

质量可靠性增长 与评定方法

周源泉 著

北京航空航天大学出版社

质量可靠性增长与评定方法

周源泉 著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书以质量可靠性增长及评定为中心,介绍相关的质量可靠性统计方法,其内容包括分布拟合优度检验,异常值检验,单元(含二项、指数、正态、对数正态、威布尔、极值和 Gamma 等分布)可靠性、维修性、可用性评定,结构可靠性评定,环境因子,质量可靠性增长及系统可靠性(含冗余系统可靠性设计)、系统可用性评定。本书不作数学推导,以介绍模型、方法为主,每个模型附有实例说明,是一本手册性的工具书。这些方法适用于各类工业产品与系统。

本书可供产品设计师和质量可靠性工程师从事产品质量可靠性设计、增长、评定及验收工作参考。也可作为理工科高年级大学生、研究生及科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

质量可靠性增长与评定方法/周源泉著. —北京:北京
航空航天大学出版社,1997. 12

ISBN 7-81012-717-9

I. 质… II. 周… III. 工程技术-质量控制-可靠性验证
IV. TB114. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26256 号

质量可靠性增长与评定方法

周源泉 著

责任编辑 郭维烈

责任校对 李宝田

北京航空航天大学出版社出版发行

北京学院路 37 号(100083) 62015720(发行科电话)

各地书店经销

北京市朝阳区科普印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:22.75 字数:581千字

1997 年 12 月第一版 1997 年 12 月第一次印刷 印数:5 000 册

ISBN 7-81012-717-9/TB·061 定价:29.50 元

序

1996 年底,国务院颁发了“质量振兴纲要(1996 年—2010 年)”,纲要指出,“企业要积极采用科学的质量管理方法”,要大力“鼓励质量改进”,要求到 2010 年,我国的主要产业的产品质量和服务水平接近或达到国际先进水平.在这样的形势下,产业界很需要有关质量、可靠性改进与评价方面的书籍.为了满足这种需要,中国航天工业总公司一院 702 所周源泉同志撰写了这部著作.

本书作者长期从事质量、可靠性的应用与研究工作的,编纂中以质量、可靠性改进、单元与系统质量可靠性评定为中心,涉及质量可靠性统计的十个方面,内容丰富,叙述扼要,着眼实用,理论严谨,既包含传统方法,又引入最新成果,避免冗长的数学推导,实例众多,容易为工程人员理解、掌握.大量的军、民品工程实践证明,书中所述方法对缩短研制周期、节约试验时间、减少试验样品等有明显的社会效益和经济效益.

相信此书的出版,会促进国内工业产品质量,可靠性改进与评价的实践与研究工作的.为此特作序,向广大读者推荐这本书.

梁思礼

1997 年 5 月

前 言

质量可靠性增长与评定技术,多年来一直受到质量可靠性工程界的关注.从60年代起,我国的质量可靠性工作者就在钱学森教授的关心下,开展研究应用工作.在“七五”期间,该技术被列为国家重点科技攻关课题,“八五”期间又被国家技术监督局、国防科工委列为重点科技推广项目.笔者有幸负责这些课题,与课题组同事一道,取得了一系列研究应用成果,并产生了巨大的社会效益和经济效益.

在多年的研究与推广中,许多工程师向笔者提出要求,希早日编纂一本手册性的书籍,既包括最新成果,又避免数学推导,只列出模型、方法、数表等,并对每种模型能给出应用实例,便于工程人员参考,本书就是应这种要求而撰写的.书中还列出了参考文献,供进一步研究之用.

工作中,笔者得到陈希孺、成平、张尧庭教授的许多帮助.并承中科院院士、中国航天工业总公司科技委顾问梁思礼教授为本书撰写了序言,在此谨向他们表示衷心的感谢!

本书所列方法虽已在航天、航空、核工业、兵工、船舶、电子、机械、石油、邮电及家电等大量工程中得到了成功的应用,但限于笔者水平,错误、缺点在所难免,恳请读者批评指正.

最后谨以本书纪念中国航天工业总公司702所已故的翁朝曦研究员,十年中她与笔者进行了卓有成效的合作,为本书的编纂奠定了基础.另外,纪念已故的魏宗舒先生,长期以来他始终关心与支持笔者的工作.

