

金属塑性成形过程 无网格数值模拟方法

Meshless Numerical
Simulation Method
in Metal Forming



赵国群 王卫东 著



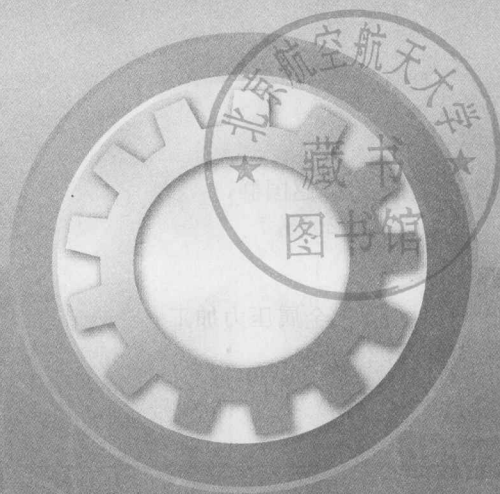
化学工业出版社

013069927

TG302
04

金属塑性成形过程 无网格数值模拟方法

Meshless Numerical Simulation Method in Metal Forming



赵国群 王卫东 著

TG 302
04



化学工业出版社



北航

C1677998

758820810

数值模拟方法已经成为解决工程问题的重要方法。无网格方法是近十多年来发展起来的一类数值分析方法,由于该类方法基于离散节点的近似,不需要节点的连接信息,避免了对网格的依赖,在涉及网格畸变的大变形问题分析中具有一定优势。

本书详细介绍了无网格方法的理论基础、无网格方法基本理论与关键技术、金属塑性成形基本理论、二维金属塑性成形无网格伽辽金方法、三维金属塑性成形无网格伽辽金方法、金属塑性成形过程无网格伽辽金数值模拟实例等。

本书可作为高等院校材料加工类和机械类专业本科与研究生教学的教材和参考书,同时也可供相关工程技术人员学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

金属塑性成形过程无网格数值模拟方法/赵国群,
王卫东著. —北京:化学工业出版社, 2013. 7
ISBN 978-7-122-17466-6

I. ①金… II. ①赵… ②王… III. ①金属压力加工—塑性变形—数值模拟 IV. ①TG302

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 111644 号

责任编辑:彭喜英
责任校对:宋 夏

装帧设计:张 辉

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011)

印 装:大厂聚鑫印刷有限责任公司

787mm×1092mm 1/16 印张10½ 字数253千字 2013年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686) 售后服务:010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定 价:38.00 元

版权所有 违者必究

前言

金属塑性成形技术在金属零件的制造过程中起着十分重要的作用。它不仅具有生产效率高、产品质量稳定、原材料消耗少的优点，而且还可以有效地改善工件的组织性能。随着数值计算方法和计算机技术的发展，数值模拟分析方法已经成为解决工程问题的重要方法。其中，有限元方法经过不断的发展成熟，在金属体积成形过程数值模拟中发挥了重要的作用。对于剧烈塑性变形问题，当工件变形到一定程度时，有限元方法往往需要频繁的网格再划分和数据传递。无网格方法是近十多年来发展起来的一类数值分析方法，由于该类方法基于离散节点的近似，不需要节点的连接信息，避免了对网格的依赖，在涉及网格畸变的大变形问题分析中具有一定的优势。

本书以笔者及其科研团队多年来在国家自然科学基金等项目资助下所取得的研究成果和工作实践总结，重点介绍无网格方法的基本理论与关键技术，特别强调了金属塑性成形过程无网格数值建模方法及其关键应用技术。主要包括无网格方法的理论基础、无网格方法基本理论与关键技术、金属塑性成形基本理论、二维金属塑性成形无网格伽辽金方法、三维金属塑性成形无网格伽辽金方法、无网格伽辽金数值模拟方法在金属塑性成形过程中的应用等内容。

本书由赵国群教授执笔，王卫东副教授参加了书稿的撰写工作。同时，山东大学模具工程技术研究中心的有关同志，特别是笔者指导的博士研究生和硕士研究生也参与并完成了许多具体的研究工作。

