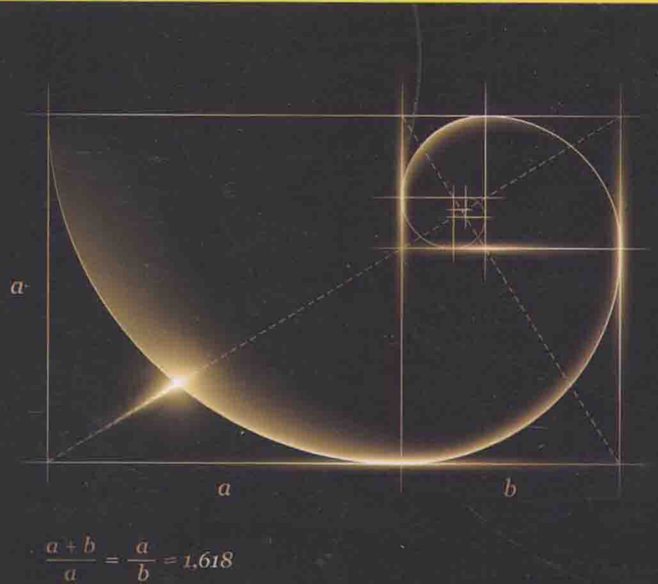
普通高等教育“十二五”重点规划教材

高等数学

（上册）

第三版

上海交通大学数学系　编



GAODENG SHUXUE

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"重点规划教材

高等数学(上册)

(第三版)

上海交通大学数学系编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数.

本书着重对基本概念、基本理论、基本方法的准确阐述，不过于强调技巧，更有利于提高读者的分析问题和解决问题的能力. 这次再版，删减了传统的繁琐、冗长的推导内容，不再列举繁杂的、特殊技巧的例题.

书中文字叙述力求通俗易懂、可读性强、使用面更广，可作为一般本科高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/上海交通大学数学系编. —3 版. —上海：上海交通大学出版社，2012

ISBN 978-7-313-00022-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 上… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 154905 号

高等数学(上册)

(第三版)

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：韩建民

常熟市梅李印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16 印张：19.25 字数：361 千字

1987 年 5 月第 1 版 2012 年 8 月第 3 版 2012 年 8 月第 14 次印刷

ISBN 978-7-313-00022-4/O 定价：33.00 元

第三版前言

高等数学内容之一的微积分学产生于17世纪，它是以运动变化的观点认识客观世界，以有限的形式去认识无限的事物. 由于高等数学知识在物理、天文、航空、化工、电机、医药、金融、管理、生命科学、社会科学等领域中有着广泛的应用，因此，高等数学是高等院校一门重要的基础理论课程. 它不仅是学好其他专业课程的有力工具，而且对于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和解决实际问题的能力起着重要的作用. 正如2003年"工科本科数学教学基本要求"所指出的那样："数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一种科学，而且是一种文化."把我国建设成一个文化强国，离不开数学教学对人才的培养.

在学校里学习的高等数学主要内容是微积分，它是人类思维的伟大成果之一，其基本概念、基本理论和方法已十分成熟，不需要也不应该去改变它. 因此，本书将对微积分的内容按照传统的叙述介绍给读者.

本书是在2009年上海交通大学数学系编写的《高等数学》(第二版)的基础上由李重华和贺才兴教授两人重新编写修订而成. 本书中语言力求通俗简炼，由浅入深；定义、定理要求表述严谨. 对原书有些繁冗内容进行删除，对例题和习题中的证明较难及技巧性较高的题目也进行删除，并补充和更换一些新题目. 为了便于授课教师布置课后练习，把原先附在每一章后面的习题都分解到每一小节后面.

本书分上、下两册，上册内容包括一元函数微积分、空间解析几何与向量代数；下册内容包括多元函数微积分、微分方程、级数. 本书可作为广大高等院校非数学专业《高等数学》(微积分)的教材或参考书.

本书的编写得到上海交通大学数学系孙薇荣、景继良教授和王承国、王铭副教授的支持，在此仅表示诚挚的感谢. 限于编者水平，书中有不当之处，望同仁及读者批评指正.

李重华　贺才兴

2012年2月于上海交通大学

目　　录

1 函 数

高等数学是人们探索研究万物运动与变化规律的重要工具。反映事物运动变化之间的关系，即函数，是高等数学中最基本的概念，它也是高等数学研究的主要对象. 也就是说，高等数学研究的对象是:变量以及变量之间的数量关系.

