江苏省五年制高等职业教育试用教材

数学

《数学》编写组 编

第一册

SHUXUE

苏州大学出版社

江苏省五年制高等职业教育试用教材

数　　学

第一册

《数学》编写组　编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
49051

数学 第1册/顾浩主编.—苏州:苏州大学出版社,1999.8重印
江苏省五年制高等职业教育试用教材
ISBN 7-81037-422-2

Ⅰ.数… Ⅱ.顾… Ⅲ.高等数学-高等教育:职业教育-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第32005号

江苏省五年制高等职业教育试用教材
数 学(第一册)
《数学》编写组 编
责任编辑 秦 淦

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号 邮编:215006)
江苏省新华书店经销
丹阳市华鑫印务公司照排
武进市第三印刷厂印装
(地址:常州西门村前镇 邮编:213154)

开本 787×1092 1/16 印张 11.875 字数 297千
1998年8月第1版 1999年8月第2次印刷
印数 10101—13100册
ISBN 7-81037-422-2/O·15(课) 定价:14.00元

前　言

从1995年起，原国家教委先后批准我省部分重点中专校试办五年制高职班，对我省职业教育的发展和提高起到很大的促进作用。为确保高职教育的培养目标与教学质量，努力办出高职特色，1996年11月初，在原国家教委关心指导下，省教委在无锡召开了“江苏省五年制高职教育工作研讨会”，就中专办高职的办学指导思想和管理、教学计划的制定与修订、教材建设、师资队伍建设等问题进行认真研讨，会上成立了“江苏省五年制高职教育学校协作委员会”及语文、英语、数学、物理四门公共课教材编写组，会后即组织所有试办高职班的学校的有关教师与专家，经过近两年的反复研讨，六易其稿，编写了这四门公共课的教学大纲及试用教材。

编写五年制高职公共课教材的指导思想是为了逐步构建一套适合于高职教育的公共课教材体系。在编写过程中，首先强化培养目标，开发好课程大纲，并以课程大纲为依据来组织教学内容，尽可能地体现五年制高职教育中公共课的基础性和实用性。在教学内容的安排和取舍上，遵循“尊重学科，但不恪守学科性”的原则，删旧增新，减少理论推导，着重阐明实践应用价值，强调公共课与相关学科之间的横向连接，注意与专门课程的接口，力求做到立足实践与应用，拓宽基础知识面，强化能力训练和迁移，使一般能力的培养和职业能力的培养相结合。教学内容留有适当的弹性，使不同专业和学有余力的学生可灵活选用与自学。本套教材主要适用于五年制高等职业教育，同时也可作为五年制专业班和四年制中专的教材或参考书。

四门公共课教材的编写工作，由省教委职教办组织，省高职协作会具体负责。教材编写采用主编负责制，主审协助主编把好教材质量关。编写五年制高职教材是新的探索，我们力求编好，但限于经验和水平，教材的缺点和不完善之处在所难免，请使用本教材的师生及同行们予以指正，使这套教材在实践中不断完善。

江苏省五年制高等职业教育教材编审委员会

1998年5月

编写说明

数学是五年制高等职业教育的一门必修公共课。数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分，因此，从全面提高素质的角度来说，数学是一门重要的基础课；从综合职业能力的要求来说，数学又是进一步学习及参加社会生活、生产所必不可少的一门工具课。

这套教材的编写，我们力求遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则。具体反映在：(1) 尊重学科，但不恪守学科性。在发扬我国数学教育的优良传统的同时，注意借鉴、渗透“大众数学”和“问题解决”等思想，重视并加强数学应用意识、应用能力的培养。(2) 考虑到计算机技术为特征的信息社会对本课程的要求，增加了计算方法、数学建模、计算器使用及Mathematica软件介绍等内容。(3) 注意了与初中基础的衔接，对与现代生活和后续课程联系密切的内容，适当留有“接口”。

这套教材的编写，我们试图采用“粗点”，即留有余地让教师创造性地发挥，论证不追求过于严密，有些推导采用若干支撑点过渡…；“实点”，尽量贴近生活，联系实际，便于教学；“新点”，要通过新一点，逐步体现求异、求变。

