简易振动计算手册

姚起杭　主编

航空工业出版社

责任编辑：刘秋爽　　吴　成　　刘　阳
技术编辑：白京莲

ISBN 7－80046－147－5/Z·140
定价：35.00 元

简易振动计算手册

编者 姚起杭 申仲翰 朱善庆
潘树祥 秦桂骧 胡宏东

航空工业出版社

1992

（京）新登字 161 号

内容提要

本书主要介绍各种简易的工程振动计算公式和图表，所涉及的结构形式包括常见的基本弹簧—质量系统、索、梁、膜、板、壳、流体系统、耦合系统等，内容广泛全面，方法简单具体，特别适合于广大非振动专业工程技术人员进行振动计算时应用，也可作为有关科研人员、工科院校教师、高年级学生和研究生进行振动分析计算时作为重要参考资料。

简易振动计算手册
姚起杭　主编

航空工业出版社出版发行
（北京市安定门外小关东里 14 号）
—邮政编码：100029—
全国各地新华书店经售
航空工业出版社印刷厂印刷

1992 年 5 月第 1 版　　1992 年 5 月第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16　　印张：23.5
印数：1—1000　　字数：585 千字
ISBN 7—80046—147—5/Z・140
定价：35.00 元

前　言

振动是物质运动的一种重要形式，它是物体在时间过程中发生的一种往复式位形变化现象，是自然界和工程中极为常见的一种普遍运动形式，正是由于这种运动的普遍性，所以它一直是物理学和力学研究的重要分支。

在人类的生存和生产活动中，早已感受到振动运动的重要性，例如地震引起的地动山摇、微风吹拂引起的风歌以及语言、音乐等都是古往今来普遍存在的现象。对此，人类过去一般只能被动地盲目应付或只能凭经验来处理，只有到了中国的东汉时期，伟大的思想家和科学家张衡发明地动仪，才揭开了人类预报和防止振动危害的历史篇章；这一发明既是人类观测和研究振动现象的起点，也是中华民族勤劳智慧的结晶。

十六世纪末，牛顿（Isaac Newton）和莱伯尼兹（G. W. Leibnitz）通过研究摆和弦的振动问题，奠定了分析研究振动现象的数学、力学基础。从此，人们开始应用近代科学方法进行振动研究。通过两个世纪的积累，在计算技术和电子技术发展的推动下，从本世纪三十年代开始，振动研究进入了一个蓬勃发展的新时期，各种应用理论和方法、各种测试分析设备和软件不断涌现，并业已大量应用于现代社会的许多领域之中。例如，各种工业机械、电子产品、仪器仪表、家电以及各类建筑物和交通工具等无一不包含有振动技术的应用。所以振动研究从来就不是象牙塔中的摆设，而是与人类生产活动和现代社会生活密切相关的一项应用技术。

振动研究和应用的基础是物体本身的自然频率及相应的位

形变化型式(自然模态),对此虽然已经发展了各类振动分析计算方法,但其中阳春白雪者居多,大体上不能完全适应非专业人士进行快速简易振动计算的需要。因此,许多工程人员一直希望能有一种便于他们进行设计计算的简易振动计算公式和图表。本书编者们认为满足工业界的这一要求是振动工作者义不容辞的责任和义务。所以我们在航空工业系统组织的振动应用技术课题研究工作中,认真积累并广泛搜集材料,为最终形成并编写本书奠定了基础。

编者们希望以本书的出版作为对我们伟大祖国实现经济腾飞的菲薄献礼,同时也算是向工程界朋友们偿付一项我们长期铭记于心的夙愿。但是,本书只是一次抛砖引玉的尝试,在搜集材料和编辑整理过程中必然存在许多疏漏和不足之处,希望振动界同行和广大读者不吝指正,更希望能提供有价值的补充材料供本书进一步修订应用。编者还希望对大力支持和组织本书编写和出版的中国航空科学技术研究院、飞机结构强度研究所、航空工业出版社、航空工业总公司飞机动力环境课题组,以及杨学勤、刘秋爽、黄苏桥、吴成等同志致以深切的谢意。