高等数学的主体是**微积分学**，它的先驱是 17 世纪的牛顿和莱布尼兹，在他们之前的启蒙者有卡法拉利、弗马、海更斯、格里哥里等人. 直到 19 世纪初叶由柯西及其他学者确立微积分学的精确而健全的理论基础. 微积分学的历史是非常令人兴奋而有趣的，在这里不作详细叙述.

1.1 函数的概念

1.1.1 变量与常量

通常我们遇到的物理量(如质量、温度、压力、速度)和几何量(如长度、面积、体积)等的数值都是通过度量确定的. 数学所涉及的量是去掉它的具体内容，只考虑它的数值，在研究的各种现象中，有些量的数值在发生变化，而另一些量的数值保持固定. 例如，质点在匀速运动中时间与距离在变化，而速度保持为常数.

变量是数在改变的量，常用字母 x、y、z、u 等表示；而**常量**是数值保持固定的量，常用字母 a、b、c 等表示.

我们在考察物理理解时，发现同一个量在一种情况中是常量，而在另一种情况中它却是变量. 例如，物体在匀速运动中，速度是一个常量，而在等加速运动中速度是一个变量.

在数学研究某一过程中，常量经常被看作是变量的特殊情况，它的数值始终是相同的. 有一种情况，一个量在任何情况中都有相同数值，我们称它为**绝对常量**，例如，圆的周长与它半径之比值(圆周率)是个绝对常量，它的数值为 $\pi=3.14159\cdots$.

变量取值的集合称为变量的变化范围，在高等数学中常用**区间**表示. 区间是位于已给点 a 和 b(端点)之间所有数值的集合，包含端点的称为**闭区间**，不包含端点的称为**开区间**. 下面用符号表示它们.

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$;

闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

左开右闭区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$;

左闭右开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$;

无穷区间 $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$;

$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

图 1-1 给出部分区间在数轴上的表示.

以上各种区间中的 a 和 b 称为**区间的端点**,a 称为**左端点**,b 称为**右端点**. 属于区间内而不是端点的点称为**内点**.

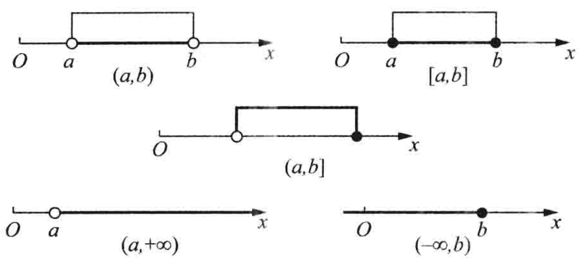


图 1-1

开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta(\delta>0)\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**(或称点 a 的邻域),记作 $U(a,\delta)$,a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径;而对于点 a 除外的邻域 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为**去心邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$(图 1-2).

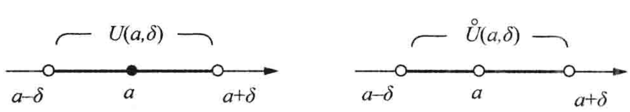


图 1-2

1.1.2 实数的绝对值与不等式

每一个**实数**都可以用数轴上一个确定点表示,两个不同的实数用数轴上两个不同的点表示. 数轴上的每一点仅表示一个实数(有理数或无理数). 所有实数与数轴上所有点之间有**一一对应**的关系,即每一个数仅对应于一个点;反之,每一个点仅对应于一个数. 因此,我们经常认为“数 x”的“点 x”的意义是等价的.

定义 实数 a 的**绝对值**是满足下面条件的非负实数，记作 $|a|$，即

$$|a|=\begin{cases} a, & 若\ a\geqslant 0, \\ -a, & 若\ a<0. \end{cases}$$

例如，$|3|=3$，$|-7|=7$，$|0|=0$.

由绝对值定义知，关系式 $a\leqslant|a|$ 对任何 a 都成立.

根据定义，明显地有 $|a|\geqslant 0$. 并且，当且仅当 $a=0$ 时，$|a|=0$. 此外，还有

$$|-a|=|a|,\ |b-a|=|a-b|.$$

从几何图形上来看，$|a|$ 就是原点到 a 点的距离，而 $|a-b|$ 则为 a、b 两点之间的距离.