这套教材共分三册。第一册以初等数学为主，第二册以一元函数微积分为主，第三册以工程数学为主。总学时为330学时左右。

这套教材主要供招收初中毕业生的高等职业技术教育使用，稍作处理，也可供相应专业的中等职业技术教育使用。

这套教材由谈兴华任总编。本册主编：顾浩，主审：张荣生。参加编写的人员有顾浩、杨晓春、朱军红、冯宁、林冬梅、彭康、张建忠、宋然兵。

这套教材的编写尽管我们作了很大的努力，但限于水平，加之时间仓促，数学教学改革中的有些问题还有待探索，因此，不足与错误之处在所难免，恳请批评指正。

值得一提的是在本书的编写和出版过程中得到了江苏省教委、各有关学校的领导及苏州大学出版社的大力支持和帮助。王兆明、殷冬生、秦淦等同志还给予了很多具体的指点，在此一并表示衷心的谢意。

《数学》编写组

1998年3月

目　　录

第一章　代数基础知识

集合、不等式、简易逻辑、指数与对数是代数的基础知识. 本章将介绍关于集合的一些重要概念、常用符号和简单运算，介绍一元二次不等式和绝对值不等式的解法，介绍命题和三种命题联结词的含义以及充要条件、推理论证的常见方法，然后介绍指数与对数的概念和运算法则.

§1-1　集　合

一、集合的概念

1. 集合

"集合"是最基本的数学概念之一. 如一个车间的全体工人，某图书馆的全部藏书，自然数的全体等都是一个集合.

一般地说，集合是具有某种属性的事物的全体，或是按照某种法则进行研究的对象的全体.

一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合.

2. 元素

构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示集合的元素.

(1) 若 a 是集合 A 的元素，用"$a\in A$"表示，读作"a 属于 A".

(2) 若 a 不是集合 A 的元素，用"$a\notin A$"(或 $a\overline{\in}A$)表示，读作"a 不属于 A".

例如，如果 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合，则 $5\in\mathbf{N}$，而 $-\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$.

3. 集合的表示法

(1) **列举法**　就是把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，元素之间用逗号分开.

例如，$\{a,b,f,m\}$；$\{1,2,3,\cdots\}$.

(2) **描述法**　就是把集合中元素的共同特性描述出来，写在大括号内.

例如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合可以表示为 $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 或 $\{x:x^2-3x+2=0\}$；抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点 (x,y) 组成的集合可表示为 $\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$ 或 $\{(x,y):y=x^2+1\}$；小于 10 的自然数的集合表示为{小于 10 的自然数}.

(3) **图示法**　有时也用封闭曲线所围成的图形(叫做文氏图)表示集合.

实际运用时究竟用哪种表示法，要看具体问题而定.

4. 集合的特征

(1) **确定性**　对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的. 这就是说，任何一个对象或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素. 例如，对于由所有的直角三角形组成的集合，内

角分别为 20°,70°,90°的三角形是这个集合的元素,而内角分别为 40°,60°,80°的三角形,就不是这个集合的元素.

(2) **互异性** 对于一个给定的集合,集合中的元素是互异的.这就是说,集合中的任何两个元素都是不同的对象;相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.因此,集合中的元素是没有重复现象的.例如,$\{1,3,4,1,2\}$中的"1"是重复的,应去掉一个"1".

(3) **无序性** 集合的元素之间没有顺序的限制.例如$\{a,b,c,d\}$与$\{b,c,d,a\}$是同一个集合.

5. 常见的几种数集

名　　称	自然数集	整数集	有理数集	实数集
记　　号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

为了方便起见,有时我们还用 $\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集,用 $\mathbf{R}^-$ 表示负实数集,等等.

6. 集合的分类

有限集:含有有限个元素的集合.

无限集:含有无限个元素的集合.

单元素集:只含有一个元素的集合.

空集:不含有任何元素的集合,记作$\varnothing$.

为叙述方便起见,我们把至少含有一个元素的集合叫做**非空集**.

7. 点集

由点组成的集合叫做**点集**.

我们可以用数轴上的点所组成的点集来表示数集,用直角坐标平面内的点所组成的点集来表示有序实数对所组成的集合.

例 1 用点集表示下面的集合:

(1) $\{x \mid -1<x\leqslant 2\}$;

(2) $\{(x,y) \mid 0\leqslant x<2, 0<y\leqslant 1\}$.

解 (1) 这个点集包含了线段 MN 上除点 M 外的所有点(图 1-1).

(2) 这个点集包含了长方形 $OMPN$ 的内部和边界$\overline{OM}$(除 O 外),$\overline{MP}$(除 P 外)上的点,而边界$\overline{ON}$和$\overline{NP}$上的点不包含在这个点集中.

