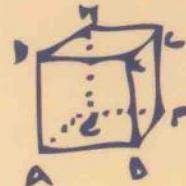




中吉联合



$a^2 = b^2 + c^2$
数学
人类智慧的源泉

周阳○编著

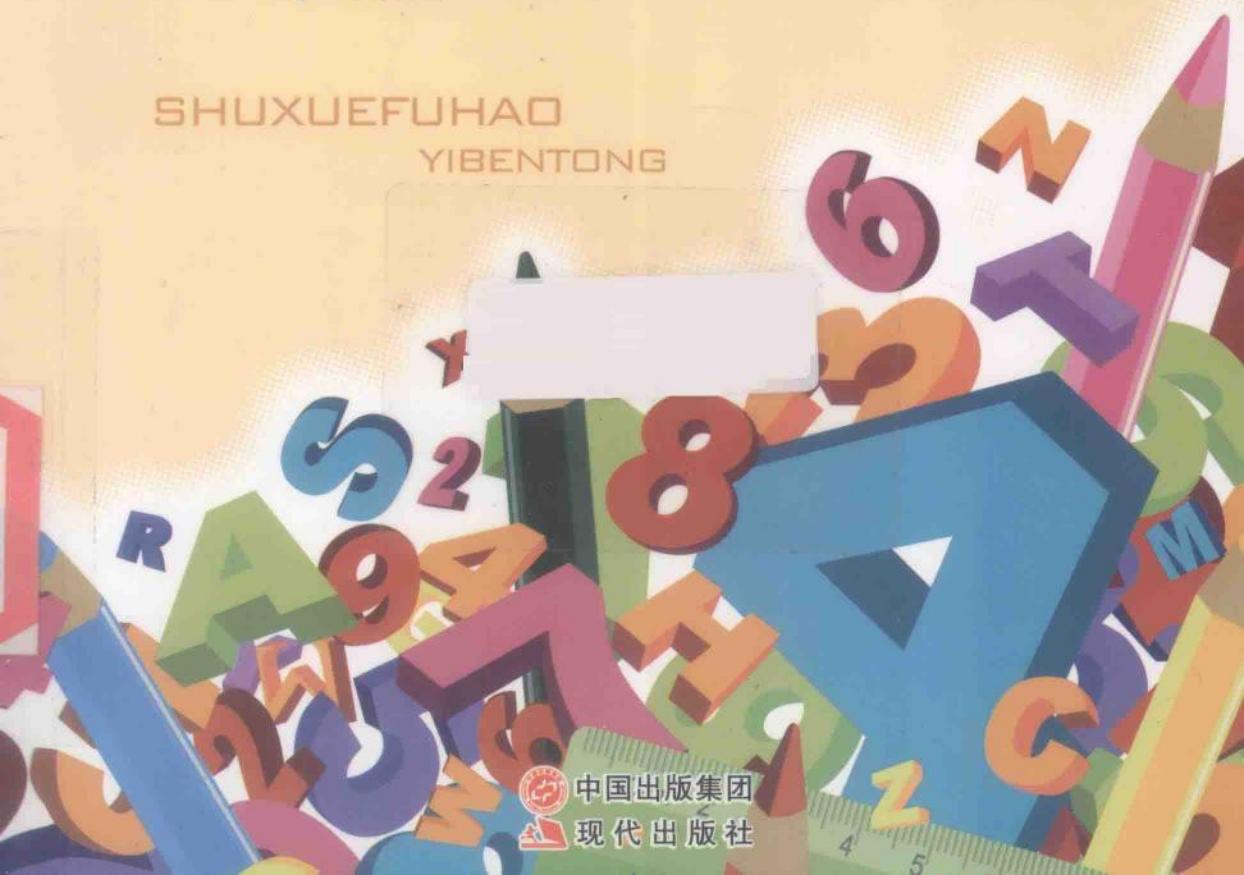
数学符号

一本通

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

SHUXUEFUHAO

YIBENTONG



中国出版集团
现代出版社

数学
人类智慧的源泉

数学符号

一本通

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

周阳◎编著



中国出版集团
现代出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学符号一本通 / 周阳编著. —北京：现代出版社，2012. 12