下面列出绝对值的一些性质：

1° 乘积的绝对值等于各因子的乘积. 即

$$|ab|=|a||b|.$$

2° 商的绝对值等于绝对值的商. 即

当 $a\neq 0$ 时，$\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}$.

3° 代数和的绝对值不超过这些项绝对值的和. 即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证明 设 $a+b\geqslant 0$，那么

$$|a+b|=a+b\leqslant|a|+|b|.$$

因为 $a\leqslant|a|$ 与 $b\leqslant|b|$.

设 $a+b<0$，那么

$$|a+b|=-(a+b)=(-a)+(-b)\leqslant|a|+|b|.$$

此证明容易推广到更多项数的代数和.

4° 差的绝对值不小于绝对值的差. 即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证明 设 $a-b=c$，那么，$a=b+c$.

从上面已证结果③得

$$|a|=|b+c|\leqslant|b|+|c|=|b|+|a-b|.$$

于是 $|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

5° 不等式 $|a|\leqslant\delta\ (\delta>0)$ 等价于 $-\delta\leqslant a\leqslant\delta$.

证明 如果 $|a|\leqslant\delta$，那么 $-|a|\geqslant-\delta$.

又因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，因此有 $-\delta\leqslant a\leqslant\delta$.

反之，设 $-\delta\leqslant a\leqslant\delta$，即

当 $a\geqslant 0$ 时，有 $|a|=a$，因此 $|a|\leqslant\delta$；

当 $a<0$ 时,有 $|a|=-a$,由假设 $-\delta\leqslant a$,得 $\delta\geqslant -a$,从而有 $|a|\leqslant\delta$.

上面的绝对值性质我们会经常遇到,望读者熟记之.

1.1.3 函数概念

自然界中各种现象的变化不是孤立的、各不相关的,而是互相依赖的. 我们先看两个例子.

例 1 半径为 R 的圆面积 Q.

解 如果半径 R 取变化的数值,那么圆面积 Q 也取变化的数值. 当半径 R 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一数值 R_1 时,圆面积就有一个确定的数值 Q_1 与它相对应,它们的依赖关系由如下式子所确定:$Q=\pi R^2$,其中 π 是一个常数 3.141 59….

例 2 在空中自由下落的物体下落的路程 s 与时间 t 的关系是如何?

解 人们经过多种试验,发现路程与时间有如下确定的关系:$s=\dfrac{1}{2}gt^2$,其中 g 是重力加速度,其值为 $9.8\,\mathrm{m/s^2}$. 这就是说路程与时间有依赖关系.

自然界中这些例子是很多的,从这些例子中所说明的两个变量之间的依赖关系,抽象出它们共同的特性得到一个重要概念,即函数概念. 我们用数学定义的形式把它表述如下.

定义 在某一运动变化过程中有两个变量 x 和 y,如果变量 x 取值范围是一个数集 D,对于其中所取的每一数值,按照一定的法则 f,总有一个确定的 y 值与之相对应,那么称 y 为 x 的**函数**. 记作

$$y=f(x),x\in D.$$

或记作 $y=\varphi(x)$,$y=y(x)$等.

变量 x 称作**自变量**,y 称为**因变量**. 变量 x 和 y 的关系称为**函数关系**.

自变量取值的数集 D 称为函数 $f(x)$的**定义域**,记作 D_f. y 值构成的数集 R 称为函数 $f(x)$的值域,记作 R_f.

如果函数的定义域为一个区间,则称这区间为函数的**定义区间**.

由函数的定义知道,函数定义有两个要素:一个是函数的对应法则,另一个是函数的定义域. 两个函数只有它们的对应法则相同,定义域相同,才相同. 例如 $y=\lg x^2$ 和 $y=2\ln x$ 是两个不同的函数,因为它们的定义域不相同,前者为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,后者为 $(0,+\infty)$.

如果函数关系 $y=f(x)$是由解析式子给出,我们就可从该式子有意义的自变量取值范围来确定函数的定义域.

例 3 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+6}$的定义域.

解　对于分子而言，必须满足 $x-2\geqslant 0$，对分母而言它不能等于零，即 $x^2-5x+6\neq 0$，x 必须满足下列不等式组：

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x^2-5x+6\neq 0. \end{cases}$$

解得 $x\geqslant 2$ 且 $x\neq 2$，$x\neq 3$，所以定义域为 $D_f=(2,3)\cup(3,+\infty)$.