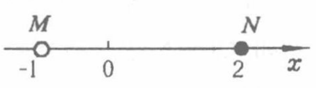


图 1-1

8. 解集

满足方程(组)或不等式(组)的所有解组成的集合叫做方程(组)或不等式(组)的解集.

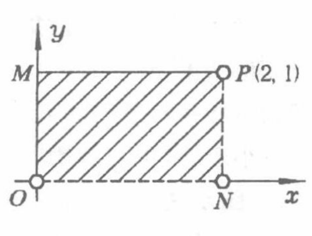


图 1-2

例 2 写出以下各方程(组)和不等式组的解集:

(1) $x^2+3x+2=0$;

(2) $\begin{cases}4x^2-y^2=15,\\ x=2y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+5>0,\\ x-3\leqslant 0.\end{cases}$

解 (1) 解方程 $x^2+3x+2=0$ 得 $x_1=-1, x_2=-2$. 所以此方程的解集为$\{-1,-2\}$.

(2) 解方程组$\begin{cases}4x^2-y^2=15,\\x=2y,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=1.\end{cases}$ 所以此方程组的解集为$\{(-2,-1),(2,1)\}$.

(3) 解不等式组$\begin{cases}2x+5>0,\\x-3\leqslant 0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x>-\dfrac{5}{2},\\x\leqslant 3,\end{cases}$ 即$-\dfrac{5}{2}<x\leqslant 3$. 所以此不等式组的解集为$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{5}{2}<x\leqslant 3\right\}$.

二、集合之间的关系

1. 集合的包含关系

定义 1 对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那末集合 A 称为集合 B 的子集,记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"(如图 1-3).

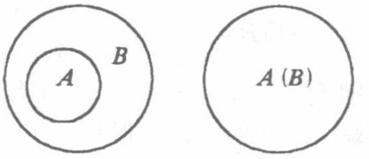


图 1-3

例如:$N\subseteq Z$,$R\supseteq Q$.

当 A 不是 B 的子集时,我们可以记作

$$A\nsubseteq B \quad 或 \quad B\nsupseteq A,$$

读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A".

由定义 1 可得:$A\subseteq A$.

我们规定:$\varnothing\subseteq A$.

定义 2 如果集合 A 是集合 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A,那末集合 A 称为集合 B 的真子集,记作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A.$$

当 A 不是 B 的真子集时,我们可以记作

$$A\not\subset B \quad 或 \quad B\not\supset A.$$

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系,可用图 1-4 中 B 同 A 的关系来说明.

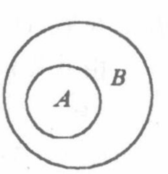


图 1-4

显然,空集是任何非空集合的真子集.

容易知道,对于集合 A、B、C,如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,那末 $A\subseteq C$;如果 $A\subset B$,$B\subset C$,那末 $A\subset C$.

例 3 写出$\{a,b,c\}$的所有子集及真子集.

解 子集为$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}$,$\{a,b,c\}$. 共有 8 个子集,其中除$\{a,b,c\}$外,其余 7 个都是真子集.

从例 3 可以发现,如果集合有三个元素,则它的子集共有 8 个,恰好是 2^3;真子集的个数为 2^3-1.

以后可以证明,如果集合有 n 个元素,则它的子集个数为 2^n,真子集的个数为 2^n-1.

2. 集合的相等关系

定义 对于两个集合 A 和 B,如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,那末集合 A 和集合 B 相等,记作 $A=B$. 例如,

$A=\{x\mid x^2-3x^2+2=0\}$,$B=\{1,2\}$,则

$$A=B.$$

三、集合的运算

1. 交集

定义 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

图 1-5 中的阴影部分表示集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$.

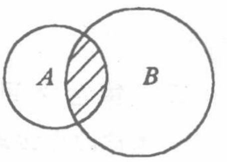


图 1-5

由交集定义容易推出，对于任何集合 A、B，有

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\cap B=B\cap A$.

求交集的运算称为**交运算**.

例 4 设 $A=\{(x,y) \mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y) \mid 3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}=\{(1,2)\}$.

例 5 设 $A=\{$矩形$\}$，$B=\{$菱形$\}$，求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{$正方形$\}$.

2. 并集

定义 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

这样，方程 $(x^2-4)(x^2-1)=0$ 的解集，可以从求方程 $x^2-4=0$ 的解集与方程 $x^2-1=0$ 的解集的并集而得到，即

$$\{2,-2\}\cup\{1,-1\}=\{1,-1,2,-2\}.$$

图 1-6 中的阴影部分，表示集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$.