姚起杭

1992年4月于西安

目　　录

第一章 绪论

1.1 部分术语定义

梁 一种横截面特性及挠度仅沿单一轴线变化的结构。细长梁是一种横截面尺寸比其跨度以及振动节点间的距离小得多的梁，因此细长梁可忽略与局部扭转相关的惯性和横截面剪切变形。

边界条件 施加于结构上的与时间无关的约束。边界条件可分为几何边界条件和动力边界条件。几何边界条件是由于几何约束而引起的。例如：简支刚性壁结构在简支点的位移为零。动力边界条件是由于结构的力或力矩而产生的。例如：简支点允许自由转动，所以简支点的动力边界条件力矩为零（见简支边界、固支边界、自由边界、滑动边界条件）。

体弹性模量 各方向上相等的拉、压应力与所产生的体积变化量之比。对于各向同性材料 $B=E/[3(1-2\nu)]$。

钢索 一种仅能承受平行于本身轴线载荷，具有均匀质量的一维结构。钢索的弯曲刚度为零。钢索不同于链，它在拉伸载荷作用下可以伸长。

钢索模量 单位纵向应变所需的纵向应力（轴力与横截面积之比）的变化率。如果是弹性杆，则钢索模量等于弹性杆的模量；如果是编制弹性纤维，则钢索模量将小于纤维元件的弹性模量。典型的情况是钢丝绳的弹性模量大约是钢纤维弹性模量的 50%。

重心 物体可以平衡的点。在整个物体中，所有单元质量乘以单元离开通过重心的任何轴线的距离的总和为零。重心有时也可称为质心。

形心 平面的几何中心。在整个平截面中，所有单元面积乘以单元离开通过形心的任何轴线的距离的总和为零。

链 均匀的、具有质量的仅能承受平行于本身轴线拉伸载荷的一维结构。链的弯曲刚度为零。不同于钢索，链在承受拉伸载荷时不能伸长。

固支边界 一种几何边界条件，沿这种边界结构既不能移动也不能转动。

集中质量（点质量） 具有有限质量，围绕它的质量中心而转动的其惯性矩可取为零的一个空间点。

阻尼 结构吸收振动能量的能力。阻尼可以是结构材料内部产生的（材料阻尼），结构与周围的流体相互作用产生的（流体阻尼），以及结构结合处的接触或摩擦产生的（结构阻尼）。

变形 结构离开平衡位置的位移。

密度 单位体积中材料的质量。

弹性 材料的变形随载荷的增加而线性增加且与载荷的符号及大小无关的特性。许多重要结构材料在载荷低于屈服载荷时是弹性的。

自由边界 一种沿结构边界不受任何限制的边界条件。例如，自由振动悬臂梁的自由端是自由边界。

各向同性 转动度量坐标轴时材料特性不改变的一种术语。各向同性材料仅需要两个弹性常数即弹性模量（E）和泊松比（ν）就可完全确定其弹性性能。

线性 形容结构或材料的所有变形随载荷增加而成比例地增加，且与载荷的符号、大小、分布及方向无关的一种术语。许多重要结构在载荷处于最大线性载荷以下是线性的。

薄膜 一种具有质量、弹性的均匀薄片。它仅能承受自身平面内的拉伸载荷。薄膜可以是象鼓面一样的平面，也可以是象肥皂泡一样的曲面。

模态(特征向量) 对结构定义的一种函数，当结构以单一模态振动时，模态描述结构中任何一点的相对位移，每一模态与结构的每一固有频率相对应。如果结构在某一方向的位移记为 $Y(x,t)$，这里 x 是结构上的一点，t 为时间，且结构仅在 K 模态下振动，位移可记为：

$$Y(x,t)=\widetilde{Y}_k(x)Y_k(t) \tag{1-1}$$

这里 $\widetilde{Y}_k(x)$ 是模态函数，它仅是空间的函数，而 $Y_k(t)$ 仅是时间的函数。如果结构以数种模态振动，则总位移是模态位移的总和：

$$Y(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_i(x)Y_i(t) \tag{1-2}$$

弹性模量(杨氏模量) 在给定的材料中，单位正应变所对应的正应力的变化率。弹性模量具有压力的单位。对于大多数材料，在线弹性极限范围内，弹性模量与应力的符号无关。有些材料，例如木材，弹性模量具有方向性。