(数学：人类智慧的源泉)

ISBN 978 - 7 - 5143 - 0918 - 8

I . ①数… II . ①周… III . ①数学 - 符号 - 青年读物
②数学 - 符号 - 少年读物 IV . ①O1 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 274981 号

数学符号一本通

编 著	周 阳
责任编辑	张 晶
出版发行	现代出版社
地 址	北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码	100011
电 话	010 - 64267325 010 - 64245264 (兼传真)
网 址	www.xdcbs.com
电子信箱	xiandai@cnpitc.com.cn
印 刷	北京市业和印务有限公司
开 本	710mm × 1000mm 1/16
印 张	12
版 次	2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 2 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5143 - 0918 - 8
定 价	29. 80 元

版权所有，翻印必究；未经许可，不得转载



前 言

数学是一门研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门学科。在我国古代，把数学叫做算术，也可以叫做算学，直到后来，才改为数学。

其实，数学的发展史也可以称为数学符号的发展史。数学符号的产生和发展都是人类智慧的积累。每一个数学符号的诞生和每一个数学符号的演变，无不凝结着各国数学家们的智慧和心血。

数学可以划分为几何、三角函数、代数等类别。相对的，数学符号也可以依照此类别进行划分，如几何符号、三角函数符号、代数符号。每一类别的符号，各司其职，尽职尽责地履行自己的职能。

数学运算符号的发明及应用，对数学有着深远的意义：运用数学符号是数学发展史上的大事。一套完美的数学符号，绝不仅仅是起着速记、节省时间的作用。它更能够精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系。

在本书中，详细地为读者介绍了多种数学符号，以及它们的分类、作用、运算规律，等等。

在本书的第一章和第五章，还添加了“数学符号起源”和“零”的知识，这两章内容读起来生动有趣，给本书增添了不少的趣味性，从而使枯燥的数学符号变得生动活泼。最后，希望读者通过阅读本书，能更加深刻地了解数学符号，恣意地在数学的海洋中徜徉。为此，也就达到了编者编撰此书的目的。



目 录

数学符号的起源

最早的结绳计数	1
形式多样的进位制	5
古代埃及的计数法	10
古印度时流行的计数法	14
广泛流传的阿拉伯数字	16
日本古代的数字	21
最早的大数的表示	23

几何与三角函数符号

角的符号	27
垂直符号	30
角度符号	32
圆的符号, 弧的符号	35
直角符号, 直角三角形符号	38
“因为”与“所以”符号	41
圆周率符号	42



推出符号, 等价符号	46
向量符号	48
矢量积符号	50
点 $P(x, y)$ 的坐标号	51
三角函数符号	55
正弦的名称与符号	59
正切、余切名称与符号	62
正割、余割名称与符号	65

探密代数符号的世界

“+”和“-”	67
乘号	71
除号	73
等号	74
“大于”和“小于”	76
括号	78
分数	81
百分号、千分号	83
比例号	86
循环节号	88
小数	90
零	92
复数号	95
绝对值	98
对数	101
和号	104
空集号	107
映射号	109
指 数	111

方 根	114
平 均 数	117
科学计数法	119
约定性符号	121
米, 分米, 厘米, 毫米	123
函数符号	126
无穷大量号	129
极 限 号	132
双曲函数符号	137

有意思的运算符号

缘何 $-(-5)=5$	140
$a \div b \times b$ 不等 a	143
永无休止的 π	146
\log , \ln	149
\int 转化的奇效	154
{ }	158
$ x $, $\ x\ $	160
$P(A)$, $E(x)$ 的概率计算	164
=, —, ∞, ≡	167

关于“0”的趣谈

“0”的发现及应用史	172
古巴比伦人眼中的零	176
印度人钟爱的零	178
柬埔寨等地区的零	180
“0”在世界范围内的传播	182

数学符号的起源

数学，起源于人类早期的生产活动，为中国古代六艺之一，亦被古希腊学者视为哲学的起点。

自从人类发明了数学，便有了数学符号，数学符号和数学相辅相成，不可分割。

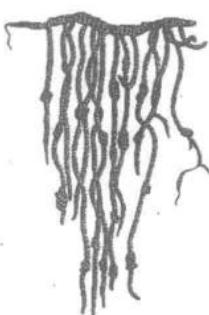
数学符号的发明和使用比数字晚，但是数量却不少。现在常用的数学符号有 200 多个，其中，初中的数学书里就有 20 多种。