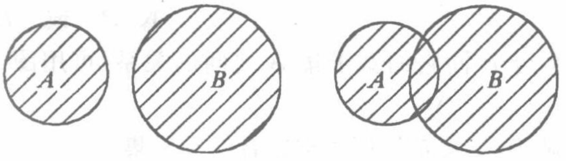


图 1-6

由并集定义容易知道，对于任何集合 A、B，有

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，$A\cup B=B\cup A$.

求并集的运算称为**并运算**.

注意，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次.

例 6 设 $A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 1<x<3\}$，求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x \mid -1<x<3\}$.

例 7 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cup B$；$A\cap B$.

解 $A\cup B=\{$斜三角形$\}$；

$A\cap B=\varnothing$.

3. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一给定集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号 Ω 表示. 也就是说，全集含有我们所要研究的某些集合的全部元素.

定义 已知全集 Ω，集合 $A\subseteq\Omega$，由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在全集 Ω 中的**补集**，记作 $\overline{A}$，读作“A 补”，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega \text{ 且 } x\notin A\}.$$

图 1-7 中的长方形表示全集 Ω，圆表示它的子集 A，阴影部分表示 $\overline{A}$.

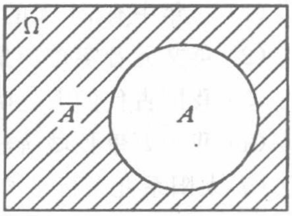


图 1-7

由补集的定义可知：

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,$$
$$\overline{\Omega}=\varnothing,\ \overline{\varnothing}=\Omega.$$

求补集的运算叫做**补运算**.

如果把 $\overline{A}$ 的补集记作 $\overline{\overline{A}}$，则有 $\overline{\overline{A}}=A$.

补集是对全集而言的. 因此，即使是同一个集合 A，由于所取的全集的不同，它的补集是不同的.

例 8 已知 $\Omega=\mathrm{R}$，求 $\overline{Q}$.

解 $\overline{Q}=\{$无理数$\}$.

例 9 设 $\Omega=\{$小于 9 的自然数$\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{4,7,8\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$.

解 $\because$ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，

$\therefore$ $\overline{A}=\{1,2,6,7,8\}$，

$\overline{B}=\{1,2,3,5,6\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,2,6\}$，

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

四、集合的简单应用举例

计算有限集合元素的个数是在一些实际应用和理论研究(如概率论)中常要解决的问题.

一般地，对于集合 A，B，如果设

$n(A)$表示集合 A 中元素的个数，

$n(B)$表示集合 B 中元素的个数，

$n(A\cup B)$表示集合 $A\cup B$ 中元素的个数，

$n(A\cap B)$表示集合 $A\cap B$ 中元素的个数，

则由图 1-6 不难得到

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

我们把这个公式叫做**二集合的计数公式**. 在这个公式中，只要知道其中三项，就可求出第四项.

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，有

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

例 10 某进修班有学生 40 人，开设英语和日语两门外语. 已知 30 人学习英语，15 人学习日语，有 2 人免修外语，问同时学习两门外语的有几人？

解 设 $A=\{$学习英语的学生$\}$，$B=\{$学习日语的学生$\}$，则由题意有

$n(A\cup B)=40-2=38$，$n(A)=30$，$n(B)=15$.

$\therefore$ $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=30+15-38=7$.

答：有 7 人同时学习两门外语.

习 题 1-1

1. 写出下列集合的所有元素：

(1) 一年中有 31 天的月份的集合；

(2) 英文元音字母的集合；

(3) 我国古代四大发明的集合；

(4) 我国万里长城所经过的省、市、自治区的集合；

(5)太阳系九大行星的集合.

2. 用适当的符号($\in$、$\notin$、$=$、$\supset$、$\subset$)填空：

(1) 3 ____ $\mathbf{N}$；　(2) 0 ____ $\mathbf{Z}^+$；　(3) π ____ $\overline{\mathbf{Q}}(\Omega=\mathbf{R})$；

(4) $\mathbf{Z}$ ____ $\mathbf{N}$；　(5) a ____ $\{a\}$；　(6) 0 ____ $\varnothing$；

(7) $\{a,b,c\}$ ____ $\{c,b,a\}$；　(8) $\varnothing$ ____ $\{a,b\}$.

3. 用适当的方法表示下列集合：

(1) 组成中国国旗图案的颜色；

(2) 世界上最高的山峰；

(3) 所有正奇数；

(4) 所有偶数；

(5) 在直角坐标平面上第 I 象限内所有的点.