物体的惯性矩 在物体内，每个元素质量乘以元素到给定轴距离平方的总和。

截面惯性矩 在截面内，每个单元面积乘以单元到给定轴距离平方的总和。

固有频率(特征值) 线弹性结构一旦引起了运动，它便以这样的频率振动。一种结构可以具有许多固有频率，最低的频率称为基频。每个固有频率都是与变形模态相关的。固有频率可以按周/秒(Hz)定义或弧度/秒定义。

中性轴 在结构截面中应力为零的轴。如果各向同性梁的轴向载荷为零，而梁仅承受弯曲载荷，则中性轴一定通过截面形心。

节点 在给定的结构振动模态中，不产生挠曲的点。反节点是在给定模态中，结构振动挠曲最大的点。

正交异性 如果薄层体材料特性具有两个相互垂直的对称面，正交异性就是对这种薄层体的术语。确定正交异性体弹性性能需要 4 个材料常数。正交异性薄层体常见的例子是纤维增强可塑性薄板或薄木板胶合在一起的胶合板。

简支边界 结构沿给定边界可自由转动但不能移动的一种边界条件。

板 一种二维弹性结构，它是由二维平板材料组成的。

泊松比 给定材料在均匀纵向拉伸载荷作用下其横向收缩(膨胀)与纵向膨胀(收缩)量的比率。通常泊松比接近于 0.3，且无量纲。有些材料，例如木头，泊松比是有方向性的。对于大多数材料，在弹性极限范围内，泊松比是与作用应力的符号无关的。

物体的惯性积 物体的每一元素质量乘以元素距相互垂直的两轴的距离之积的总和。

截面惯性积 截面的每一面积元素乘以元素距相互垂直的两轴的距离之积的总和。

物体的回转半径 物体的质量惯性矩除以物体的质量所得量的平方根。

截面回转半径 截面的面积惯性矩除以截面面积所得量的平方根。

转动惯性 与结构转动相关的惯性。例如陀螺的顶部保持其转动。

剪切梁 一种剪切变形大大超过弯曲变形的梁。

剪切系数 无因次量，取决于梁截面的形状。引入这一量是为了考虑剪切应力和应变在梁

截面上的不均匀分布情况。通常剪切系数定义为整个截面上的剪应变与形心处剪应变的比率。

剪切模量 材料具有单位剪应变时剪应力的变化率。对于大多数材料，剪切模量不依赖于所作用的应力的符号。而有些材料，例如木材，则是具有方向性的剪切模量。对于各向同性弹性材料，$G=E/[2(1+\nu)]$。

壳 一种薄弹性结构，它的材料限制在闭合曲面附近，曲面即为壳的中面。曲板是一种壳，没有弯曲刚度的壳是一种薄膜。

滑动边界 一种结构可以沿边界在给定方向移动但不能转动的边界条件。

晃动 在装满液体的箱体或水槽中，当液体受扰动时所形成的表面波动现象。

声速 声音在无限的流体或固体中的一种非常小的压力波动传播速度。

弹簧常数 在线弹性结构中，产生单位变形增量所需要的载荷改变量。

扭转弹簧常数 在线弹性结构中，产生单位转动所需要的扭矩改变量。

绳 仅能承受平行于自身轴线拉力的无质量一维结构。绳是一种无质量钢索。

粘性 流体阻止剪切变形的能力。线性（牛顿）流体的粘性定义为作用于流体的剪应力与其产生的剪应变的比值。运动粘性定义为粘性除以流体的密度。

1.2 符号定义

本手册在每个表格的上面和文中给出了符号的定义。在某些情况下，也定义了特殊符号。下面列出的符号在所有情况下是一致的，这些符号一般也遵循其它文献所引用的符号。一种例外是这里的 I 表示所有截面的惯性面积矩，J 表示物体的质量惯性矩。