作 者

1997年4月于北京

目 录

第一章 分布的拟合优度检验

§ 1.1 指数及双参数指数分布的拟合优度检验	(1)
§ 1.2 Weibull 及 Gumbel 分布的拟合优度检验	(3)
§ 1.3 正态及对数正态分布的拟合优度检验	(5)
§ 1.4 分布间的鉴别	(8)
§ 1.5 拟合优度检验及分布鉴别的数值例	(11)
§ 1.6 拟合优度检验的若干通用方法	(20)
参考文献	(28)
附表 1.1 W 检验统计量 W 的系数 a_i 的值	(30)
附表 1.2 W 检验统计量 W 的 α 分位数 W_α	(32)
附表 1.3 D 检验统计量 Y 的 α 分位数 Y_α	(32)
附表 1.4 偏度检验统计量 b_s 的 p 分位数 z_p	(34)
附表 1.5 峰度检验统计量 b_k 的 p 分位数 z'_p	(34)
附表 1.6 统计量 $w = \hat{\sigma}/\sigma$ 分布的分位数	(36)

第二章 异常值检验

§ 2.1 指数分布样本异常值的检验	(41)
§ 2.2 正态分布样本异常值的检验	(46)
§ 2.3 Weibull 分布样本异常值的检验	(51)
参考文献	(53)
附表 2.1 $T_{n(n)}$ 的临界值 $T_{n(n)}(1-\alpha)$	(54)
附表 2.2 $T_{n(1)}$ 的临界值 $T_{n(1)}(\alpha)$	(55)
附表 2.3 Nair 检验的临界值	(58)
附表 2.4 Grubbs 检验的临界值 $G_{1-\alpha}(n)$	(60)
附表 2.5 极差对样本标准差之比 W/s 的临界值	(61)
附表 2.6 T (单边)检验的临界值	(61)
附表 2.7 同时检验两个最大或最小的观测值时, $s_{n-1,n}^2/s^2$ 或 $s_{1,2}^2/s^2$ 的临界值	(62)
附表 2.8 Dixon 检验的临界值 $D_{1-\alpha}(n)$, (单侧)	(62)
附表 2.9 Dixon 检验的临界值 $\tilde{D}_{1-\alpha}(n)$, (双侧)	(62)
附表 2.10 Dixon 检验的临界值	(63)
附表 2.11 Irwin 检验的临界值 $I_{1-\alpha}(n)$	(63)

第三章 产品的可靠性评定

§ 3.1 成败型产品的可靠性评定	(64)
-------------------	------

§ 3.2 指数型产品的可靠性评定	(72)
§ 3.3 完全样本正态型、对数正态型产品的可靠性评定	(83)
§ 3.4 截尾样本时,正态型、对数正态型产品的可靠性评定	(92)
§ 3.5 威布尔(Weibull)型产品的可靠性评定	(102)
§ 3.6 I 型极小值分布产品的可靠性评定	(119)
§ 3.7 I 型极大值型产品的可靠性评定	(125)
§ 3.8 Gamma 型产品的可靠性评定	(129)
参考文献	(133)
附表 3.1 正态单边容许限系数表	(136)
附表 3.2 正态双边容许限系数表	(140)
附表 3.3 正态截尾样本的辅助估计函数表, $\lambda(h, \gamma)$	(144)
附表 3.4 正态截尾样本时的区间估计系数表(基于 BLUE)	(146)
附表 3.4.1 $t^* = (\mu^* - \mu) / \sigma^*$ 的分位数	(146)
附表 3.4.2 $w^* = \sigma^* / \sigma$ 的分位数	(147)
附表 3.4.3 $(t_R - \mu^*) / \sigma^*$ 的分位数	(148)
附表 3.5 Weibull 截尾样本时的区间估计系数表(基于 BLIE)	(151)
附表 3.5.1 $v = (\tilde{\mu} - \mu) / \tilde{\sigma}$ 的分位数	(151)
附表 3.5.2 $V(R) = (\tilde{\mu} - x_R) / \tilde{\sigma}$ 的分位数	(157)

第四章 产品的维修性评定

§ 4.1 维修时间服从指数分布时的维修性评定	(175)
§ 4.2 维修时间服从正态分布时的维修性评定	(177)
§ 4.3 维修时间服从对数正态分布时的维修性评定	(179)
§ 4.4 维修时间服从 Weibull 分布时的维修性评定	(182)
§ 4.5 维修时间服从伽马(Gamma)分布时的维修性评定	(185)
参考文献	(188)