本书可作为高等院校材料加工类和机械类专业本科与研究生教学的教材和参考书，同时也可供相关工程技术人员学习使用。

由于笔者水平所限，书中难免存在各种疏漏和不当之处，恳请读者不吝指教。

著 者

2013 年 3 月

符 号 表

A	横截面积	J_2	应力偏张量的第二不变量
A	系数矩阵	J_3	应力偏张量的第三不变量
A_0	试样的初始横截面积	K	总体刚度矩阵
$\tilde{A}$	微分算子矩阵	K_c	传热矩阵
A^p	变形体的塑性功耗	k	剪切屈服应力
B	应变或应变速率矩阵	L	微分算子
$\tilde{B}$	微分算子矩阵	l_0	试样的初始长度
$\hat{C}$	校正函数	m_f	摩擦因子
C	体积应变速率矢量	$\tilde{N}_I$	插值基函数
C_c	热容矩阵	N_I	插值基函数
$\tilde{C}$	微分算子矩阵	N_P	节点数目
$\bar{C}$	强化参数	n_j	边界外法线单位矢量
$\tilde{D}$	微分算子矩阵	P	等效应变速率矩阵
D	弹性系数矩阵	p	多项式基函数向量
D_{ijkl}	本构张量	Q_c	热流矩阵
$d\epsilon_{ij}^p$	塑性应变率增量	q_f	由摩擦产生的表面热量速率
d_0	初始晶粒尺寸	R	内部残值和
d_{dyn}	动态再结晶晶粒尺寸	$\bar{R}$	边界残值
$\tilde{E}$	微分算子矩阵	R	摩尔气体常数
E	杨氏模量	S_F	力边界
$\bar{E}(\epsilon_{ij})$	塑性功函数	S_u	速度边界
e_0	收敛控制参数	T	节点温度矢量
$\tilde{F}$	微分算子矩阵	T	热力学温度
F	载荷向量	$\dot{T}$	节点温度速率矢量
$\bar{f}_i$	体力分量	T_e	环境温度
$f(\sigma_{ij})$	屈服函数	T_s	表面温度
G	剪切模量	T_d	模具的温度
I	单位矩阵	T_w	工件的温度
I_1	应力张量的第一不变量	$\tilde{T}$	坐标变换矩阵
I_2	应力张量的第二不变量	u	位移或速度场函数向量
I_3	应力张量的第三不变量	$u_i(x)$	位移或速度分量
J_1	应力偏张量的第一不变量	$u^h(x)$	近似函数向量
		$u_i^h(x)$	近似函数

u	广义位移向量	Φ	形状函数矩阵
$\bar{u}_i$	Γ_u 上给定的位移	Φ_I	形状函数
$\bar{u}$	节点位移向量	φ_I	径向基函数
u^*	节点混合位移或速度向量	Λ	变换矩阵
u_s	相对滑动速度	Λ^*	混合变换矩阵
u_0	与模具速度相比小几个数量级的正常数	Γ	区域 Ω 的边界
W_j 、 $\bar{W}_j$	权函数向量	Γ_t	区域 Ω 的应力边界
W_p	单位体积的总塑性功	Γ_u	区域 Ω 的位移边界
$\dot{W}_p$	单位体积的塑性功率	$\dot{\gamma}_{ij}$	工程剪应变率分量
ω	权函数	$\bar{\lambda}$	拉格朗日乘子
$\bar{\omega}_I(x)$	奇异权函数	μ	库伦摩擦系数
X_{dyn}	动态再结晶百分比	ν	泊松比
Z	Zener-Hollomon 参数	Ω	求解区域
α	罚函数	Ω_s	域 Ω 的子域
β	缩减系数	Π	标量泛函或系统的能量速率泛函
δ	δ 函数	Π_D	系统能量速率泛函的变形能速率项
δ	变分符号	Π_P	系统能量速率泛函的罚函数项
$\delta\Pi$	泛函 Π 的一阶变分	Π_f	系统能量速率泛函的力项
$\delta^2\Pi$	泛函 Π 的二阶变分	$\tilde{\phi}_k$	单位分解函数
$\delta_{ij}\sigma_m$	应力球张量	τ_s	剪切屈服强度
$\ \hat{\Delta u}\ $	速度增量范数	σ	应力向量
Δu	速度场增量	σ_1 、 σ_2 、 σ_3	第一、第二、第三主应力
$\dot{\epsilon}$	等效应变速率	$\bar{\sigma}$	等效应力
$\dot{\epsilon}_V$	体积应变速率	σ_{ij}	应力张量
ϵ	应变向量	σ_m	平均正应力
ϵ_{ij}	应变张量	σ'_{ij}	应力偏量张量
$\dot{\epsilon}_{ij}$	应变速率张量	σ_s	屈服强度
$\dot{\epsilon}_{ij}^e$	弹性应变速率	δ	斯蒂芬-玻尔兹曼 (Stefan-Boltzmann) 常数
$\dot{\epsilon}_{ij}^p$	塑性应变速率	$\hat{\sigma}\hat{\epsilon}$	热辐射系数
$\bar{\epsilon}_c$	临界应变值	$\tau_{\max}$	最大剪应力
$\dot{\epsilon}_0$	极限应变速率	θ_E	模具拐角
ϵ	辐射物体表面放射率	θ_e	模具圆心角
ϕ	径向基函数向量		