对于数学符号的起源，都有一段有趣的传奇经历。从最早的结绳计数开始，历经了几百年的发展、演变，发展到现如今的水平，和世界各地早期的数学活动是分不开的。

最早的结绳计数

为了表示数目，人类的祖先摸索中逐渐学会了用实物来表现，如小木棍、竹片、树枝、贝壳、骨头之类。但是很快就发现这些东西容易散乱，不易保存，这样，人们自然会想到用结绳的办法来计数。

结绳（相当于今天的符号）计数在我国最早的一部古书《周易·系辞下》（约公元前 11 世纪成书）有“上古结绳而治，后世圣人，易之以书契”的记载（意思是说上古时人们用绳打结计数或记事，后来读书人才用符号计数去代替它）。这就是说，古代人最早用绳打结的方法计数，后来又发明了刻痕代替结



结绳记事

绳。“书契”是在木、竹片或在骨上刻画某种符号。“契”字左边的“丰”是木棒上所刻的痕迹，右边的“刀”是刻痕迹的工具。《史通》称“伏羲始画八卦，造书契，以代结绳之政”。“事大，大结其绳，事小，小结其绳，结之多少，随物众寡”。

结绳计数在世界各地从古墓中挖出的遗物得到了验证。如南美洲古代有一个印加（Inca）帝国，建立于11世纪，15世纪全盛时期其领域包括现在的玻利维亚、厄瓜多尔、秘鲁，以及阿根廷、哥伦比亚和智利的部分领土。16

世纪西班牙殖民者初到南美洲，看到这个国家广泛使用结绳来记事和计数。他们用较细的绳子系在较粗的绳上，有时用不同颜色的绳子表示不同的事物。结好的绳子有一个专有名，叫“基普”。

南美印加人的结绳方法是在一条较粗的绳子上拴很多涂不同颜色的细绳，再在细绳上打不同的结，根据绳的颜色，结的位置和大小，代表不同事物的数目。

印加时代的基普还保留到今天，这些结绳制度在秘鲁高原一直盛行到19世纪。

琉球群岛的某些小岛，如首里、八重山列岛等至今还没有放弃这种结绳计数的古老方法。

在结绳计数所用原料上面，各地有所不同，有的用麻，有的用草，还有的用羊毛。

但结绳有一定的弊端，一不方便，二不易长期保存，后世的人采用在实物（石、木、竹、骨等）上刻痕以代替结绳计数。现在已发现的最早的刻痕计数是于1937年在捷克斯洛伐克的摩拉维亚洞穴中出土的一根约3万年前的狼桡骨，上面刻有55道刻痕，估计是记录猎物的数目，这也是世界上发现最古老的人工刻画计数实物。

在我国山顶洞发现了1万多年前带有磨刻符号的4根骨管。我国云南的佤族1949年前后还在使用刻竹记事。

在非洲中南部的乌干达和扎伊尔交界处的爱德华湖畔的伊尚戈渔村挖出的一根骨头，被确认为公元前8500年的遗物，骨上的刻痕表示数目。考古学家惊讶地发现，骨的右侧的纹数是11、13、17、19，正好是10~20的4个素数。



(其和为 60，恰是两个月的天数，也许与月亮有关。同时可断定古人已有素数的概念，但这似乎是不可思议的）；左侧是 11、21、19、9（其和也为 60）相当于 $10+1$ ， $20+1$ ， $20-1$ ， $10-1$ 。这根骨刻现藏于比利时布鲁塞尔自然博物馆。但纹数之谜尚待进一步揭开。

刻痕的进一步发展，就形成了古老的计数符号——数字，随着记载数目的增大各种进位制也随之出现。

知识点

《周易》

《周易》是一部中国古哲学书籍，是建立在阴阳二元论基础上对事物运行规律加以论证和描述的书籍，对于天地万物进行性状归类，天干地支五行论，甚至精确到可以对事物的未来发展做出较为准确的预测。