第五章 产品的可用性评定

§ 5.1 失效时间/维修时间均为 Gamma 分布时,产品的可用度下限	(190)
§ 5.2 失效时间/维修时间服从指数/对数正态分布时,产品的可用度下限	(191)
参考文献	(193)
附表 5.1 α 值表($\gamma=0.8$)	(194)

第六章 机械结构可靠性评定与设计

§ 6.1 结构可靠性的区间估计	(195)
§ 6.2 变差系数的区间估计	(199)
§ 6.3 安全系数的区间估计	(207)
参考文献	(211)
附表 6.1 正态分布变差系数的置信上限表	(212)

第七章 可靠性增长

§ 7.1 AMSAA-BISE 模型	(216)
§ 7.2 Duane 模型	(232)
§ 7.3 Crow 的可靠性增长预测模型	(234)
§ 7.4 可靠性增长管理模型	(236)
§ 7.5 Gompertz 模型	(241)
§ 7.6 顺序约束阶段可靠性增长模型	(242)
§ 7.7 维修性增长	(256)
参考文献	(258)
附表 7.1 Laplace 检验统计量 μ 的临界值 $\mu_{1-\alpha/2}$	(260)
附表 7.2 Cramer-Von Mises 统计量 C_M^2 的临界值 $C_{M,\alpha}^2$ 表	(261)
附表 7.3.1 AMSAA-BISE 模型定时截尾区间估计系数表	(262)
附表 7.3.2 AMSAA-BISE 模型定时截尾随机化区间估计系数表 ($u=0.5$)	(264)
附表 7.4 AMSAA-BISE 模型定数截尾区间估计系数表	(266)
附表 7.5 AMSAA-BISE 模型预测区间估计系数表	(268)
附表 7.6 相关系数 $\rho=0$ 时, 经验相关系数 $\hat{\rho}$ 的临界值 $\hat{\rho}_\alpha$ 表	(273)

第八章 环境因子

§ 8.1 指数单元的环境因子	(275)
§ 8.2 指数串联系统的环境因子	(279)
§ 8.3 成败型单元的环境因子	(282)
§ 8.4 对数正态单元的环境因子	(285)
§ 8.5 Weibull 单元的环境因子	(286)
§ 8.6 Weibull 过程单元的环境因子	(288)
§ 8.7 Gamma 单元的环境因子	(291)
参考文献	(293)

第九章 系统可靠性评定

§ 9.1 串联系统的可靠性评定	(295)
§ 9.2 并联系统的可靠性评定	(308)
§ 9.3 $k/N(G)$ 系统的可靠性评定	(315)
§ 9.4 相同指数单元旁联系统的可靠性评定	(321)
§ 9.5 和联系统的可靠性评定	(324)
§ 9.6 指数单元组成的系统 MTBF 评定	(331)
§ 9.7 冗余系统的可靠性设计	(335)
§ 9.8 单元及系统均取得试验数据时, 系统的可靠性评定	(338)
参考文献	(342)

第十章 系统可用性评定

§ 10.1 快照单元的系统可用性下限.....	(344)
§ 10.2 相同指数失效/指数维修单元的系统可用性的精确下限	(346)
§ 10.3 不同指数失效/指数维修单元的系统可用性的近似下限	(350)
参考文献	(354)

第一章 分布的拟合优度检验

确定产品的寿命、维修时间、强度及其它特性数据来自何种分布,是统计推断中建立数学模型的基础.因此,在可靠性工程及可靠性统计中,这是一件十分重要的工作.

确定产品寿命等特性服从何种分布,通常有两类方法,一类方法是根据失效物理或工程技术考虑分析论证该特性服从何种分布;另一类方法是利用特性数据作分布拟合优度检验.本章将介绍后一类方法.