目录

1

绪论

- 1.1 无网格方法及其研究进展 / 1
- 1.1.1 无网格方法 / 1
- 1.1.2 无网格方法分类及其研究进展 / 1
- 1.2 无网格方法的应用领域 / 4
- 1.3 金属塑性成形过程的无网格方法 / 5
- 参考文献 / 6

2

无网格方法的理论基础

- 2.1 引言 / 14
- 2.2 微分方程的等效积分形式和加权残值法 / 14
- 2.2.1 微分方程的等效积分形式 / 14
- 2.2.2 等效积分形式的近似方法——加权残值法 / 15
- 2.3 变分原理 / 18
- 2.3.1 变分原理 / 18
- 2.3.2 广义变分原理 / 20
- 参考文献 / 22

3

无网格方法基本理论与关键技术

- 3.1 无网格方法的分类 / 23
- 3.1.1 基于全局 Galerkin 弱式的无网格方法 / 23
- 3.1.2 基于 Petrov-Galerkin 弱式的无网格方法 / 24

3.1.3	基于配点强式的无网格方法 / 25
3.1.4	基于边界积分方程的无网格方法 / 25
3.2	无网格法的主要近似方案 / 26
3.2.1	核函数近似与重构核质点近似 / 26
3.2.2	移动最小二乘近似 / 28
3.2.3	基于点插值法的近似 / 28
3.2.4	单位分解近似 / 31
3.2.5	自然邻接点插值 / 32
3.3	无网格方法中本质边界条件的处理 / 33
3.3.1	拉格朗日乘子法 / 34
3.3.2	修正的变分原理法 / 34
3.3.3	罚函数法 / 35
3.3.4	奇异权函数法 / 35
3.3.5	与有限元耦合法 / 36
3.3.6	完全变换法 / 37
3.4	积分方案 / 37
3.4.1	背景网格积分 / 37
3.4.2	节点积分 / 38
3.4.3	应力点积分 / 39
3.4.4	单位分解积分 / 39
3.5	无网格伽辽金方法 / 39
3.5.1	移动最小二乘近似详细方案 / 40
3.5.2	无网格伽辽金方法及其求解过程 / 47
	参考文献 / 52

4

金属塑性成形基本理论

56

4.1	塑性力学基本理论 / 56
4.1.1	引言 / 56
4.1.2	应力、应变与应变速率 / 56
4.1.3	屈服准则 / 59
4.1.4	平衡方程与虚功率定理 / 61
4.1.5	塑性势与流动法则 / 62
4.1.6	应变强化、等效应力与等效应变 / 65
4.1.7	极值原理 / 67
4.1.8	粘塑性理论 / 68
4.2	刚(粘)塑性成形基本理论 / 69
4.2.1	刚(粘)塑性材料的基本假设 / 69

- 4.2.2 塑性力学基本方程及边值条件 / 69
- 4.2.3 刚(粘)塑性材料的变分原理 / 70
- 4.2.4 金属塑性成形过程中的摩擦模型 / 72
- 4.3 传热学基本方程及其变分原理 / 72
- 4.3.1 传热学基本方程 / 72
- 4.3.2 传热学基本方程的变分原理 / 74
- 参考文献 / 74