4. 写出$\{a,b,c,d\}$的所有子集，并指出其中哪些是真子集.

5. 写出方程 $x^2+x-1=0$ 的解集并进行化简.

6. 写出方程组

$$\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=4, \\ z+x=5 \end{cases}$$

的解集并进行化简.

7. 写出不等式 $3x+2<4x-1$ 的解集并进行化简.

8. 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，$C=\{(x,y)\mid 2x-2y=3\}$，$D=\{(x,y)\mid 6x+4y=2\}$，求 $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap D$.

9. 设 $A=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=2(k+1),k\in\mathbf{Z}\}$，$D=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$. 问 A、B、C、D 中哪些集合相等，哪些集合的交集是空集？

10. 已知 $\mathbf{N}$ 为自然数集.

(1) 如果 Ω 为整数集 $\mathbf{Z}$，求 $\overline{\mathbf{N}}$；

(2) 如果 Ω 为非负整数集，求 $\overline{\mathbf{N}}$.

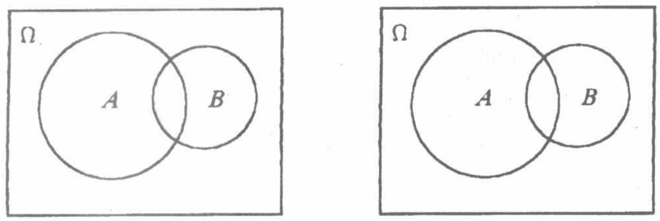
11. 设 $\Omega=\{$小于 9 的自然数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A\cap B}$.

12. 图中 Ω 是全集，A、B 是 Ω 的两个子集，用阴影表示：

(1) $\overline{A}\cup\overline{B}$；　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

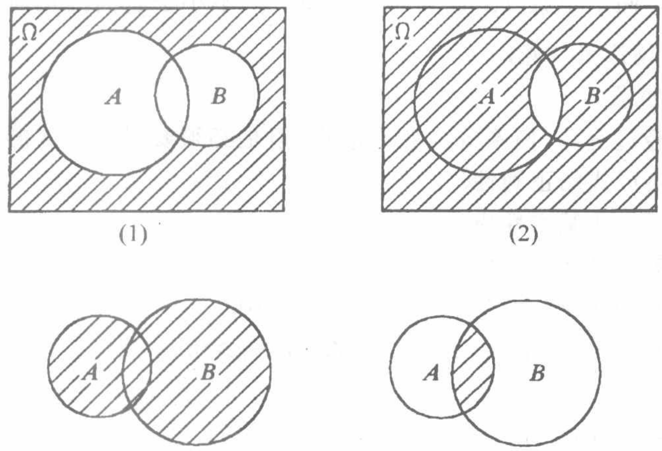
13. 如图，A 与 B 表示集合，用集合之间的关系符号表示图中的阴影部分.

14. 设甲商店和乙商店分别经销 250 种商品和 120 种商品，其中有 50 种商品相同，求甲、乙两商店共有多少种商品？



(1)　　(2)

（第 12 题图）



(1)　　(2)

(3)　　(4)

（第 13 题图）

§1-2　不　等　式

一、不等式的概念与性质

1. 不等式的概念

我们已经知道，用不等号“$>$”（“$<$”）或“$\neq$”连结两个代数式所成的式子，称为不等式.

不等号同向的两个不等式，叫做同向不等式；不等式异向的两个不等式，叫做异向不等式.

再看下面三个不等式：

(1) $a+2>a+1$，a 取任何实数均能使不等式成立. 这种不等式叫做绝对不等式.

(2) $2x-1<2+x$，只有当 $x<3$ 时，不等式才能成立. 这种不等式叫做条件不等式.

(3) $2+x^2<x^2$，没有什么数值能使不等式成立. 这种不等式叫做矛盾不等式.

我们知道，实数可以比较大小. 两个不同的实数 a，b 之间具有以下性质：

如果 $a-b$ 是正数，那末 $a>b$；如果 $a-b$ 是负数，那末 $a<b$；如果 $a-b$ 等于零，那末 $a=b$. 反过来也对. 这就是说，

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$
$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b;$$
$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b.$$

例 1　比较 $(x+1)(x+2)$ 与 $(x-3)(x+6)$ 的大小.

解　$\because$　$(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)=(x^2+3x+2)-(x^2+3x-18)=20>0$，

$\therefore\quad (x+1)(x+2)>(x-3)(x+6)$.