分布拟合优度检验的方法甚多,有的适用于多种甚至各种分布,有的则仅适用于某个特定的分布.本章先介绍可靠性工程中最常用的几种失效分布(如指数分布、双参数指数分布、正态分布、对数正态分布、威布尔分布、极值分布等)的功效较高的特定检验方法.其次,同一组失效数据往往会显示出可用两种甚至多种分布拟合.为了区别何种分布更为合适,可用似然比检验及有关的检验方法鉴别,这是本章的第二部分的内容.似然比检验用以区分正态分布与双参数指数分布,区分对数正态分布与 Weibull 分布(或区分正态分布与 Gumbel 分布).另外,利用有关的检验方法,可以鉴别指数分布与双参数指数分布,指数分布与 Weibull 分布.第三部分介绍一些适用于多种分布的检验方法,如 χ^2 检验,基于经验分布函数(EDF)的检验等.若干典型的数值例将说明各种检验的用法,也为读者处理各种拟合优度检验的实际问题提供参考.

§ 1.1 指数及双参数指数分布的拟合优度检验

1.1.1 指数分布的拟合优度检验

1. 适用范围

对样本量为 n 截尾数为 r 的无替换及有替换的定数截尾或定时截尾数据,检验它是否来自指数分布.

2. 所需的原始数据

投试 n 个样品,测得 r 个失效数据,可分为下述两种情形:

无替换或有替换的定数截尾数据:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}, \quad r \leq n;$$

无替换或有替换的定时截尾数据:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)} < t', \quad r \leq n;$$

对无替换的情况 $t_{(i)}$ 是失效时间的顺序统计量;对有替换的情况, $t_{(i)}$ 是从试验开始到第 i 次失效发生的累积试验时间. t' 为试验终止时间;

预定的显著性水平 α .

3. 模型、方法及公式

这里介绍最常用的 605- χ^2 检验及 Gnedenko(格涅坚科)检验.

(1) 605- χ^2 检验

取原假设 H_0 : 失效数据来自指数分布, 则统计量为:

$$\chi^2 = 2 \sum_{k=1}^d \ln \frac{T^*}{T_k} \quad (1.1)$$

式中

$$d = \begin{cases} r-1 & \text{定数截尾} \\ r & \text{定时截尾,} \end{cases}$$

T^* 是到试验终止时的总试验时间, T_k 是到第 k 次失效的总试验时间, 即

$$T^* = \begin{cases} nt_{(r)} & \text{有替换定数截尾} \\ \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_{(r)} & \text{无替换定数截尾,} \end{cases}$$

$$T^* = \begin{cases} nt' & \text{有替换定时截尾} \\ \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t' & \text{无替换定时截尾,} \end{cases}$$

$$T_k = \begin{cases} nt_{(k)} & \text{有替换} \\ \sum_{i=1}^k t_{(i)} + (n-k)t_{(k)} & \text{无替换.} \end{cases}$$

可以证明, H_0 成立时, χ^2 服从 χ^2_{2d} , 即 χ^2 服从自由度为 $2d$ 的 χ^2 分布. 故对给定的显著性水平 α , 若统计量的观测值 χ^2 有

$$\chi^2 < \chi^2_{2d, \alpha/2} \quad \text{或} \quad \chi^2 > \chi^2_{2d, 1-\alpha/2}$$

就拒绝 H_0 , 反之, 就接受 H_0 .

在 $\chi^2 < \chi^2_{2d, \alpha/2}$ 时, 表明前面的相邻失效间隔较大, 而后面的相邻失效间隔较小, 失效率可能是递增的; 而当 $\chi^2 > \chi^2_{2d, 1-\alpha/2}$ 时, 失效率可能是递减的. 式中 $\chi^2_{f, \delta}$ 是自由度为 f 的 χ^2 分布的 δ 分位数. 可由 GB4086. 1~4086. 6-83 得到.

这个方法的优点是, 检验的功效较高, 且适用性很强, 它不仅适用于以上的情况, 而且对试验中有数据遗漏, 样品有中断试验及补充加入试验等情况, 只要能算出到各次失效的总试验时间及到试验终止的总试验时间, 均可应用 $605-\chi^2$ 检验.

在失效次数较大时, 计算 $605-\chi^2$ 检验的统计量较为麻烦. 此时, 可用 Gnedenko 检验, 它计算较简便, 检验功效也较高.

(2) Gnedenko 检验

它处理样本量为 n 截尾数为 r 的无替换定数截尾数据:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}.$$

取原假设 H_0 : 该组数据来自指数分布.