5

二维金属塑性成形无网格伽辽金方法

75

- 5.1 二维金属塑性成形问题的无网格伽辽金法 / 75
- 5.1.1 速度场的近似及等效应变速率和体积应变速率的矩阵表示 / 75
- 5.1.2 系统能量速率泛函的组成及其变分 / 77
- 5.1.3 接触边界摩擦条件的处理 / 79
- 5.1.4 离散控制方程 / 81
- 5.1.5 刚性区的处理 / 82
- 5.1.6 初边值条件的处理 / 82
- 5.1.7 收敛判据及迭代收敛控制 / 84
- 5.1.8 算法流程 / 84
- 5.2 二维金属塑性成形过程无网格伽辽金数值模拟关键技术 / 85
- 5.2.1 动态边界的自动处理技术 / 85
- 5.2.2 体积应变率映射法 / 87
- 5.2.3 边界节点分布密度控制 / 88
- 5.2.4 热力耦合技术 / 89
- 5.2.5 微观组织模拟 / 92
- 5.3 二维金属塑性成形过程数值模拟算例 / 93
- 5.3.1 棒材镦粗过程 / 93
- 5.3.2 挤压过程 / 95
- 5.3.3 锻造过程 / 102
- 5.3.4 热力耦合成形过程与微观组织模拟 / 107
- 参考文献 / 112

6

三维金属塑性成形过程无网格伽辽金数值模拟方法

114

- 6.1 三维刚(粘)塑性无网格伽辽金方法 / 114
- 6.1.1 速度场的近似及应变速率的矩阵表示 / 114

- 6.1.2 三维摩擦边界条件的处理 / 116
- 6.1.3 刚(粘)塑性无网格伽辽金方法刚度方程 / 118
- 6.1.4 算法流程 / 119
- 6.2 三维金属塑性成形过程无网格伽辽金数值模拟关键技术 / 120
- 6.2.1 模具型腔的几何信息描述方法 / 120
- 6.2.2 局部坐标系的建立 / 122
- 6.2.3 接触节点边界条件的处理 / 124
- 6.2.4 动态边界的自动处理技术 / 125
- 6.2.5 单位分解积分方法的应用 / 130
- 6.3 数值算例 / 132
- 6.3.1 三维方坯锻造过程 / 132
- 6.3.2 棒材锻造过程 / 136
- 参考文献 / 139

7

金属塑性成形过程无网格伽辽金数值模拟

140

- 7.1 连杆锻造过程 / 140
- 7.1.1 计算条件 / 140
- 7.1.2 模拟结果与分析 / 140
- 7.2 十字花件挤压过程 / 143
- 7.2.1 计算条件 / 143
- 7.2.2 模拟及实验结果分析 / 143
- 7.3 等通道弯角挤压过程 / 146
- 7.3.1 数值模拟模型 / 146
- 7.3.2 等通道弯角挤压数值模拟分析及结果讨论 / 146
- 7.3.3 等通道弯角挤压实验研究 / 151
- 7.4 转向节预锻过程 / 153
- 7.4.1 转向节预成形件热模锻工艺设计 / 153
- 7.4.2 转向节预成形件成形过程的数值模拟 / 154
- 参考文献 / 157

绪 论

1.1 无网格方法及其研究进展

1.1.1 无网格方法

力学、物理学和工程中的许多问题都可归结为偏微分方程的定解问题。由于方程及实际问题的复杂性,能采用解析法按照边值条件求解的问题仅限于极少数,所以对大多数复杂问题,我们只能通过数值方法获得近似解。无网格方法是 20 世纪 90 年代中期在国际上兴起并得到迅速发展的一种新型的数值方法。其求解思路是:将求解域和边界离散为有限数目的节点,对求解域中任一点处的场变量用该点支撑域中的节点的函数值进行局部近似,然后,根据不同的离散方法,形成无网格方法的离散方程,最后把基于点的离散方程组装为总体刚度方程并进行求解。