相传，《周易》为周文王所著，文王出生在今陕西岐山周原，古称西岐。后来文王被商纣王囚禁在羑里（河南安阳汤阴一个县城，羑里城位于汤阴县北 2 千米处）。周易就这样诞生了。易卦系统最基本的要素为阴阳概念，而阴阳概念包括阴阳的性质和状态两层意义。如果不理会阴阳的状态，只论及其性质，则可以用阳爻（—）和阴爻（—）表示阴阳。将上述阴阳爻按照由下往上重叠 3 次，就形成了八卦，即“乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑”8 个基本卦，称为八经卦。再将八经卦两两重叠，就可以得到 6 个位次的易卦，共有六十四卦，这六十四卦称为六十四别卦，每一卦都有特定的名称。



延伸阅读

《史通》

《史通》是中国及全世界首部系统性的史学理论专著，作者是唐朝的刘知



几。全书内容主要是评论史书体例与编撰方法，以及论述史籍源流与前人修史之得失。包括的范围十分广泛，基本上可以概括为史学理论和史学批评两大类。

《史通》包括内篇 39 篇、外篇 13 篇，其中内篇的《体统》、《纰缪》、《弛张》3 篇在北宋欧阳修、宋祁撰《新唐书》前已佚，全书现存 49 篇。内篇为全书的主体，着重讲史书的体裁体例、史料采集、表述要点和作史原则，而以评论史书体裁为主；外篇论述史官制度、史籍源流并杂评史家得失。《史通》总结了唐初以前编年体史书和纪传体史书在编纂上的特点和得失，认为这两种体裁不可偏废，而在此基础上的断代为史则是此后史书编纂的主要形式。它对纪传体史书的各部分体例，如本纪、世家、列传、表历、书志、论赞、序例、题目等，作了全面而详尽的分析，对编写史书的方法和技巧也多有论述，这在中国史学史上还是第一次。它认为，“征求异说，采摭群言，然后能成一家”，主张对当时各种“杂史”应分别其短长而有所选择，对以往各种记载中存在的“异辞疑事，学者宜善思之”。关于作史原则，《史通》鲜明地提出坚持直书，反对曲笔；其《直书》、《曲笔》两篇，在认识上把中国史学的直笔的优良传统进一步发展了。外篇的《史官建置》是一篇简要的史官制度史；《古今正史》叙述历代史书源流，间或也有一些评论；《疑古》、《惑经》承王充《论衡》的《问孔》、《刺孟》之余绪，对古代史事和儒家经典提出一些疑问，反映了作者对于历史的严肃态度和批判精神；《杂说》等篇本是读史札记，涉及以往史家、史书的得失，有的地方也反映出作者在哲学思想上的见解和倾向。

《史通》对史学工作也有一些论述。如它把史学家的工作分为 3 个等级：一是敢于奋笔直书，彰善贬恶，如董狐、南史；二是善于编次史书，传为不朽，如左丘明、司马迁；三是具有高才博学，名重一时，如周代的史佚、楚国的倚相。刘知几第一次提出了史学家必须具备史才、史学、史识“三长”的论点。史学，是历史知识；史识，是历史见解；史才，是研究能力和表述技巧。“三长”必须兼备，而史识又是最重要的。史识的核心是忠于历史事实，秉笔直书。史有“三长”之说，被时人称为笃论，对后世也有很大影响。

形式多样的进位制

数的进位制的产生与人们的手指紧密相关，“屈指可数”表明人类计数最原始、最方便的工具是手指。

“手指计数法”最早起源于美洲大陆、北西伯利亚及非洲的许多民族。

(1) 五进位制。一只手有 5 个手指，表示数“5”。五进制以罗马数字为代表，大写字母 V 表示 5，实际上是一个手掌的象形(4 指合并，拇指分开)。罗马数字每增 5，就创立一个新的符号，如 1、2、3、4 的符号是 I、II、III、III，5 的符号不是 IIII 而是 V；6、7、8、9 的符号分别是 VI、VII、VIII、VIII，10 的符号是 X，表示两只手 W，后来又改为一上一下，变成 X，这就是五进制数码的雏形。一直到 1800 年，德国农民日历还用五进制。至今在南美洲的玻利维亚群岛的居民中还在使用。