检验统计量为:

$$F = \frac{r_2 \sum_{i=1}^{r_1} y_i}{r_1 \sum_{i=r_1-1}^r y_i} \quad (1.2)$$

式中 $r_1 = [r/2]$, $r_2 = r - r_1$

$$y_i = (n-i+1)(t_{(i)} - t_{(i-1)}), \quad i=1, \cdots, r, (t_{(0)}=0).$$

在 H_0 成立时,可以证明, F 服从自由度为 $2r_1, 2r_2$ 的 F 分布,即 F 服从 $F_{2r_1, 2r_2}$.

当 $F < F_{2r_1, 2r_2, \alpha/2}$ 时,表明相邻失效间隔有变大的趋势,失效率可能是递减的;

当 $F > F_{2r_1, 2r_2, 1-\alpha/2}$ 时,失效率可能是递增的. 这里 $F_{f_1, f_2, \delta}$ 是自由度为 f_1, f_2 的 F 分布的 δ 分位数,可由 GB4086. 4-83 读出,因此,当

$$F < F_{2r_1, 2r_2, \alpha/2} \quad \text{或} \quad F > F_{2r_1, 2r_2, 1-\alpha/2}$$

时,拒绝 H_0 ;反之,接受 H_0 .

4. 数值例

见 § 1.5.

1.1.2 双参数指数分布的拟合优度检验

1. 适用范围

对大小为 n 截尾数为 r 的定数截尾样本 ($3 \leq r \leq n$),可检验它是否来自分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-(t-\mu)/\sigma}, \quad t \geq \mu$$

的双参数指数分布.

2. 所需的原始数据

样本量为 n 截尾数为 r 的定数截尾数据:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}, \quad 3 \leq r \leq n;$$

预定的显著性水平 α .

3. 模型、方法及公式

取原假设 H_0 : 上述定数截尾样本来自双参数指数分布.

检验统计量为

$$\chi^2_* = 2 \sum_{j=2}^{r-1} \ln(s_r/s_j), \quad (1.3)$$

式中

$$s_j = \sum_{i=2}^j y_i, \quad j = 2, 3, \cdots, r.$$

$$y_i = (n-i+1)(t_{(i)} - t_{(i-1)}), \quad i = 2, \cdots, r.$$

当 H_0 成立时,可以证明,式(1.3)的统计量 χ^2_* 服从 $\chi^2_{2(r-2)}$,故当

$$\chi^2_* < \chi^2_{2(r-2), \alpha/2} \quad \text{或} \quad \chi^2_* > \chi^2_{2(r-2), 1-\alpha/2}$$

时,拒绝 H_0 ;反之,接受 H_0 .

4. 数值例

见 § 1.5.

§ 1.2 Weibull 及 Gumbel 分布的拟合优度检验

1. 适用范围

对样本量为 n 的完全样本或样本量为 n 截尾数为 r 的定数截尾样本,检验该样本是否来自威布尔(Weibull)分布或极值分布(即 I 型极小值分布).

对样本量为 n 的完全样本,检验该样本是否来自极大值分布(即 I 型极大值分布).

2. 所需的原始数据

对检验 Weibull 及极值分布,需样本量为 n 截尾数为 r 的定数截尾或完全样本:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}, \quad r \leq n;$$

对检验极大值分布,需样本量为 n 的完全样本:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(n)};$$

预定的显著性水平 α .

3. 模型、方法及公式

(1) Mann, Scheuer & Fertig 检验

对二参数 Weibull 分布的拟合优度检验,以 Mann, Scheuer & Fertig 检验的功效较高,它已被 IEC TC-56(C. O.)162 号文件所引用. 为方便以下简称为 M 检验.

取原假设 $H_0: t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}, r \leq n$, 来自二参数 Weibull 分布.

M 检验的统计量为

$$M = \sum_{i=r_1+1}^{r-1} \frac{l_i}{r_2} \bigg/ \sum_{i=1}^{r_1} \frac{l_i}{r_1} \quad (1.4)$$

式中 $r_1 = [r/2]$, 即 r_1 是 $r/2$ 的最大整数部分.