1.1.2 无网格方法分类及其研究进展

无网格方法在近十几年来得到迅猛发展,一些无网格方法综述文献和专著^[1~9]相继出版。目前发展的无网格方法有几十种,其主要区别在于采用了不同的函数近似方案或微分方程的离散方案。用于无网格方法的近似方案主要有移动最小二乘 (Moving Least-Squares, MLS) 近似^[10]、重构核粒子法 (Reproducing Kernel Particle Method, RKPM)^[11]、单位分解法 (Partition of Unity Method, PUM)^[12]、径向基函数法 (Radial Basis Functions, RBF)^[13]、点插值法 (Point Interpolation Method, PIM)^[14] 以及自然邻接点插值 (Natural neighbour interpolation)^[15~17] 等。微分方程的离散方案主要分为基于偏微分方程的全局 Galerkin 弱式、局部 Petrov-Galerkin 弱式、配点强式以及基于边界积分方程等。本章参照文献 [18] 对无网格法的分类,按照偏微分方程的离散方案对已经形成的无网格方法进行分

1.1.2.1 基于全局 Galerkin 弱式的无网格方法

Lancaster 和 Salkauskas^[19] 提出了移动最小二乘近似, Nayroles 等^[20] 首次将移动最小二乘近似应用于伽辽金 (Galerkin) 弱式中,提出了扩散单元法 (Diffuse Element Method, DEM), 分析了 Poisson 方程和弹性问题。Belytschko 等^[21] 对 DEM 进行了改进,在计算形函数导数时保留了被 Nayroles 忽略掉的所有项,采用拉格朗日 (Lagrange) 乘子法处理本质边界条件,提出了无网格伽辽金法 (Element Free Galerkin Method, EFGM)。Lu 等^[22,23]、Gavete 等^[24] 和 Kaljevic 等^[25] 分别采用修正的变分原理、罚函数法和具有奇异性

的权函数法施加本质边界条件,对 EFGM 进行了研究。Belytschko 等^[26] 通过在无网格区域和有限元区域之间引入界面单元,实现了 EFGM 与有限元方法 (Finite Element Method, FEM) 的耦合。Liu 等^[27] 将 EFGM 和边界元方法 (Boundary Element Method, BEM) 进行了耦合。Alves 和 Rossi 等^[28,29] 在本质边界条件的节点上采用单位分解有限元权函数,实现了本质边界条件的施加。EFGM 比 DEM 和光滑质点流体动力学方法具有更好的稳定性,比 FEM 具有更高的精度和收敛速度,但 EFGM 计算量较大,并且需要背景网格进行数值积分。为了避免使用背景网格,Beissel 等^[30] 通过在能量泛函中增加含稳定系数的稳定项,将区域积分转化为节点积分。Liu^[11] 通过引入修正函数施加重构条件使边界上一致性条件得到满足,提出了重构核粒子法 (Reproducing Kernel Particle Method, RKPM)。Liu 等^[31,32] 还将具有伸缩平移、多尺度分析功能的小波函数引入到 RKPM 中,提出了具有多尺度分析功能的多尺度重构核质点法 (Multi-Scale RKPM)。Li 等^[33,34] 将 MLS 近似的思想引入积分核,提出了移动最小二乘重构核方法 (Moving Least-Square Reproducing Kernel method, MLSRKM)。Liu 和 Li 等^[35,36] 将 FEM 与 RKPM 相结合,提出了重构核单元法 (Reproducing Kernel Element Method, RKEM)。Duarte 和 Oden 等^[37,38] 利用 MLS 近似建立单位分解函数,并由此构造权函数和试函数,进而通过伽辽金法建立离散方程,提出了 hp 云团法 (hp Clouds Method, HPCM)。Oden 等^[39] 将有限元形函数作为单位分解函数,提出了基于 hp 云团法的新型 hp 有限元方法 (New Clouds-Based hp FEM)。Babuska 和 Melenk 等^[40] 将单位分解法 (Partition of Unit Method, PUM)^[12] 与 FEM 相结合,提出了单位分解有限元法 (Partition of Unity Finite Element Method, PUFEM),之后,又进一步提出了广义有限元法 (Generalized Finite Element Method, GFEM)^[41,42]。GFEM 在标准有限元空间中加入一系列能够反映待求边值问题特性的函数,并将这些函数与单位分解函数相乘后和原有的有限元形函数一起构成了新的增广协调有限元空间。用 GFEM 求解动态裂纹扩展问题时,可以处理任意裂纹形状,且不需要重新划分网格^[43,44]。Belytschko 和 Li 等对单位分解法进行了研究,分别提出了扩展有限元法 (Extended Finite Element Method, XFEM)^[45,46] 和重构核继承单位分解 (Reproducing Kernel Hierarchical Partition of Unity, RKHPU) 法^[47,48]。RKHPU 法是对移动最小二乘近似函数和重构核插值的进一步扩展,它在移动最小二乘近似的基础上,加入了小波函数,提高了运算的效率。此外, Liu 等^[14,49] 提出了点插值法 (Point Interpolation Method, PIM) 和径向点插值法 (Radial PIM), De 等^[50] 提出了有限球法 (Method of Finite Spheres), Sukumar 等^[51~53] 提出了自然单元法 (Natural Element Method)。