1.2.1 文字符号

A	面积（长度^2）；
B	体模量（力 / 面积）；
C	重心或质心，也为扭转常数（长度^4）；
E	弹性模量（力 / 面积）；
G	剪切模量（力 / 面积）；
I	惯性面积矩（长度^4）；
J	质量惯性矩（质量 × 长度^2）；
K	剪切系数（无因次）；
L	长度；
M	质量；
P	载荷（力）；
S	每单位长度或边长的拉力（力 / 长度）；
T	拉力（力）；
X,Y,Z	相互正交的位移（长度）；
c	声速（长度 / 时间）；
f	频率（赫兹）；
g	重力加速度（长度 / 时间^2）或克；
K	挠曲弹簧常数（力 / 长度）；
m	单位长度质量（质量 / 长度）；

p	单位长度载荷(力/长度)或压力(第十四章);
x,y,z	相互垂直的坐标(长度);
$\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}$	分别为与位移 X,Y,Z 有关的模态(无因次);
α	角(弧度)或无因次常数;
γ	单位面积质量(质量/长度^2)或特定的热比(无因次);
ε	应变(无因次);
θ	旋度(弧度);
$\tilde{\theta}$	与旋度 θ 相关的模态(无因次);
μ	材料密度(质量/长度^3);
ν	泊松比;
π	$=3.1415926$;
ρ	流体密度(质量/长度^3);
σ	应力(力/面积)或梁模态参数(无因次量,见第五章);
ω	频率(弧度/秒);
$\mathscr{J}$	一类贝塞尔函数;
$\mathscr{M}$	矩(力×长度);
$\mathscr{Y}$	二类贝塞尔函数;
k	扭转弹簧常数(力矩/角度)。

1.2.2 图示符号

1.3 单位

本手册给出的公式用任何一致的单位都可以得到正确的结果。一致单位就是不必引出转换系数，牛顿第二定律力等于质量与加速度的乘积就可以满足。在一致单位中，作用在单位质量上的单位力产生一个单位的加速度：

1 单位力＝1 单位质量×1 单位加速度

例如，如果力的单位选为 kg，加速度的单位为 cm/s^2，那么，质量的单位就是 1kg 的力将使它产生 $1cm/s^2$ 的加速度。满足这个准则的质量单位在地球表面重 1/980.7kg，并表示为 kg/g，这里 kg 是力，g 是地球表面的重力加速度，等于 $980.7cm/s^2$，这个质量单位可表示为 $kg \cdot s^2/cm$。注意，企图使用 kg(或磅)既作为力的单位又作为质量的单位是错误的，虽然在定义单位制时可以用千克既作为力的单位又可作为质量的单位。

实践中的工程技术人员有可能使用不一致的单位而产生错误。使用表 1-1 所列出的任何一种单位制都可以避免产生这样的错误。而当缺乏对于象牛顿、达因、斯这些参量的直观物理感觉时，把最终结果转换成不一致的，但更直观的单位制是可行的。可以确切地说，一致的单位对于正确的动力分析是重要的。

表 1-1　一致单位

	力	质量	长度	时间	压力	密度	g①
1	N②	kg	m	s	Pa③	kg/m^3	$9.807m/s^2$
2	kg	kg/g	m	s	kg/m^2	$kg/g \cdot m^3$	$9.807m/s^2$
3	kg	kg/g	cm	s	kg/cm^2	$kg/g \cdot cm^3$	$980.7cm/s^2$
4	dyn④	g	cm	s	dyn/cm^2	g/cm^3	$980.7cm/s^2$
5	g	g/g	cm	s	g/cm^2	$g/g \cdot cm^3$	$980.7cm/s^2$
6	lb	slug⑤	ft⑥	s	lb/ft^2	$slug/ft^3$	$32.17ft/s^2$
7	lb	lb/g	in⑦	s	lb/in^2	lb/in^3	$386.1in/s^2$