且

$$r_2 = r - r_1 - 1,$$

而

$$l_i = \frac{\ln t_{(i+1)} - \ln t_{(i)}}{E(Z_{i+1}) - E(Z_i)}, \quad i = 1, \cdots, r-1,$$

其中 $E(Z_i)$ 是标准极值分布顺序统计量之均值, 在《可靠性试验用表》中列出了 $n=2(1)100$, $r=1(1)n$ 的 $E(Z_i)$, $i=1, \cdots, r$. 当 $n > 100$ 时, 可用 Blom 近似计算 $E(Z_i)$ 之差 (对给定的 n):

$$E(Z_{i+1}) - E(Z_i) \approx \ln \left\{ \ln \left[\frac{4(n-i-1)+3}{4n+1} \right] \right\} \bigg/ \ln \left[\frac{4(n-i)+3}{4n+1} \right] \bigg\}.$$

事实上, 当 $n \geq 10$ 时, Blom 近似已有足够的精度. 该近似的误差随 i 的增加由正变负. 因此, 前 r_1 个 l_i 之和偏小, 而后 r_2 个 l_i 之和偏大, 故 M 值的 Blom 近似总是偏大.

当 $M \geq F_{2r_2, 2r_1, 1-\alpha}$ 时, 拒绝 H_0 ; 否则, 接受 H_0 .

(2) M 检验用于极值分布

设定数截尾或完全样本为: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)}, r \leq n$.

取原假设 H_0 : 样本来自极值分布, 其分布函数为:

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ -\exp \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}.$$

其 M 检验统计量同式 (1.4), 但其 l_i 应改为:

$$l_i = \frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{E(Z_{i+1}) - E(Z_i)},$$

为便于区别, 其统计量记为 M_1 .

(3) M 检验用于极大值分布

对极大值分布, M 检验仅适合于完全样本, 记为 $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \cdots \leq y_{(n)}$.

取原假设 H_0 : 完全样本来自极大值分布, 其分布函数为:

$$F(y) = \exp \left\{ -\exp \left(-\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\}.$$

其 M 检验统计量同式 (1.4), 但其 l_i 需改为

$$l_i = \frac{y_{(n+1-i)} - y_{(n-i)}}{E(Z_{i+1}) - E(Z_i)},$$

即取 $x_{(i)} = -y_{(n+1-i)}$, 并将检验统计量记为 M_2 .

4. 数值例

见 § 1.5.

§ 1.3 正态及对数正态分布的拟合优度检验

1. 适用范围

对样本量为 n 的完全样本或样本量为 n 的截尾数为 r 的定数截尾样本, 可检验该样本是否来自正态分布或对数正态分布.

2. 所需的原始数据

样本数据

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)}, \quad r \leq n,$$

给定的显著性水平 α .

3. 模型、方法及公式

在完全样本的情况, 检验其是否来自正态分布(或对数正态分布)已有多种功效较高的统计检验方法, 如夏皮罗-威尔克(Shapiro-Wilk)的 W 检验, 达戈斯蒂诺(D'Agostino)的 D 检验, 这两种检验是基于顺序统计量的性质而得到的; 还有直观性强的偏度检验、峰度检验. 但对定数截尾样本, 迄今仍缺乏适用的数值检验方法, 工程上可以应用概率纸方法. 下面分别予以介绍.

(1) W 检验

取原假设 H_0 : 样本 $x_{(i)}, i=1, \cdots, n$ 来自正态分布,

检验统计量 W 为

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^d a_i [x_{(n+1-i)} - x_{(i)}] \right\}^2 / \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2. \quad (1.5)$$

W 检验的使用范围是 $3 \leq n \leq 50$, 式中 $d = [n/2]$, $\bar{x}$ 是样本均值: $\bar{x} = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_{(i)}$, 系数 a_i 有表可查, 其范围为 $1 \leq i \leq [n/2], 3 \leq n \leq 50$, 见附表 1.1.

可以证明: $\bar{a} = n^{-1} \sum_{i=1}^n a_i = 0, \quad a_i = -a_{n+1-i}, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$

故有

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})(a_i - \bar{a}) \right\}^2 / \left\{ \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 \right\}.$$

即 W 是 n 个数时 $(x_{(i)}, a_i), i=1, \cdots, n$ 间的相关系数的平方, 故 $0 \leq W \leq 1$. 在 H_0 成立时, $(x_{(i)}, a_i), i=1, \cdots, n$ 呈很好的线性关系, 且 W 的值很接近 1.

故当

$$W \leq W_\alpha$$

时, 拒绝 H_0 ; 反之, 接受 H_0 .