例 4　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\lg(2-x)}$ 的定义域.

解　这里 $\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 2-x>0, \text{且 } 2-x\neq 1. \end{cases}$

解得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$，$x<2$，且 $x\neq 1$，故定义域为

$$D_f=\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2).$$

这里需要指出一点：有时确定函数定义域，不仅要考虑解析式子，而且要考虑函数所表示的实际意义. 例如半径为 R 的圆面积 $Q=\pi R^2$ 的定义域是 $R>0$，即 $R\in(0,+\infty)$.

1.1.4　函数的表示法

(1) 解析表示法

借助某些数学运算来表示自变量和因变量的关系，如上面例 1 和例 2 所示是函数的解析表示法.

有时需要用几个解析式子表示函数，常称它为**分段函数**.

例 5　$y=\begin{cases} x^2, & \text{当 } 0\leqslant x<1, \\ 1-x, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$

例 6　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

通过这一函数可以表示任何实数的绝对值：$|x|=x\operatorname{sgn}(x)$，因此该函数起了 x 的符号作用，故称它为**符号函数**.

这个函数也可理解为由解析式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示的函数.

(2) 表格表示法

自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值对应于函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的值，写出确定的次序：

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

例如，在初等数学中所遇到的三角函数表、对数表等都是函数的表格表示法.

在研究自然界现象的实验结果，往往是以两个变量之间的函数关系，通过表格表示. 例如，在研究气象情况时，对空气温度的测量，温度与时间的关系由下列表格表示：

t(小时)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T(温度)	0	-1	-2	-2	$-\frac{1}{2}$	1	3	3	3.5	4

这表格定义 T 为 t 的函数.

(3) 几何表示法

在平面直角座标系中，存在一个点 $M(x,y)$ 的集合，它们不位于平行 y 轴直线上的两个点，这些点的集合定义一个函数 $y=f(x)$. 点的横坐标表示自变量的值，点的纵坐标表示函数的值.

横坐标为自变量的值和纵坐标为对应函数值的平面上点的集合称为已给函数的图形. 它是函数的几何表示法.

例如，在中学学习中所遇到的三角函数图形、抛物线图形、直线方程图形等都是函数的几何表示法.

习题 1-1

1. 设 $f(x)=x^2+1$，求 $f(3)$，$f(a)$，$f(x^2)$，$[f(x)]^2$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$，求 $f(x)+f(-x)$.

3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases} 2^x, & -1<x\leqslant 0, \\ 2, & 0<x\leqslant 1, \\ x-1, & x<x\leqslant 3. \end{cases}$

求 $\varphi(2)$，$\varphi(3)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+5}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{2}\log_a\dfrac{1+x}{1-x}(a>0,a\neq 1)$；

(3) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{4x+5}}$；　　(4) $4(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{x-1}}$；

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$；　　(6) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$；

(7) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

6. 下列各函数中，$f(x)$与$g(x)$是否相同？

(1) $f(x)=e^{\ln x}, g(x)=x$；　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$；

(3) $f(1)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan x$；　　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

1.2 函数的简单性质

讨论函数，主要是认识函数值随自变量变化而定的规律性，这就需要研究函数的一些性质. 随着数学工具的发展，可以逐步对函数作深入的研究. 这里只讨论函数的一些简单性质.

(1) 单值性

函数的定义有时放宽到，对每个 x 的值在某一范围内对应的不仅仅是 y 的一值，而是 y 的几个值，甚至是 y 的无穷多个值，这时，出现多值函数. 按照前面所述的函数定义，函数值是唯一的，我们称之为单值函数.

今后，当我们说到函数时，是指定为单值函数，如果需要涉及多值函数时，我们会特别指出.

例如，由方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ 确定的关系式

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

应当分别看作两个函数

$$f(x)=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, g(x)=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

而每一个都是单值的. 函数的单值性，反映到它的图形上是：任何与 Oy 轴平行的直线，如果与它的图形相交，只能有一个交点(图 1-3).

