都是既有“形”又有“数”的，“形”与“数”是对立的统一；三大革命运动的实践，需要我们将“形”、“数”结合起来，从而能更好地研究客观事物的变化规律。解析几何就是从这一基本观点出发，通过坐标法来建立构成几何图形的基本元素的“点”和作为代数的基本对象的“数”（点的坐标）之间的对应关系，并且在此基础上，用变数（动点的流动坐标）表示动点，把几何图形看作点的轨迹，进而建立曲线、曲面与方程的关系，从而能通过方程的讨论用代数的方法（解析法）来研究几何图形的性质。解析几何的研究方法及基本内容也是今后学习研究高等数学的基础。

恩格斯指出：“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，……”（《自然辩证法》第236页②）解析几何的出现，在数学发展史上也是有重要意义的，它打破了十七世纪以前数学中用孤立（把形与数割裂开来）、静止（主要只考虑常量与固定的图形）的方法来研究问题的状况，不仅成为研究几何图形的更有力的工具，大大促进了几何学的发展，而且改变了长期以来数学发展迟缓的面貌，推动了数学的飞跃前进。

①②本教材中引用革命导师的语录时，在引语后面的括弧内所注明的原著页数，系根据下列版本：《毛泽东选集》横排袖珍本，人民出版社1967年11月版；《毛主席的五篇哲学著作》，人民出版社1970年10月版；《反杜林论》，人民出版社1970年12月版；《自然辩证法》人民出版社1971年8月版。

目 录

引 言

第一编 平面解析几何

第一章 “形”与“数”对应关系的建立

第一节 坐标法	(1)
一、直线上点的坐标·平面上点的直角坐标	(2)
二、两点间的距离·线段的定比分点	(3)
三、坐标变换	(13)
第二节 曲线与方程	(17)
一、曲线方程的概念	(17)
二、由曲线求其方程	(22)
三、由方程描其曲线	(27)
四、两曲线的交点	(32)

第二章 直 线

第一节 直线的方程	(40)
一、直线的截斜式和点斜式方程	(40)

二、直线的一般式方程	(43)
三、直线的两点式和截距式方程	(44)
第二节 直线间的相互关系	(49)
一、两直线相交、平行和重合的条件	(49)
二、两直线的夹角	(50)
三、两直线垂直的条件	(51)
四、点到直线的距离	(53)
第三节 直线划分平面——二元一次不等式的几何意义	(58)

第三章 圆锥曲线

第一节 抛物线	(70)
一、抛物线的方程和形状	(71)
二、抛物线的一些重要性质	(75)
第二节 椭圆	(87)
一、椭圆的方程和形状	(88)
二、椭圆的一些重要性质	(96)
第三节 双曲线	(101)
一、双曲线的方程和形状	(102)
二、双曲线的一些重要性质	(113)
第四节 一般二次方程的讨论	(115)
一、坐标轴的平移对二次方程系数的影响	(116)
二、坐标轴的旋转对二次方程系数的影响	(119)

三、二次方程的化简与曲线的判定	(123)
第五节 圆锥曲线的共性	(131)

第四章 极坐标 · 参数方程

第一节 极坐标	(150)
一、极坐标系	(151)
二、极坐标与直角坐标的关系	(155)
三、曲线的极坐标方程	(158)
四、等速螺线	(165)
第二节 参数方程	(171)
一、曲线的参数方程	(171)
二、参数方程与普通方程的关系	(175)
三、圆的渐开线和摆线	(179)

第二编 空间解析几何

第五章 空间直角坐标 · 向量代数

第一节 空间直角坐标系	(194)
第二节 向量及其线性运算	(197)
一、向量的概念	(197)
二、向量的线性运算	(198)
三、向量的分解	(206)

第三节 向量的数量积、向量积和混合积.....	(214)
一、二向量的数量积.....	(214)
二、二向量的向量积.....	(222)
三、向量的混合积.....	(230)

第六章 平面和直线

第一节 平面的方程.....	(245)
一、平面的向量式和点法式方程.....	(245)
二、平面的一般式方程.....	(246)
第二节 直线的方程.....	(252)
一、直线的向量式、参数式和点向式方程.....	(252)
二、直线的一般式和射影式方程.....	(255)
第三节 直线、平面间的相互位置关系.....	(259)