W_α 是 W 的 α 分位数, 可查附表 1.2 得到.

(2) D 检验

由于 $n > 50$ 时, W 检验的系数 a_i 计算麻烦, 故需研究其它检验方法. D'Agostino 提出了 D 检验方法, 其统计量为

$$D = T / (n^{3/2} Q). \quad (1.6)$$

式中

$$T = \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2} \right) x_{(i)},$$

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

D 检验的适用范围是 $50 \leq n \leq 1000$.

D 的均值, 标准差约为:

$$E(D) = 0.282\ 094\ 79,$$

$$\sqrt{\text{Var}(D)} = 0.029\ 985\ 98 / \sqrt{n},$$

其标准化变量记为 Y :

$$Y = [D - E(D)] / \sqrt{\text{Var}(D)}$$

由于 Y 趋于 $N(0, 1)$ 的速度很慢, 故 D'Agostino 用 Monte Carlo 方法计算 Y 的 α 及 $1-\alpha$ 分位数 $Y_\alpha, Y_{1-\alpha}$, 模拟结果表明, 在 H_0 成立时, Y 集中在 0 附近; 在 H_0 不成立时, Y 值或远小于 0 或远大于 0.

因此, 当 $Y \leq Y_{\alpha/2}$ 或 $Y \geq Y_{1-\alpha/2}$ 时, 拒绝 H_0 ; 而在 $Y_{\alpha/2} < Y < Y_{1-\alpha/2}$ 时, 接受 H_0 . Y 的分位数表可查附表 1.3.

(3) 偏度检验

样本为 $x_i, i=1, \dots, n$, 则样本偏度为

$$b_s = \frac{\sqrt{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \right]}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{3/2}}, \quad (1.7)$$

若母体 X 服从正态分布, 则其偏度

$$\beta_s = E(X - EX)^3 / [E(X - EX)^2]^{3/2} = 0.$$

若怀疑 $\beta_s > 0$ (正偏或右偏) 或 $\beta_s < 0$ (负偏或左偏), 从而怀疑母体不是正态分布, 可作如下检验:

$$H_0: \beta_s = 0 \leftrightarrow H_1: \beta_s > 0,$$

或

$$H_0: \beta_s = 0 \leftrightarrow H_1: \beta_s < 0.$$

相应于上述两种情况, 若

$$b_s > Z_{1-\alpha}$$

或

$$b_s < -Z_{1-\alpha}$$

时, 拒绝 H_0 ; 否则, 接受 H_0 . 式中 $Z_{1-\alpha}$ 是样本偏度 b_s 的 $1-\alpha$ 分位数, 可查附表 1.4 得到.

(4) 峰度检验

样本为 $x_i, i=1, \dots, n$, 则样本峰度为

$$b_k = n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2. \quad (1.8)$$

若母体 X 服从正态分布, 则其峰度

$$\beta_k = E(X - EX)^4 / [E(X - EX)^2]^2 = 3,$$

如怀疑母体的峰度 $\beta_k > 3$, (称突峰或过峰) 或 $\beta_k < 3$ (称坦峰或不足峰), 并由此怀疑母体不是正态分布, 可作如下峰度检验:

$$H_0: \beta_k = 3 \leftrightarrow H_1: \beta_k > 3,$$

或

$$H_0: \beta_k = 3 \leftrightarrow H_1: \beta_k < 3.$$

相应于上述两种情况, 当

$$\beta_k > Z'_{1-\alpha},$$

或

$$\beta_k < Z'_\alpha$$

时拒绝 H_0 ; 反之, 接受 H_0 . 式中 Z'_δ 是样本峰度 b_k 的 δ 分位数, 可查附表 1.5 得到.

(5) 概率纸检验法

对于截尾样本, 正态分布及对数正态分布的拟合优度检验尚缺少方法, 而概率纸方法可用于截尾样本, 下面予以简要介绍:

正态概率纸是一张坐标纸, 其 x 轴是线性刻度的, 而 y 轴是按标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 作刻度的, 如图 1.1.

利用样本数据作正态分布拟合优度检验的步骤如下:

① 将样本数据从小到大排序如下:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)}, \quad r < n.$$

② 计算第 i 个样本点的经验分布函数值:

$$F_n(x_{(i)}) = i/(n+1), \quad \text{均值法};$$

或 $F_n(x_{(i)}) = (i-0.3)/(n+0.4), \quad \text{中位秩法}.$

前者可用于对称分布的情况. 在很不对称的分布情况, 可以使用后者.