在用上述基于全局 Galerkin 弱式的无网格方法求解边值问题时,首先将控制偏微分方程连同导数边界条件转化为一组求解区域上的积分方程,然后利用建立在问题域上的全局背景网格进行数值积分,从而将弱形式转化为一组代数方程。这类方法的特点是弱形式的积分基于整个问题域,需要一个全域的背景网格进行数值积分,与配点法相比,计算精度较高,收敛速度较快,稳定性较好,但计算效率较低。

1.1.2.2 基于 Petrov-Galerkin 弱式的无网格方法

为避免使用全局背景网格,Atluri 等^[54~56] 利用局部的 Petrov-Galerkin 弱式,采用 MLS 近似来构造近似函数,将检验函数和近似函数选自不同的函数空间,将子域取为以各节点为中心的球形区域,提出了无网格局部彼得洛夫-伽辽金 (Meshless Local Petrov-Galerkin, MLPG) 方法。这种方法的基本原理是对控制方程在一个局部子域采用局部加权

残值法进行积分,得到 Petrov-Galerkin 弱形式,然后利用移动最小二乘近似在局部插值域上近似场函数,从而使一个需要在全域内求解的问题简化为在节点相关子域上对局部 Petrov-Galerkin 弱形式的求解问题。Liu 等利用 MLPG 的思想,提出了局部点插值法 (Local Point Interpolation Method, LPIM)^[57,58] 和局部径向点插值法 (Local Radial Point Interpolation Method, LRPIM)^[59,60]。这两种方法与 MLPG 法的表达式很相似,不同之处主要在于所用无网格形函数的类型不同。LPIM 采用了具有插值特性的多项式点插值形函数,由于应用了多项式基函数,其插值矩阵可能出现奇异,从而需要使用特殊方法来消除其奇异性。LRPIM 利用了径向基点插值型函数,对任意分布的节点域具有较强的适应性。

1.1.2.3 基于配点强式的无网格方法

Lucy 和 Monaghan 等^[61,62] 分别提出了光滑质点流体动力学 (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) 方法,这是最早的无网格方法,并应用于解决天体物理学问题。SPH 方法将描述问题的场函数用核函数 (Kernel Function) 逼近,是一种纯拉格朗日 (Lagrange) 方法。SPH 法在解决一些诸如流体力学、爆炸力学等问题时具有其它数值方法如 FEM 无法比拟的优点。但是,SPH 法计算效率较低,计算精度和稳定性也存在一些问题。Swegle 等^[63] 指出了 SPH 法不稳定的原因,并提出了一种稳定化方案。Monaghan^[64,65] 和张锁春^[66] 对 SPH 法进行了理论总结,Liu 出版了关于 SPH 算法的专著^[3]。SPH 法主要应用于高速碰撞^[67~72]、爆炸仿真模拟^[73,74]、流体动力学^[75~77] 等领域。显式动力分析软件 LS-DYNA 就集成了 SPH 模块。Liszka 等^[78] 使用配点格式改造了 hp 云团法,避免了 Galerkin 格式中用于积分计算的背景网格,提出了 hp 无网格云团法 (hp-Meshless Clouds Method)。Onate 和 Zienkiewicz^[79] 利用基于 Gauss 权函数的带权正交 MLS 近似来构造近似函数,并采用配点型加权残值格式把控制方程离散成非积分形式,再结合广义有限差分法,提出了有限点法 (Finite Point Method, FPM)。该方法不需要背景网格和高斯积分,计算效率高,但精度较低,稳定性较差。Onate 等^[80~82] 对 FPM 进行了改进,并将其应用于流体力学和弹性力学问题。刘欣^[83] 对基于流形覆盖的无网格方法及半解析、自适应无网格方法进行了研究,并应用 FPM 分析了二维不可压缩粘性流体。Aluru 等^[84] 提出了有限云团法 (Finite cloud method, FCM)。FCM 是一种采用核函数方法来构造形函数,并用配点法来离散控制方程的一种无网格方法。Li 等^[85] 将 FCM 和边界元方法进行了耦合,分析了线弹性问题。张雄等^[86,87] 在 FPM 等配点型无网格格式的基础上,通过引入辅助点,基于加权残量法和最小二乘近似,提出了最小二乘配点无网格方法 (Least-Squares Collocation Meshless Method, LSCM) 和加权最小二乘无网格方法 (Meshless Weighted Least-Squares Method, MWLS)。Park 等^[88] 借助最小二乘有限元方法中残余误差平方最小化的思路,将 MLS 近似函数引入积分意义下的最小二乘方程,提出了最小二乘无网格 (Least-squares Meshfree, LSM) 方法。LSM 方法中的积分只是用于消除残余量而不需要进行精确积分,计算效率较高。

