高等数学

辅导 FUDAO

高等学校教材配套辅导丛书

同济五版

同济大学 马志敏主编

华研数学

TOPWAY

中山大学出版社

高等数学

辅导 FUDAO

高等学校教材配套辅导丛书

同济五版

同济大学 马志敏主编

华研数学

TOPWAY

中山大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/马志敏主编.—2版.—广州:中山大学出版社,2003.9

ISBN 7-306-01976-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.马…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第080543号

责任编辑:张礼凤　封面设计:郭炜　责任校对:凌雪　责任技编:黄少伟

中山大学出版社出版发行
(地址:广州市新港西路135号　邮编:510275
电话:020-84111998、84037215)
广东新华发行集团股份有限公司经销
广州市番禺区官桥彩色印刷厂印刷
(地址:广州番禺区石楼官桥　邮编:511447)
850毫米×1168毫米　32开本　21印张　655千字
2002年9月第1版
2003年9月第2版　2003年9月第2次印刷
定价:20.00元

第二版前言

高等数学是工科类各专业的重要基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目，其重要性日益凸显，编者根据多年的教学经验编写了这本辅导书。

本书第一版出版后，受到了广大师生的一致好评，为了精益求精，编者对第一版作了较大的修订，同时纠正了第一版中少量的排版错误以及针对教材第五版的修订作了相应的调整。

本书第二版修订的思路及结构如下：

一、主要内容归纳——解题关键

此版块将每一章、节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，并以图表的形式给出，对较易出错的地方也作了详尽的注解。

二、例题分类及详解——举一反三

此版块将每章、节常考的题型作了分类讲解，并对每种题型的解题思路、技巧作了归纳总结，有些题型还给出了多种解法。

三、目标训练题及解析——运用自如

此版块所选的题型是编者多年教学实践中长期积累的成果，供读者作强化训练使用。

四、历届考研真题解析——深化训练

此版块供有志于考研的读者使用。

五、教材总习题解析——达标训练

此版块供读者课内学习参考。

由于编者水平有限，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评指正。

编者

2003 年 9 月于同济

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学的研究对象，极限的思想方法是研究与讨论函数的一种重要方法，其思想理念贯彻于高等数学始终，理解函数的概念，掌握极限的概念及计算是学好高等数学的基础。

本章重点：1. 函数的概念及几何特性
2. 反函数、复合函数、初等函数
3. 极限的概念与性质
4. 极限的运算法则
5. 极限存在准则、两个重要极限
6. 无穷小的概念、性质与比较
7. 连续与间断
8. 闭区间上连续函数的性质

第一节　函　　数

一、主要内容归纳

表 1－1.1　集合的概念

集合的定义	具有某种特定性质的事物或对象的全体称为集合，其中每个对象或事物称为集合的元素
集合的类型	①有限集　②无限集
集合的表示	①列举法　②描述法
空集	不含任何元素的集合称为空集

续表 1-1.1

集合的关系	①子集 若对 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A 是 B 的子集或 A 包含于 B,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$ ②相等 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$
集合的运算	①并集　$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ ②交集　$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ ③差集　$A\setminus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ ④余集　$A^C=\{x\mid x\notin A\}$
运算性质	①交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$ ②结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ ③分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ④对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$
邻域	①$U(a,\delta)=\{x\mid \|x-a\|<\delta\}$称为 a 的 δ 邻域 ②$\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\|x-a\|<\delta\}$称为 a 的 δ 去心邻域

表 1-1.2　映射的概念

定义	设 X,Y 是两个非空集合,如存在一个对应法则 f,使得对 $\forall x\in X$,按照法则 f 总有 Y 中惟一确定的元素 $y\in Y$ 与该 x 对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记为 $f:X\to Y$ 其中 X 称为 f 的定义域,记为 D_f, x 称为原象, y 称为 x 在 f 下的象,即 $y=f(x)$, $R_f=f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$称为 f 的值域
满射	设 $f:X\to Y$,若 $R_f=Y$,则称 f 为满射

续表 1－1.2

单射	设 $f:X\to Y$,若对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$, 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为单射
双射 (一一映射)	设 $f:X\to Y$,若 f 既是单射,又是满射,则称 f 为双射
逆映射	设 f 是 X 到 Y 的单射,则对 $\forall y\in R_f$,有惟一的 $x\in X$,满足 $f(x)=y$,由此可确定一个从 R_f 到 X 的映射 f^{-1},即 $f^{-1}:R_f\to Y$ 其中 $f^{-1}(y)=x$ 满足 $f(x)=y$,称 f^{-1} 为 f 的逆映射
复合映射	设 $g:X\to Y_1$, $f:Y_2\to Z$,且 $Y_1\subset Y_2$ 则可得 $fog:X\to Z$, $(fog)(x)=f[g(x)],x\in X$ 称 fog 为 g 和 f 所构成的复合映射