注：① g＝地球表面的重力加速度；

② 1 N＝在 1 m/s^2(＝0.2248 lb)条件下加速 1kg 质量所需要的力。在地球表面上 1 kg 质量重 9.807 N；

③ 1 Pa＝1 N/m^2＝10^{-5} bar＝10 dyn/cm^2＝1.4503×10^{-4} lb/in^2；

④ 1 dyn＝在 1 cm/s^2(＝10^{-5} N＝2.248×10^{-6} lb)条件下加速 1 g 质量所需要的力；

⑤ 1 slug＝1 lb/g。在地球表面上 1 slug 质量重 32.17 lb；

⑥ 1 ft＝12 in＝0.3048 m；

⑦ 1 in＝2.54 cm。

本手册使用的一些单位符号：

空间和时间	力	频　率	质　量
度 deg	牛顿 N	赫兹 Hz	克 g
弧度 rad	千牛顿 kN		千克 kg
米 m	帕斯卡 Pa		磅 lb
厘米 cm	分贝 dB		斯 slug
英寸 in	达因 dyn		
英尺 ft			
秒 s			

1.4　关于原理及分析方法的说明

具有质量和弹性的任何结构都会有一个或更多个固有振动频率。固有频率是结构动能和势能交换的结果。动能与结构质量的速度有关，而势能与弹性结构的弹性变形所贮存的能量有关。正象在硬木地板上弹跳的皮球，把在飞行中最高点的势能转换成它下落的动能，弹性结构在来回振动时将弹性变形的势能转换成振动速度。动能和势能相互转换率就是固有频率。

如果结构是线性的，也就是说，不论结构承受载荷的大小，分布以及方向，其变形与载荷成正比，且质量是不变的，那么结构的固有频率是不依赖于振幅的。例如，考虑图 1－1 所示的弹性体系，如果刚体离开平衡位置的位移为 Y_0，那么弹簧的势能改变为：

$$\Delta PE=\int_0^{Y_0} F\mathrm{d}Y$$

$$=\int_0^{Y_0} KY\mathrm{d}Y=\frac{1}{2}KY_0^2 \tag{1-3}$$

K 是弹簧常数，即弹簧力 F 与位移 Y 的比率。假设振动是时间 t 和频率 f 的谐振动

$$Y=Y_0\sin(2\pi f)t \tag{1-4}$$

那么在任何时刻物体的速度为：

$$\dot{Y}=Y_0(2\pi f)\cos(2\pi f)t \tag{1-5}$$

这里 $\dot{Y}$ 表示 Y 对时间的导数。物体的最大速度是在时间 $t=n/(2f)$，$n=1,2\cdots$，那时系统的变形为零，$Y=0$。刚体的最大动能是：

$$\Delta KE=\frac{1}{2}M\dot{Y}_{\max}^2=\frac{1}{2}MY_0^2(2\pi f)^2 \tag{1-6}$$

注意，势能（方程(1-3)）和动能（方程(1-6)）二者都是正比于振幅的平方，动能是频率的函数，

而势能则与频率无关。

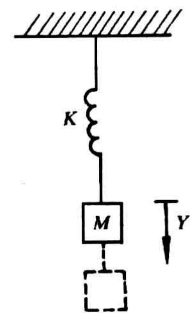
如果我们假设弹簧是无质量的并且物体是完全刚性的，那么系统的全部势能与弹簧的变形有关，系统的全部动能与物体的速度有关。由于不受外力作用，系统的总能量是不变的。这样，系统在 $Y=\pm Y_0$ 时的最大势能必然等于 $Y=0$ 时的最大动能：

$$\Delta KE = \Delta PE \tag{1-7}$$

将方程(1-3)和(1-6)代入上述方程中，解出 f 为：

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{M}\right)^{1/2} \tag{1-8}$$