③ 将点 $(x_{(i)}, F_n(x_{(i)}))$, $i=1, \dots, r$ 画在正态概率纸上.

④ 如果用目力发现, 这些点落在一条直线附近, 则认为这组样本来自正态分布; 如果这些点偏离直线较远, 则认为不服从正态分布.

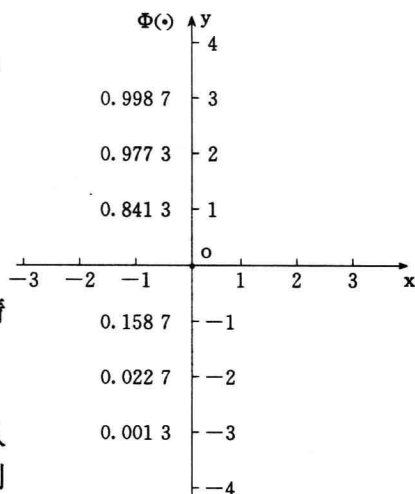


图1.1 正态概率纸

在配置直线时, 要注意在纵坐标范围 $(0.2, 0.8)$ 内的点, 应取较大的权, 这些点与所配置的直线的偏离要尽量地小, 而两头的点可以与直线偏离得略远些.

对数正态概率纸的纵轴刻度与正态概率纸相同, 但横轴是用自然对数刻度的.

截尾样本数据是否来自对数正态分布, 可用对数正态概率纸检验, 其方法与上述方法类同, 即将点 $(x_i, \frac{i-0.3}{n+0.4})$, $i=1, \dots, r$, 画在对数正态概率纸上, 若诸点在直线附近, 则认为样本来自对数正态分布; 反之, 拒绝样本来自对数正态分布的假设.

概率纸检验的优点是简便易行, 可适用于截尾样本, 缺点是该方法是定性的, 所得结论因人而异.

以上的 W 检验、D 检验、偏度检验、峰度检验也可用于对数正态分布的拟合优度检验, 进行时, 仅需将样本数据 $t_{(i)}$ 换成 $\ln t_{(i)}$ 即可.

4. 数值例

见 § 1.5.

§ 1.4 分布间的鉴别

分布间的鉴别方法, 在完全样本情况下, 有似然比检验方法, 还有一些对几种特定分布的鉴别方法, 这包括区分指数与双参数指数分布的检验, 区分指数分布与 Weibull 分布的检验. 下面分别予以介绍:

1.4.1 似然比检验

1. 适用范围

对完全样本数据, 似然比检验可用于鉴别对数正态分布与 Weibull 分布 (当然, 也可鉴别正态分布与 Gumbel 分布), 鉴别正态分布与双参数指数分布 (当然, 也可鉴别对数正态分布与对数双参数指数分布, 即 Pareto 分布).

2. 所需的原始数据

被研究的特征量 X 的完全样本数据:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)};$$

给定的显著性水平 α .

3. 模型, 方法及公式

(1) 区分对数正态分布与 Weibull 分布的似然比检验

取 $H_0: X$ 服从对数正态分布, 即

$$f_0(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\{-(\ln x - \mu)^2 / 2\sigma^2\}.$$

$\leftrightarrow H_1: X$ 服从 Weibull 分布, 即

$$f_1(x; m, \eta) = m\eta^{-m} x^{m-1} e^{-(x/\eta)^m},$$

其极大似然比统计量为

$$R_{01} = \frac{\prod_{i=1}^n f_1(x_i; \hat{m}, \hat{\eta})}{\prod_{i=1}^n f_0(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})} = \frac{(2\pi e \hat{\sigma}^2 \hat{m}^2)^{n/2} \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{m}} e^{-(x_i/\hat{\eta})^{\hat{m}}} \right]}{\prod_{i=1}^n f_0(x_i; \hat{\mu}, \hat{\sigma})}.$$

记

$$E = R_{01}^{1/n} = \sqrt{2\pi e \hat{\sigma} \hat{m}} \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{m}} e^{-(x_i/\hat{\eta})^{\hat{m}}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

式中

$$\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2,$$

$$\hat{\mu} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$