基于配点强式的无网格法是通过配点技术在场节点上直接将强式形式的控制方程连同边界条件表示为一组离散系统方程。该方法有许多优点,如算法简单、计算效率高、真正无网格。但无网格强式法通常不稳定、适应性不强和精度低,特别是对于具有导数边界的问题。目前已经发展了许多技术可用于改善强式法中的导数边界条件所引起的问题,其中包括采用虚点、使用 Hermite 型无网格形函数、在导数边界上采用规则网格等。

1.1.2.4 基于边界积分方程的无网格方法

Mukherjee 等^[89]首次把 MLS 近似引入边界积分方程中,提出了边界点法 (Boundary Node Method, BNM),并对位势问题^[89,90]、弹性力学问题^[91,92]和采用超奇异边界积分方程进行自适应分析^[93]等方面进行了研究。为了消除 BNM 中的背景网格, Mukherjee 等^[94]采用节点积分方案来近似计算数值积分,该方法虽然简单,但稳定较差。Xie 等^[95]采用全局径向基函数构造将 BNM 中形函数,提出了径向边界点法 (Radial BNM, RBNM)。RBNM 中的插值函数具有 Delta 函数性质,但全局径向基函数插值得到的形函数矩阵是满阵,增加了计算量。Atluri 等^[96,97]提出了无网格局部边界积分方程 (Local Boundary Integral Equation, LBIE) 方法。在该方法中,问题区域和其相应的边界均由分布节点来表示。LBIE 法可以认为是 MLPG 法的特例,它在每个场节点上采用一规则局部域的边界积分方程来形成系统方程,因而在积分时不需要背景网格。LBIE 法与边界元方法相似,不同之处在于 LBIE 法不是对整个计算区域的边界,而是对覆盖在计算区域上的每个局部子域的边界进行积分。张见明、姚振汉等^[98,99]将 MLS 近似和修正变分原理相结合,提出了杂交边界点法 (Hybrid Boundary Node Method, HBNM)。该方法只需要在边界上布点,不需要在背景网格上进行积分,是一种纯无网格方法。由于 HBNM 会出现较为严重的边界效应,张见明等^[100~102]将基本解的源点移到域外,提出了正则化杂交边界点方法 (Regular HBNM, RHBNM)。Gu 和 Liu 等^[103~105]将点插值法和径向点插值法与边界积分方程相结合,提出了边界点插值法 (Boundary Point Interpolation Method, BPIM)、边界径向点插值法 (Boundary Radial Point Interpolation Method, BRPIM)、杂交边界点插值法 (Hybrid BPIM) 和杂交边界径向点插值法 (Hybrid BRPIM)。Li 和 Aluru^[106,107]采用广义移动最小二乘法 (Generalized MLS) 来构造边界节点的试函数,然后和边界积分方程相结合,提出了边界云团法 (Boundary Cloud Method, BCM)。Shrivastava 和 Aluru^[108,109]将快速多极算法与 BCM 相结合,发展了二维和三维的快速多极 BCM。程玉民等^[110~113]将 MLS 近似和 RKPM 与边界积分方程方法相结合,提出了边界无单元法 (Boundary Element-Free Method, BEFM) 和重构核粒子边界无单元方法 (Reproducing Kernel Particle BEFM, RKPBEFM)。李小林、祝家麟等^[18,114~117]将边界积分方程的弱形式与 MLS 近似相结合,提出了 Galerkin 边界点法 (Galerkin Boundary Node Method, GBNM),并将其应用于位势问题、弹性问题和 Stokes 问题的求解。与基于全局 Galerkin 弱式的无网格方法相比,这种 Galerkin 方法基于边界积分方程的弱形式,只需要在边界上布置离散点。