表 1－1.3　函数的概念

定义	设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数, 记为:$y=f(x),x\in D$ 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 f 的定义域,记为 D_f,函数值全体 $R_f=f(D_f)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为 f 的值域
图像	平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像,一般为平面上的一条曲线
反函数	设函数 $f:D\to f(D)$是单射,则它的逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$ 称为 f 的反函数,其中 $D_{f^{-1}}=R_f=f(D)$, $R_{f^{-1}}=D_f=D$
复合函数	设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1, $u=\varphi(x)$的定义域为 D_2,值域 $W_2=\{u\mid u=\varphi(x),x\in D_2\}\subset D_1$。则消去 u 后所得 y 与 x 的函数关系 $y=f[\varphi(x)]$称为由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中 u 称为中间变量。 复合函数即为复合映射 fog 所确定的函数。

表 1-1.4 函数的几种特性

名称	定 义	几何意义
有界性	设 $f(x)$ 的定义域为 D ①如存在 k_1,使对 $\forall x\in D$,恒有 $f(x)\leqslant k_1$ 则称 $f(x)$ 有上界	图像位于直线 $y=k_1$ 下方
	②如存在 k_2,使对 $\forall x\in D$,恒有 $f(x)\geqslant k_2$ 则称 $f(x)$ 有下界	图像位于直线 $y=k_2$ 上方
	③如存在 $M>0$,使对 $\forall x\in D$,恒有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 则称 $f(x)$ 有界	图像介于两直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
单调性	设 $f(x)$ 在区间 I 内有定义,如对 I 内的任意两点 x_1,x_2 当 $x_1<x_2$ 时,恒有 ① $f(x_1)<f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 内单调增加; ② $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 内单调减少	图像从左至右往上升 图像从左至右往下降
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 如对 $\forall x\in D$,恒有 ① $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为偶函数; ② $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 为奇函数	图像关于 y 轴对称 图像关于原点对称
周期性	如存在常数 $l>0$,使对 $\forall x$,恒有 $f(x+l)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 为周期函数	每隔一个周期图像形状相同

表 1-1.5 基本初等函数与初等函数

基本初等函数	①幂函数 $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in R)$ ②指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$ ③对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$ ④三角函数 $y=\sin x, y=\cos x$ $y=\tan x, y=\cot x$ $y=\sec x, y=\csc x$ ⑤反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x$ $y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$
初等函数	由常数和基本初等函数经有限次的四则运算及有限次的复合运算所构成并用一个解析式表示的函数统称为初等函数

二、例题分类及详解

本节的基本要求为理解函数的两个要素，会求函数的定义域，熟练应用函数的符号，掌握反函数的求法，函数的几何特性的判别。

1. 函数的两个要素

函数的对应法则与定义域是确定函数的本质，称为函数的两大要素；而变量的符号的选取并非函数的本质。

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}2^{x}, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

求 $f(2), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2})$。

解： 由于$2\in[1,3]$，由定义知 $f(2)=2-1=1$

$\frac{1}{2}\in[0,1)$，由定义知 $f(\frac{1}{2})=2$

$-\frac{1}{2}\in(-1,0)$，由定义知 $f(-\frac{1}{2})=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

例 2 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$是否相同?

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$, $g(x)=1-x$;

(3) $f(x)=x$, $g(x)=\ln e^x$。

解:(1) $f(x)$的定义域为 $x\neq\pm1$,$g(x)$的定义域为 $x\neq-1$,

故 $f(x)$与 $g(x)$是不同函数。

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$

所以当 $x>1$ 时,$f(x)\neq g(x)$,即 $f(x)$与 $g(x)$的对应法则不相同,故 $f(x)$与 $g(x)$是不同函数。

(3) 对 $\forall x,\ln e^x=x$

所以 $f(x)$与 $g(x)$的定义域相同且对应法则也相同,故 $f(x)$与 $g(x)$是同一函数。

2. 函数定义域的求法

求初等函数的自然定义域有下列原则:

①分母不能为零;②偶次根式的被开方数不能为负数;③对数的真数不能为零或负数;④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为$|x|\leqslant1$;⑤$\tan x$ 的定义域为$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$;⑥$\cot x$ 的定义域为$x\neq k\pi,k\in Z$。

由函数的解析式按以上原则可得自变量所满足的不等式组,求解不等式组即可求得函数的定义域。

例 3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$。

解:(1) 依题意必须$\begin{cases}1-x^2\neq0\\x+2\geqslant0\end{cases}$

解得 $x\neq\pm1$,且 $x\geqslant-2$

故定义域为$(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 必须$\begin{cases}x^2-1>0\\x+1\neq0\\\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant1\end{cases}$

由 $x^2-1>0$,得 $x<-1$ 或 $x>1$

由$\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$,得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$

故定义域为$(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$

例 4 对于下列函数 $f(x)$与 $g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并确定它们的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=x^4$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$。

解: (1) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$,定义域为$(-\infty,+\infty)$

$g[f(x)]=(\sqrt{x+1})^4=(x+1)^2$,定义域为 $x+1\geqslant 0$

即$[-1,+\infty)$

(2) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$

定义域满足$\begin{cases}1-\sqrt{x-1}\geqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases}$ 即 $1\leqslant x\leqslant 2$