这里固有频率 f 具有赫兹的单位。弹簧—质量系统的固有频率随弹簧刚度的增加而增加，随物体质量的增加而降低。所有线性结构的固有频率随结构刚度的增加而增加，随结构质量的增加而减少。



K 为弹簧常数

M 为质量

图 1-1 弹性体系

弹簧—质量系统的固有频率可以由求解更精确的运动方程而获得。因为弹簧作用于物体上的力以及重力必须等于物体的质量乘以物体的加速度，物体的运动方程是：

$$-KY - Mg = M\ddot{Y} \tag{1-9}$$

KY 是作用于物体上的弹簧力，Mg 是作用于物体上的重力，g 是重力加速度。由于这些力是向下作用，因而为负值。$M\ddot{Y}$ 是物体的质量与加速度的乘积。方程(1-9) 可改写为：

$$M\ddot{Y} + KY = -Mg \tag{1-10}$$

此方程有下面的解：

$$Y = A\sin\omega t + B\cos\omega t - \frac{Mg}{K} \tag{1-11}$$

式中固有频率为：

$$\omega = 2\pi f = \left(\frac{K}{M}\right)^{1/2} \tag{1-12}$$

A 和 B 是具有长度单位的常数。由(1-11) 式可知方程的解是由以频率 ω 为谐振分量以及与时间 无关的分量组成。谐振分量相当于在固有频率上的简谐运动，而静态分量($-Mg/K$) 则仅表示在重力作用下弹簧的伸长。弹簧质量系统的固有频率是与重力引起的平均变形无关的。实际结构中总是有使自由振动随时间而衰减的阻尼，并且有一个范围，超过这个范围结构就不再表现为线性的。对于真实结构，固有频率的概念是介于理想的数学模型和实际结构之间的一种修正。真实结构与线性模型之间的偏差常常是由于忽略了线性和非线性的影响。一些常被忽略的线性影响是纤细结构中剪切变形的影响以及周围流体的影响；常被忽略的非线性影响是屈服点的塑性以及阻尼的范围。

本手册中大部分的解是线性运动方程的精确解。运动方程是基于某些理想状态的基本原理而导出的，例如梁仅有弯曲而无剪切以及弦线决不屈服等。图形和说明则进一步阐明了所用到的理想模型。

如果模型不接近于实际结构，那么结构的固有频率通常用逼近假设来估算。如，一个平板在宽度方向间隔地铆接在一个加强梁上，那么板的边界条件是介于固支和简支边界之间，在分析中，使用两种近似方法来逼近固有频率是有意义的。同样，如果结构的材料特性不完全知道，

那么，可以用高的或低的材料特性估计值来逼近固有频率。

近年来由于动态有限元计算程序的出现，使得分析复杂结构的固有频率成为可能。这些程序正在代替分析复杂结构的近似方法。有限元法还不能代替完整形式的解，因为用完整形式的解在几分钟内可以计算出频率，而计算机程序则需要花费较多的时间和工作量才能解出。但有限元法为完整形式的解创造了一个新的适应场合，在有限的例子中，完整形式的解可以检验复杂的计算模型。

第二章　平截面及立体的几何特性

2.1　平截面

图 2-1 所示为一 x-y 平面内的截面。A 是边界所包围的面积，$\mathrm{d}A$ 是这一面积的微元素。x 轴和 y 轴是在原点 o 相互垂直的，z 轴垂直于 x-y 平面并且通过原点 o。相互垂直的轴 r 和 s 以及 r' 和 s' 分别表示 x、y 轴逆时针方向转动 θ 及 θ' 角度。r' 和 s' 是主轴，也就是说，绕该轴的惯性积为零。c 是截面形心，在 x-y 轴中其坐标为 x_c、y_c。c 也是坐标轴 x'、y' 的原点，它是由 x、y 轴转换出的。