第七章 常见曲面和曲线

第一节 曲面、曲线与方程.....	(272)
一、曲面的方程.....	(272)
二、曲线的方程.....	(273)
三、柱面.....	(276)
四、旋转曲面.....	(278)
五、锥面.....	(280)
第二节 椭球面.....	(281)

第三节 双曲面.....	(286)
一、双叶双曲面.....	(288)
二、单叶双曲面.....	(289)
第四节 抛物面.....	(295)
一、椭圆抛物面.....	(295)
二、双曲抛物面.....	(297)

第一编 平面解析几何

第一章 “形”与“数”

对应关系的建立

本章主要内容，是通过坐标法建立直线上的点与实数之间的对应，以及平面上的点与有序实数对之间的对应，并且在此基础上，进一步建立平面上的曲线与含有两个变数的方程之间的对应；这样就使原来矛盾的“形”与“数”得以统一起来，又能互相转化，从而为解析几何用代数方法（解析法）研究几何图形的性质奠定基础。

第一节 坐 标 法

“形”与“数”的互相联系和转化是有条件的，正如毛主席所指出的：“在一定条件之下，矛盾的东西能够统一起来，又能够互相转化；无此一定条件，就不能成为矛盾，不能共居，也不能转化。”（《毛主席的五篇哲学著作》第101页）坐标法便是实现这种联系和转化的条件。

一、直线上点的坐标·平面上点的直角坐标

1、直线上点的坐标——直线上的坐标法。

在初等数学中我们已经知道，规定了正方向、原点和长度单位的直线叫做数轴（图1—1）。数轴上任何一点都对应着唯一的一个实数；反过来，

任何一个实数也都对应着数轴上唯一的一点。因此，数轴

上所有的点与全体实数之间就

有着一一对应的关系。我们把和数轴上任一点 M 相对应的实数 x 叫做点 M 的坐标，记作 $M(x)$ 。

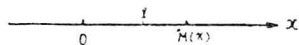


图 1—1

2、平面上点的直角坐标——平面上的坐标法。

平面上的直角坐标系，是由两条互相垂直、具有共同原点和相同长度单位的数轴，即 x 轴和 y 轴构成的（图1—2）。

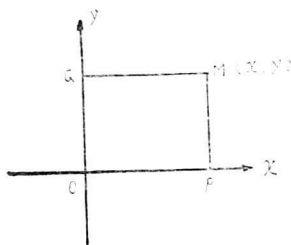


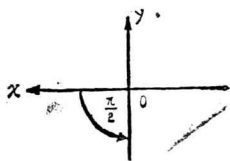
图 1—2

通常 x 轴放在水平位置，又叫做横轴，取向右的方向为正； y 轴放在铅垂位置，又叫做纵轴，取向上的方向为正①。

x 轴和 y 轴统称坐标轴。两轴的共同原点 O 叫做坐标原点。这个平面叫做坐标平面。

设坐标平面上任一点 M 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是点 P

①象这样规定 x 轴、 y 轴的正方向的直角坐标系叫做右手系。右手系的特点是：把 x 轴正向绕原点逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 时，就与 y 轴正向一致。如果不一致（如右图），就叫做左手系。以后我们都用右手系。



和 Q （一点到一直线所引垂线的垂足，叫做该点在该直线上的射影或投影），那么点 P 在 x 轴上的坐标 x 叫做点 M 的横坐标，点 Q 在 y 轴上的坐标 y 叫做点 M 的纵坐标； x 和 y 合在一起叫做点 M 的坐标，记作 $M(x, y)$ 。这样，对于坐标平面上任何一点 M ，我们可以得出唯一的一对有序实数 (x, y) 来和它对应；反过来，对于任何一对有序实数 (x, y) ，在坐标平面上就能确定唯一的一点，使它的坐标是 (x, y) 。因此，平面上所有的点与所有有序实数对 (x, y) 之间就有着一一对应的关系。

通过坐标系的建立，可以把平面上的点与有序实数对联系起来，这样就有可能把平面上关于点的几何问题，转化为关于这些点的坐标的代数问题来进行研究。平面解析几何就是从这一基本观念出发，用代数方法来研究平面几何问题。

用来确定平面上点的位置的方法不只一种，以上所讲的直角坐标法仅是其中较常用的一种。在第四章我们还将学习极坐标法（用角度和距离来确定平面上点的位置）。一般说来，平面坐标法就是用一对有序实数确定平面上点的位置的方法，而用以确定点的位置的那些数，就是相应点的坐标。