(2) 十进位制。公元前 2000 年的埃及与公元前 1600 年的我国商代甲骨文已有十进位制计数法了，并且我国出现了一、十、百、万等文字符号。因此十进制最早出现在古埃及和我国。

十进制的产生是因为每个人都有 10 个手指，这是大家公认的。可是古希腊亚里士多德(公元前 384~前 322 年)，在《问题集》一书中指出了十进制产生的各种可能的解释，如说古希腊数学家毕达哥拉斯(约公元前 580~前 500 年)为首的学派认为：10 是完美的数，10 是最小的 4 种类型的数的和： $1+2+3+4=10$ ，其中 1 既不是素数又不是合数，2 是偶数，3 是奇数，4 是合数。另一种解释说：1 代表点，2 代表线(两点确定一条直线)，3 代表面(三点确定一个平面)，4 代表立体。亚里士多德的解释是不可信的，把十进制的产生披上了神秘的外衣。再说十进制不是某些学者的发明或规定，它是人们长期实践形成的，而且在毕达哥拉斯以前就



五百	六百	七百	八百	九百	一千	二千	三千	四千	五千	八千	一万	三万
50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	800	1000	30000

甲骨文数字表



有了。

这里需要特别指出的是，我国发明的十进制是“位值制”的，全名为“十进位值制”。即在一个数里，其中一个数码表示什么数要看它所在的位置而定，如 43 和 74 这两个数中都有数字 4，43 中的 4 在十位上表示 40，而 74 中的 4 在个位上表示 4。古埃及人发现的十进制虽说是世界上最早的，但它采用的是累计值而不是位值制。古印度人在公元 595 年才在碑文上有明确的十进位值制，比我国迟 1000 年。再说古巴比伦很早就知道位值制，但用的是六十进位值制，玛雅人也懂得位值制，但用的是二十进位值制。因此，马克思称我国的十进位值制是“最妙的发明之一”。



玛雅人

(3) 二十进位值制。二十进位值制以玛雅人的计数法为代表。玛雅是中美洲印第安人的一个部落。地处热带，人们喜欢赤脚，计数时手指不够就用脚趾，于是产生了二十进位值制。

玛雅人则是满 20 进位，用“·”表示，但要高一位。因此，他们可把任何一个整数都表示出来，而且也用此符号进行四则运算。

(4) 十二进位值制。关于十二进位值制起源的说法很多，如说可能与人的一只手关节有关。除拇指外，其余 4 个手指有 12 个关节；又说可能是一年有 12 个月有关；又说 12 是所有两位的“多倍数”数中最小的一个，除 1 和 12 外，它还有因数 2、3、4、6、12，虽然比 10 只大 2，但因数却比 10 的因数多两个，用它做除数整除

的机会就多，古代就形成了十二进位值制。十二进位值制在历史上曾得宠一时，今天留下来的计数单位中，仍可见十二进位值制的痕迹，如 1 罗 = 12 打，1 打 = 12 个，1 英尺 = 12 英寸，1 先令 = 12 便士，此外钟面有 12 个小时等。

(5) 十六进位值制。十六进位值制从古至今一直应用于实际生活中。如我国旧制 1 斤 = 16 两，欧洲 1 俄尺 = 16 俄寸，1 磅 = 16 英两。由于 $16 = 2^4$ ，它与 2 的关系十分密切，所以在电子计算机上常被用做十进制与二进制的一种过渡进位值制。



(6) 六十进位值制。六十进位值制是地处亚洲西部的古巴比伦（今伊拉克境内）于公元前 2000 年前首先创用的。六十进位值制的起源有几种说法：一说 60 是 2、3、4、5、6、10、12、15、20、30、60 的倍数，可使计算简化；二说与圆周分成 360 份有关。人们生动地解释道：对古代天文数学非常精通的古巴比伦人发现，太阳从东边地平线升起，在西边地平线落下，这个运行轨道即是天穹的半圆。古代巴比伦人把天穹半圆分为 180 等份，每个等份就是太阳的“直径”，叫做“度”。天穹半圆是 180° ，整个圆周就是 360° 了。