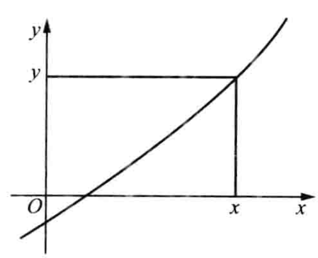


图 1-3

(2) 奇偶性

设有函数 $y=f(x)$，它的定义域 D 对称于原点. 如果对任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任何 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 奇函数的图形对称于原点，而偶函数的图形对称于 Oy 轴. 例如函数 $y=x^3$（图 1-4）、$y=\sin x$（图 1-5）和 $y=\tan x$（图 1-6）都是奇函数；$y=x^2$（图 1-7）和 $y=\cos x$（图 1-8）都是偶函数.

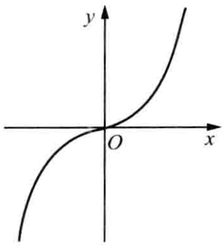


图 1-4

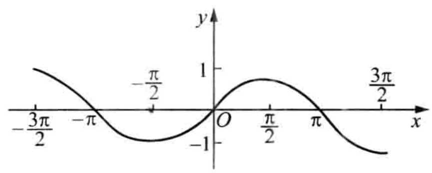


图 1-5

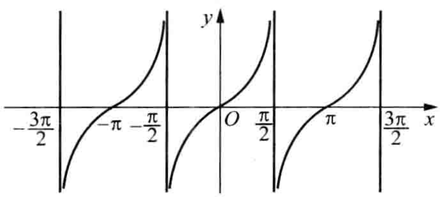


图 1-6

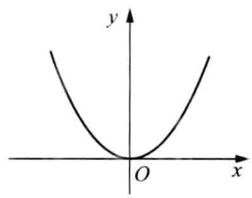


图 1-7

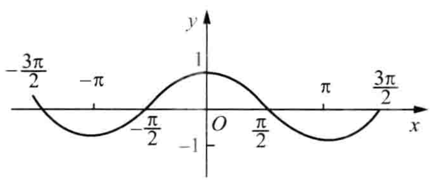


图 1-8

（3）单调性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 如果对任意两点 x_1、$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上**单调增加**；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上**单调减少**. $f(x)$ 统称为**单调函数**.

由单调性的定义，可知在某区间内的单调增函数为沿横轴正向而上升的曲线；而单调减函数的图形为沿横轴正向而下降的曲线（图 1-9）.

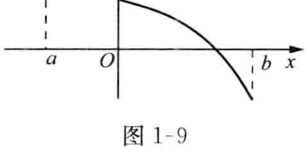


图 1-9

(4) 周期性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在非零常数 l，使

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，而 l 称为函数的一个**周期**.

由定义可知，kl(k 为非零整数)也是它的周期，通常所讲的周期是指最小的正周期(若它存在的话). 例如，$\sin x$、$\cos x$ 与 $\tan x$ 都是周期函数，它们的周期分别为 2π、2π 和 π.

(5) 有界性

设有函数 $y=f(x)$，$x\in X$. 若存在正数 M，使

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 为**有界函数**.

若存在常数 A 和 B，使

$$A\leqslant f(x)\leqslant B$$

则 A 和 B 分别称为 $f(x)$ 的**下界**和**上界**. 当然，比 A 小的数也是 $f(x)$ 的下界；比 B 大的数也是 $f(x)$ 的上界.

显然，如果 $f(x)$ 是有界函数，则它必有下界和上界；反之，如果 $f(x)$ 同时有下界及上界，那么它必是有界函数. 在几何上，有界函数的图形介于两条平行于 Ox 轴的直线之间. 例如，$y=\sin x$ 是有界函数，因对于任意 x，$|\sin x|\leqslant 1$. $y=1/x$ 在 $[1,2]$ 上是有界的，1 是上界，3 也是上界；1/2 是下界，-1 也是下界. 但 $y=1/x$ 在 $(0,1)$ 上不是有界的. 不是有界的函数称为**无界函数**.

上面举出了函数的几种简单性质，从这里可以看出，函数的性质都能在其图形中得到反映；因此可以把函数的规律性，通过图形显示出来.

习题 1-2

1. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\log_3\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；

(5) $y=x^2\cos x-1$；　　(6) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出它的周期 T：

(1) $y=1+\tan x$；　　(2) $y=\cos(3x+1)$；

(3) $y=x\sin x$；　　(4) $y=\sin^2 x$.

3. 容积为 100 cm^3 的封闭圆柱体，试将它的表面积 S 表达成底圆半径 r 的函数.