二、两点间的距离·线段的定比分点

1、有向线段。在初等数学中，我们已学过用单位圆内的有向线段表示三角函数。在解析几何中，有向线段这个概念是常用的。

所谓有向线段，就是规定了起点和终点的线段。有向线段的方向，就是从起点到终点的方向。以 A 为起点、 B 为终

点的有向线段，用记号 $\overrightarrow{AB}$ 表示，其方向为从A到B。 $\overrightarrow{BA}$ 则表示以B为起点、A为终点的有向线段，其方向为从B到A。

要决定一条有向线段的方向是正的还是负的，需要看这条有向线段的方向，和它所在的直线的正方向（规定了正方向的直线叫做有向直线或轴）是不是一致。如果一致，那么其方向为正；如果相反，那么其方向为负。例如，图1—3中箭头表示直线 l 的正方向，那么有向线段 $\overrightarrow{BA}$ 的方向是正的，而有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向是负的。

选定一条线段作为长度单位，我们可以量得一条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度（也叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的模），记作 $|AB|$ 。有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的数量（或值），记作 AB 。在图1—3中， $AB = -4$ ，

$BA = 4$ 。

根据有向线段的数量的意义，显然有 $AB = -BA$ 。而对于有向线段的长度，则有 $|AB| = |BA|$ 。



图 1-3

设数轴上任一点M的坐标为 x （图1—1），则以原点O为起点的有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 的数量就等于 x ，即 $OM = x$ 。

现在我们考虑，数轴上任意一条有向线段的数量，怎样用它的起点和终点的坐标来表示。为此，先证明：

对于轴上三点A、B、C不论它们的位置怎样，总有关系式

$$AB + BC = AC. \quad (1)$$

我们分下面三种情形来证明：

(1) 当 B 在 A 和 C 之间时(图1—4a、b): 因 $|AB| + |BC| = |AC|$, 且 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 的方向都相同(在图1—4(a)

中,三者都为正;而在图1—4(b)中,三者都为负), 所以 $AB + BC = AC$;

(2) 当 A 在 B 和 C 之间时: 根据(1), 有 $BA + AC = BC$, 因为 $BA = -AB$, 所以 $AB + BC = AC$;

(3) 当 C 在 A 和 B 之间时: 根据(1), 有 $AC + CB = AB$, 因为 $CB = -BC$, 所以 $AB + BC = AC$ 。

证毕。

利用数学归纳法不难证明:

对于轴上 n 个点 $A_1 A_2 \cdots A_n$, 不论它们的位置怎样, 总有关系式

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + \cdots + A_{n-1} A_n = A_1 A_n。$$

必须注意: $|AB| + |BC| = |AC|$ 不是总成立的, 当且仅当 A 、 B 、 C 三点在同一直线上, 而且 B 在 A 和 C 之间时才成立。如图1—4(c)的情形就不成立。

设数轴上两点 M_1 、 M_2 的坐标分别为 x_1 、 x_2 ,

则

$$OM_1 = x_1, OM_2 = x_2。$$

据公式(1)

$$M_1 M_2 = M_1 O + OM_2 = OM_2 - OM_1,$$

故求得数轴上有向线段 $\overline{M_1 M_2}$ 的数量的公式

$$\boxed{M_1 M_2 = x_2 - x_1。}$$

(2)

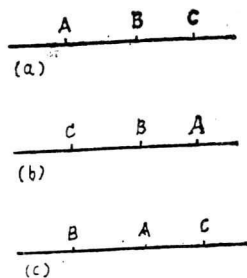


图 1-4

这就是说，数轴上有向线段的数量，等于其终点坐标减去起点坐标。

如用 d 表示数轴上两点 $M_1(x_1)$ 、 $M_2(x_2)$ 间的距离，则得

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|。 \quad (3)$$

2、平面上两点间的距离。建立直角坐标系后，平面上两点 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 间的距离 d ，可以利用它们的坐标表示出来。

设 M_1 、 M_2 在 x 轴和 y 轴上的射影分别是 P_1 、 P_2 和 Q_1 、 Q_2 ，

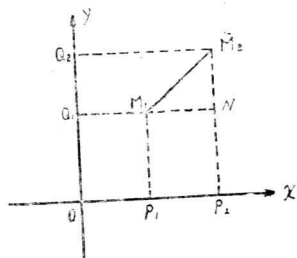


图 1-5

两直线 M_1Q_1 和 M_2P_2 相交于 N （图 1—5），则 $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形。

$$\text{由勾股定理 } |M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2}。$$

$$\text{得由公式(3)知 } |M_1N| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|NM_2| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