$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1}$

定义域满足$\begin{cases}\sqrt{1-x}-1\geqslant 0\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}$ 即 $x\leqslant 0$

3. 函数符号的运用

主要是复合函数问题,对于复合函数要搞清复合的成分或结构,有时需适当引入中间变量。

例 5 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f(\dfrac{1}{x-1})$

解: 本题为复合函数问题,关键在于求得 $f(u)$,故引入中间变量,令 $u=x-1$,则 $x=u+1$,得

$$f(u)=(u+1)^2+(u+1)+1=u^2+3u+3$$

故 $f(\dfrac{1}{x-1})=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}+3$

例 6 设 $f(x)=e^{x^2}$,$f(\varphi(x))=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$

解: $f(\varphi(x))$是复合函数,这里要求中间变量 $\varphi(x)$与 x 的函数表达式

$\because f(u)=e^{u^2}$(函数与变量记号无关)

$\therefore f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$ 得 $e^{\varphi^2(x)}=1-x\Rightarrow\varphi^2(x)=\ln(1-x)$

$\because \varphi(x)\geqslant 0$ $\therefore \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

4. 反函数的求法

由 $y=f(x)$ 出发解出 x 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$。

例 7 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\log_4 x$；　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$。

解：(1) $\log_4 x=y-1, x=4^{y-1}=\dfrac{1}{4}4^y$

故反函数为　$y=\dfrac{1}{4}4^x$

(2) $y2^x+y=2^x, 2^x=\dfrac{y}{1-y}, x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$

故反函数为　$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$

5. 函数的几何特性问题

函数的有界性、单调性、奇偶性及周期性都有明确的几何意义，故又称为几何特性，根据它们各自的定义进行判别，而学习了后续内容后可有更好的判别法。

例 8 证明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

证明： $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\dfrac{2x^2}{x^4+1}\leqslant 1+1=2$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

例 9 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减小，证明：对任意两点 $x_1>0, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$。

证明： 不妨设　$x_1\leqslant x_2$，故有

$\dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_1}$　（因 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调减小）

$\therefore x_1 f(x_2)\leqslant x_2 f(x_1)$

又 $\because x_2<x_1+x_2$，则

$\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{x_2}$

$\therefore x_2 f(x_1+x_2)\leqslant x_1 f(x_2)+x_2 f(x_2)\leqslant x_2 f(x_1)+x_2 f(x_2)$

得 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$

例 10 证明：

(1) 两个偶函数的积是偶函数；

(2) 两个奇函数的积是偶函数；

(3) 偶函数与奇函数的积是奇函数。

证明：(1) 设 $f(x),g(x)$为偶函数

则 $f(-x)=f(x),g(-x)=g(x)$

令 $\varphi(x)=f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$是偶函数。

(2) 设 $f(x),g(x)$为奇函数

则 $f(-x)=-f(x),g(-x)=-g(x)$

令 $\varphi(x)=f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]$

$=f(x)g(x)=\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$是偶函数。

(3) 设 $f(x)$为偶函数，而 $g(x)$为奇函数

则 $f(-x)=f(x),g(-x)=-g(x)$

令 $\varphi(x)=f(x)g(x)$

则 $\varphi(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-\varphi(x)$

故 $\varphi(x)$是奇函数。

例 11 设 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且对 $\forall x,y$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq0$，证明 $f(x)$为偶函数。

证明：由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

用$-y$代y得

$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y)$

得 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$

又因 $f(x)\neq0$，故 $f(-y)=f(y)$ $\quad\therefore f(x)$为偶函数

例 12 若函数 $f(x)$对其定义域内的一切 x 恒有 $f(x)=f(2a-x)$，则称函数 $f(x)$对称于 $x=a$，证明：如果函数 $f(x)$对称于 $x=a$ 及$x=b(b>a)$，则 $f(x)$必定是周期函数。

证明：若 $f(x)=f(2a-x)$及 $f(x)=f(2b-x)$

则 $f[x+2(b-a)]=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x)$

所以 $f(x)$为周期函数且 $T=2(b-a)$为 $f(x)$为周期。

第二节 极　　限

一、主要内容归纳

表 1−2.1　极限的概念

数列极限 （$\varepsilon-N$ 定义）	对于数列$\{x_n\}$，如存在固定常数 A 满足： 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，恒有$\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$ 则称 A 是数列$\{x_n\}$的极限或称$\{x_n\}$收敛于 A。记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$
函数极限	1° 有限点处的极限（$\varepsilon-\delta$ 定义） 设函数 $f(x)$在 x_0 的附近有定义 ①如对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限或简称 $f(x)$在 x_0 处的极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$ ②如对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$在 x_0 处的左极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$ ③如对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$在 x_0 处的右极限。记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$ 2° 无穷远处的极限（$\varepsilon-X$ 定义） 设函数 $f(x)$在$\lvert x\rvert$大于某一正数时有定义，如果对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当$\lvert x\rvert>X$ 时，恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 则称 A 为 $f(x)$当 $x\to\infty$ 时的极限。记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$ 类似可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$