例 2 已知 $a>0, b>0$，求证 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

证明 由 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$.

$\because\quad a>0, b>0,\quad\therefore\quad(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

则 $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0$，所以 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

这个不等式表明了两个正数 a、b 的算术平均值$\dfrac{a+b}{2}$不小于它们的几何平均值 $\sqrt{ab}$. 这是一个很有用的不等式，请读者注意.

2. 不等式的性质

解不等式要经过运算，使不等式变换形式，但是必须要以不等式的基本性质作为依据，才能保证不等式变换形式的正确性.

不等式有以下一些基本性质：

性质 1 如果 $a>b, b>c$，那末 $a>c$.

证明 $\because\quad a>b, b>c,\quad\therefore\quad a-b>0, b-c>0$.

$\because\quad a-c=(a-b)+(b-c),\quad\therefore\quad a-c>0$.

$\therefore\quad a>c$.

性质 2 如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$.

推论 如果 $a>b, c>d$，那末 $a+c>b+d$.

性质 3 如果 $a>b, c>0$，那末 $ac>bc$；如果 $a>b, c<0$，那末 $ac<bc$.

推论 如果 $a>b>0, c>d>0$，那末 $ac>bd$.

二、不等式的解法

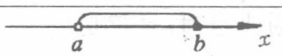
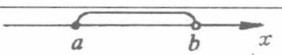
在初中，我们已经学习过一元一次不等式、一元一次不等式组的解法. 现在，我们来学习一元二次不等式、绝对值不等式的解法.

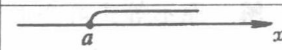
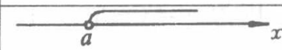
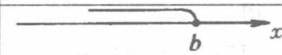
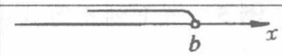
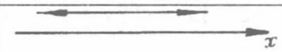
不等式(组)的解常用区间来表示.

1. 区间

介于两个实数之间的所有实数的集合叫做区间. 这两个实数叫做区间的端点.

设 a, b 为任意两个实数，且 $a<b$. 规定：

不等式	集合	区间	图示
$a\leqslant x\leqslant b$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a,b]$ (闭区间)	
$a<x<b$	$\{x\mid a<x<b\}$	(a,b) (开区间)	
$a<x\leqslant b$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	$(a,b]$ (左开区间)	
$a\leqslant x<b$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	$[a,b)$ (右开区间)	

不　等　式	集　　合	区　　间	图　　示
$x \geqslant a$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	$[a, +\infty)$	
$x > a$	$\{x \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$x \leqslant b$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	$(-\infty, b]$	
$x < b$	$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$-\infty < x < +\infty$	**R**	$(-\infty, +\infty)$	

例 3　用区间表示下列不等式组的解集：

$$\begin{cases} 5x-4>3(x-4), \\ \dfrac{1}{2}x+2 \leqslant 4-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

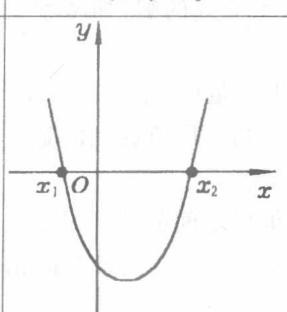
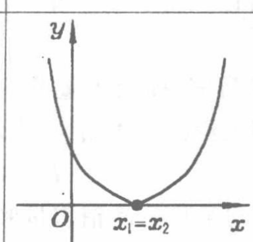
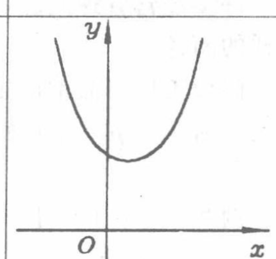
解　原不等式组可化为$\begin{cases} x>-4, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$所以该不等式组的解集为$\{x \mid -4<x \leqslant 1\}$，用区间表示为$(-4, 1]$.

2. 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式. 它的一般形式为

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0 (a>0).$$

一元二次不等式的解集与一元二次方程的根以及二次函数的图象密切相关，如下图所示.

$\triangle=b^2-4ac$	$\triangle>0$	$\triangle=0$	$\triangle<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个相异实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (取 $x_1<x_2$)	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次不等式的解集：$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$\{x \mid x<x_1\} \cup \{x \mid x>x_2\}$ $=\{x \mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$	$\left\{x \,\middle|\, x \neq -\dfrac{b}{2a}\right\}$	实数集 R
一元二次不等式的解集：$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$\{x \mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$