故得平面上两点间的距离公式

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

当 M_1 、 M_2 两点的连线平行（或重合）于坐标轴时，公式（4）仍然成立（请学员自己证明）。

特别地，平面上任一点 $M(x, y)$ ，到原点 O 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}。$$

〔例 1〕在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，求证：

$$|AD|^2 = \frac{1}{2} \left(|AB|^2 + |AC|^2 - \frac{1}{2} |BC|^2 \right).$$

证：取线段 BC 所在的直线作 x 轴， BC 的中点 D 作原点，建立直角坐标系，如图1—6所示。设 A 、 C 的坐标分别为 (b, c) 、 $(a, 0)$ ，则 B 的坐标为 $(-a, 0)$ 。

$$\begin{aligned} \text{因为 } |AB|^2 + |AC|^2 - \frac{1}{2}|BC|^2 \\ &= [(b+a)^2 + (c-0)^2] + [(b-a)^2 \\ &\quad + (c-0)^2] - \frac{1}{2}(a+a)^2 \\ &= 2b^2 + 2c^2, \end{aligned}$$

$$\text{又 } |AD|^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{所以 } |AD|^2 = \frac{1}{2} \left(|AB|^2 + |AC|^2 - \frac{1}{2} |BC|^2 \right).$$

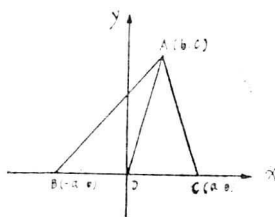


图 1-6

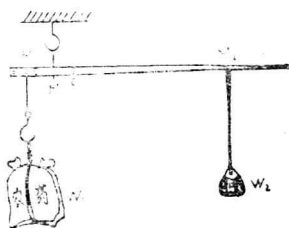


图 1-7

本例说明我们可用代数方法证明这个属于初等几何的问题（已知三角形的三边，计算中线的长）。通过建立坐标系，把几何问题转化为用代数的方法来解决，这种方法叫做解析法。这个例子表明，初等几何中的某些问题，用解析法来证明往往是比较容易的。

应用解析法证明几何问题，或解决三大革命实践中的有

关问题时，选取适当的坐标系，可以简化研究的过程。例如，选取图形中的一个点作原点，就能使这点的横坐标和纵坐标都是零；选取图形中的一条直线作 x 轴（或 y 轴），就能使这条直线上的点的纵坐标（或横坐标）都是零。

3、线段的定比分点，日常生活中所用的杆秤，是根据下面的道理制成的：重心 M 把线段 $\overline{M_1M_2}$ 分成与重量 W_1 、 W_2 成反比的两部分，即 $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{W_2}{W_1}$ （图1—7）。

我们现在就来研究，分线段成一定比值的分点的坐标问题。

设 M 为有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 所在直线上的一点，则两有向线段 $\overline{M_1M}$ 和 $\overline{MM_2}$ 的数量之比 $\frac{M_1M}{MM_2}$ ，叫做点 M 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 所成的比，通常用 λ 表示，即 $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ ；这点 M 就叫做有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 的分比为 λ 的定比分点。

当 M 为内分点（即 M 在 M_1 、 M_2 之间）时， $\lambda > 0$ （当 M 为 $\overline{M_1M_2}$ 的中点时， $\lambda = 1$ ）；当 M 为外分点（即 M 在 $\overline{M_1M_2}$ 之外）时， $\lambda < 0$ （因 $M_1M \neq M_2M$ ，故 $\lambda \neq -1$ ）；当 M 和 M_1 重合时， $\lambda = 0$ ；当 M 和 M_2 重合时， λ 不存在（图1—8）。

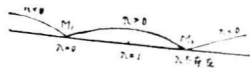


图 1—8

这里要特别注意：点 M 分 $\overline{M_1M_2}$ 所成的比，和点 M 分 $\overline{M_2M_1}$

所成的比是不一样的，前者是 $\frac{M_1M}{MM_2}$ ，后者是 $\frac{M_2M}{MM_1}$ 。

设 M_1 、 M_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，又设