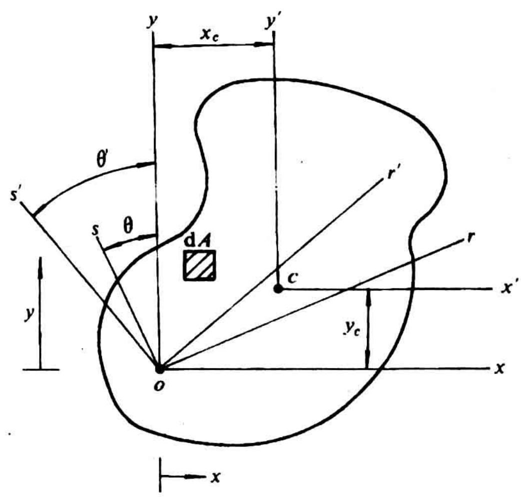


图 2-1　平截面

在 x、y 轴中形心坐标由下式给出：

$$x_c = \frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A} \tag{2-1}$$

$$y_c = \frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A} \tag{2-2}$$

中性轴是沿该轴应力为零的轴。如果匀质结构的轴向载荷为零，而结构仅承受弯曲载荷，于是梁的中性轴弯曲而不伸长，且必定通过截面形心。

惯性面积矩（I_x、I_y），绕 x、y 轴的惯性积 I_{xy}，以及绕 z 轴的极惯矩（I_{zz}）按以下公式定义：

$$I_x = \int_A y^2\mathrm{d}A \tag{2-3}$$

$$I_y = \int_A x^2 \mathrm{d}A \tag{2-4}$$

$$I_{xy} = \int_A xy \mathrm{d}A \tag{2-5}$$

$$I_{zz} = I_x + I_y = \int_A (x^2 + y^2) \mathrm{d}A \tag{2-6}$$

截面的回转半径定义为：

$$r_x = (\frac{I_x}{A})^{1/2} \tag{2-7}$$

$$r_y = (\frac{I_y}{A})^{1/2} \tag{2-8}$$

如果绕通过形心轴的惯性矩已知，那么与该轴平行的任意轴的惯性矩可很容易地按下式推算出：

$$I_x = I_{x_c} + y_c^2 A \tag{2-9}$$

$$I_y = I_{y_c} + x_c^2 A \tag{2-10}$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + x_c y_c A \tag{2-11}$$

$$I_z = I_{z_c} + x_c^2 A + y_c^2 A \tag{2-12}$$

这些关系式即为二维平行轴理论。I_{x_c}、I_{y_c}、I_{z_c} 以及 $I_{x_c y_c}$ 是绕 x'、y' 轴的惯性矩，x'、y' 轴的原点在截面的形心上(图 2-1)。

如果绕一个轴的惯性矩是已知的，那么绕旋转后的轴的惯性矩按下式计算：

$$I_r = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \tag{2-13}$$

$$I_s = I_y \cos^2\theta + I_x \sin^2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \tag{2-14}$$

$$I_{rs} = I_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2}(I_y - I_x) \sin 2\theta \tag{2-15}$$

$$I_z = I_z \tag{2-16}$$

上述公式表明：

$$I_r + I_s = I_x + I_y \tag{2-17}$$

或者说绕相互垂直的轴的惯性面积矩之和与这些轴的旋转无关。

在平截面中，通过任意给定的点，存在有两个相互垂直的轴，绕这些轴的惯性积为零。这些轴称为主轴。通过原点 o 的主轴 r'、s' 相对于 x、y 轴的转角 θ' 为：

$$\theta' = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \tag{2-18}$$

绕主轴的截面惯性矩为：

$$I_{r'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}[(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2]^{1/2} \tag{2-19}$$

$$I_s' = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \mp \frac{1}{2}[(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2]^{1/2} \tag{2-20}$$

$$I_{r's'} = 0 \tag{2-21}$$

通过给定点的任意轴可以量得主惯性矩是最大和最小的。对称轴总是主轴。两个轴中，一个是主轴，那么惯性积为零。如果主惯矩相等，那么通过原点的任意旋转轴的惯性矩等于主惯