关于六十进位值制的起源之说较多，至今还没有一致的看法。流传至今的六十进位值制有：如 1 小时 = 60 分，1 分 = 60 秒，圆周角 = 360° ， $1^\circ = 60'$ ， $1' = 60''$ 等。

(7) 二进位值制。二进位值制的思想萌芽可以说最早出现在我国。公元前 11 世纪的古书《周易》（即易经）中记载：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦”意思是说：一分为二，二分为四，四分为八。用现代数学式子表示，可写成 $2^0 = 1$ ， $2^1 = 2$ ， $2^2 = 4$ ， $2^3 = 8$ 。这里 $2^0 = 1$ 可理解为 2 尚未“分”时是 1， $2^1 = 2$ 可理解为分一次为 2……它可视为我国古代二进位值制中的各位的位值。也有人认为是体现对等比数列 1、2、4、8……的某种认识。

令人吃惊的是，这本古老的书中，“两仪”采用符号“——”（被称为阳爻）和“—”（被称为阴爻）。若从记数法的角度研究，将阳爻看作 1，阴爻看作 0，则每次取 3 个符号如 （坤）、（震）、（乾）……共有 $2^3 = 8$ 种不同的排列法，古称八卦。这八卦分别表示二进位值制的 8 个数：0、1、2、3、4、5、6、7。当然，八卦的提出者没有说可以用二进位值制来表示一切自然数。

最早发现用二进位值制表示自然数的是 17 世纪英国的数学家哈里奥特（1560~1621）等，其中以德国数学家莱布尼茨（1646~1716）最著名。介于澳大利亚北部的约克角半岛与伊利安之间的海峡，叫托列斯海峡。在海峡的附近群岛上居住着一些部落。他们是靠两个数“一”（叫乌拉勃）和“二”（叫阿柯扎）进行计算。遇到“三”就用“阿柯扎、乌拉勃”表示，“四”是“阿柯扎、阿柯扎”，“五”是“阿柯扎、阿柯扎、乌拉勃”，他们使用的是二进位值制，并用文字语言记号来表示。

莱布尼茨期望二进位值制得到广泛应用的设想，在他生前没有实现。可在



他死后 200 多年的今天梦想成真，二进位值制成为电子计算机的中流砥柱了。

(8) 八进位值制。八进位值制依据“逢八进一”的法则，使用 0、1、2、3、4、5、6、7 八个数字计数，称为八进位值制。由于在当代的电子计算中，二进位值制计数数位多，使用不便，在编制计算机解题程序时，常常使用八进位值制。

任何一个八进位值制的数，可以写成底数为 8 的幂的和的形式，这样可以化为十进位值数。

如八进位值制数 $205 = 2 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 5 \times 8^0$ = 十进位值制数 133。

反之，一个十进位值制数只要用底数 8 连续去除，反序取余数，就是要求的八进位值制数。

综上所述，世界上不同的年代出现了五花八门的进位值制和眼花缭乱的计数符号体系，这都足以证明数学起源的多元性和数学符号的多样化。

虽然，数的进位值制有多种，但据调查，世界大多数地区还是采用十进位值制的。

知识点

玛雅人

玛雅人 (Mayan)，中美洲地区和墨西哥印第安人的一支。又译“马亚人”，“马雅人”。约公元前 2500 年就已定居今墨西哥南部、危地马拉、伯利兹以及萨尔瓦多和洪都拉斯的部分地区。约有 200 万人，属蒙古人种美洲支。使用玛雅语，属印第安语系玛雅—基切语族。

21 世纪初，约有 70 种玛雅语言，有超过 500 万的玛雅人在使用，其中大部分能讲双语（西班牙语）。在西班牙征服墨西哥和中美洲之前，玛雅人曾拥有过西半球最伟大的文明之一。他们从事农耕、兴建巨大的石头建筑和金字塔神殿、冶炼金和铜，并使用一种现今已大部分能够解读的象形文字。

延伸阅读

数 独

“数独”(sudoku)一词来自日语，意思是“单独的数字”或“只出现一次的数字”。概括来说，它就是一种填数字的游戏。但这一概念最初并非来自日本，而是源自“拉丁方块”，它是18世纪的瑞士数学家欧拉发明的。出生于1707年的欧拉被誉为有史以来最伟大的数学家之一。

欧拉从小就是一个数学天才，大学时他在神学院里攻读古希伯来文，但却连续13次获得巴黎科学院的科学竞赛的大奖。

1783年，欧拉发明了一个“拉丁方块”，他将其称为“一种新式魔方”，这就是数独游戏的雏形。不过，当时欧拉的发明并没有受到人们的重视。直到20世纪70年代，美国杂志才以“数字拼图”的名称将它重新推出。

1984年日本益智杂志《Nikoli》的员工金元信彦偶然看到了美国杂志上的这一游戏，认为可以用来吸引日本读者，于是将其加以改良，并增加了难度，还为它取了新名字称作“数独”，结果推出后一炮而红，让出版商狂赚了一把。至今为止，该出版社已经推出了21本关于数独的书籍，有一些上市后很快就出现了脱销。

数独后来的迅速走红，主要归功于一位名叫韦恩·古尔德的退休法官。古尔德现居住在爱尔兰，1997年，无意中发现这个游戏，并编写了一个计算机程序来生成完整的数独方阵。2004年年底，伦敦《时报》在古尔德的建议下开辟了数独专栏，《每日电讯报》紧随其后，在2005年1月登出了数独。后来，世界各国数十家日报相继开辟专栏来介绍数独，有的甚至把它摆在头版大肆炒作，招揽读者。专门介绍这种娱乐的杂志和一本又一本的书籍如雨后春笋般涌现，相关的比赛，网站和博客等等，也接二连三地冒出来。



古代埃及的计数法

古代埃及地处亚、非、欧三洲要冲，东临红海，北濒地中海南岸，西南是浩瀚无垠的撒哈拉沙漠。古埃及大部分地区气候炎热干燥，雨量稀少，沙漠占全国面积的90%以上。尼罗河全长6450千米，由南向北倾泻而下，注入地中海，是埃及唯一的河流。

大约在5000年前，古埃及人民已在酿造、建筑和防腐等工程技术方面达到了很高的水平。

古埃及人把文字记载在纸草上。“纸草”是一种生长在尼罗河三角洲的水生植物，形状像芦苇，把它的茎逐层撕开，剖成长条，整齐地排列在一起，然后联合成片，压平晒干。用削尖的芦苇秆蘸着颜料在纸草上书写。用纸草记下来的事情或数字内容，后人叫纸草书。

纸草书是不容易保存的，因此发现的纸草书文献十分珍贵。迄今为止，纸草书发现两本，一本叫伦敦本，一本叫莫斯科本。目前我们对古埃及数学及其记数符号的认识主要根据这两本用僧侣文字写成的纸草书。伦敦纸草书在埃及古都的废墟中发现，1858年由英国莱茵德（A. H. Rhind）所购得。他死后纸草书被英国不列颠博物馆收藏。1877年经埃津罗尔数学教授注释，人们才逐渐知道纸草书的数学内容，此书通常被人们叫做莱茵德纸草书或伦敦纸草书。这本书是用僧侣文写成的，作者是古埃及阿默斯（Ahmes，约公元前1700年）书记员（也有人说他是祭祀的僧人）。书名十分冗长而有趣《阐明对象中一切黑暗的、秘密的事物的指南》。

另一本叫莫斯科纸草书，大约是公元前1850年写的。该书于公元1893年被俄国收藏家柯兹尼雪夫获得，1912年转归莫斯科艺术博物馆所有，苏联科学院院士图拉耶夫（1868～1920）加以研究，1930年斯特卢威完成并出版。可惜此书散失卷首，不知书名和作者。

古埃及除纸草书外，还有一种皮革书，把文字写在兽皮上，其中也有书写着大量数字符号的“皮革数学卷”，最早也是由莱茵德于1858年发现的，现藏