1.2 无网格方法的应用领域

无网格方法的主要应用领域包括以下几个方面。

(1) 传统的计算力学领域 无网格法是通过加权余量法选择不同的检验函数和试探函数而得到的,因此凡是可以用 FEM 求解的问题都可以用无网格方法求解。鉴于此,传统的计算力学领域是无网格法研究的最初方向,通过在传统领域的计算来检验方法的正确性和精确性,同时检验是否具有工程使用价值。

(2) 冲击爆炸问题 高速冲击以及爆炸问题在航空航天工程、汽车工程和兵器工业中有重要的应用前景。这类问题的特点是载荷强度高、作用时间短、能量迅速转化,材料在高应变率下经历极大变形,会出现不同机理的断裂和破坏失效现象。冲击爆炸问题涉及几何非线

性、材料非线性和状态非线性,对数值方法提出了很大的挑战。与传统的基于网格的拉格朗日有限元相比,无网格方法将连续体离散成质点,没有网格约束,避免了大变形下网格畸变的问题。另外,由于网格的限制,有限元很难处理高速冲击和爆炸问题中出现的材料断裂失效、结构破碎等现象,尽管在 FEM 中应用侵蚀算法可以将失效的单元抛弃,但同时也带来质量损失等问题,而无网格方法中离散的质点可对材料的破坏和结构的破碎提供更自然的描述。

(3) 断裂力学问题 断裂问题的数值模拟一直是具有挑战性的问题,除了其复杂的力学和物理本质之外,如何精确描述带有强不连续性的裂纹表面及其传播过程也对数值方法提出了很高的要求。传统的有限元方法很难在单元内部包含裂纹,模拟裂纹传播问题一般需要随计算过程的不断进行而对网格进行不断重构,对于任意裂纹的生成和连接等复杂问题的模拟更加困难,有些问题中计算结果甚至会产生网格依赖性。另外,裂尖应力场常常带有奇异性,需要在裂尖附近布置大量节点,大大增加了计算量。一方面,无网格法避免了网格给裂纹描述带来的问题,可以包含任意方向的裂纹,裂纹传播过程不需要网格重构,降低了计算量;另一方面,无网格方法中增减节点或改变基函数都较容易,当需要对某一局部区域如裂尖区域进行精确描述时,无网格法可以方便地进行 h 型或 p 型自适应计算;因此断裂问题的无网格方法研究一直是无网格方法最主要的应用领域之一。

(4) 结构大变形问题 很多工程实际问题中结构要经历大变形过程。如金属塑性成形是材料加工的重要手段之一,成形过程中试件变形较大,加之材料进入塑性阶段,变形材料和模具之间发生接触和摩擦,因此金属塑性成形过程对数值模拟方法具有较大的挑战性。有限元等基于网格的方法,在模拟大变形过程时难免会遇到网格畸变的问题。再如橡胶材料也是工业生产中广泛使用的材料,橡胶超弹性大变形问题的有限元模拟也会遇到网格畸变的问题,而橡胶的接近不可压缩性质可能产生体积锁死等问题,增加了数值模拟的难度。在解决上述问题方面,无网格方法提供了一条有效的途径。

(5) 新材料的性能分析 随着科技的发展,新材料的使用日益广泛,一些性能优越的功能材料应用于一些新兴的工程和科学领域。这些新材料通常结构较为特殊,其力学性能中常涉及强非线性、超大变形、多尺度、多场耦合,这无疑对数值模拟方法提出了更大的挑战。近年来,无网格方法的研究已扩展到诸如纳米级多尺度、高应变梯度模型、应变软化材料、功能梯度材料、非均质材料、生物微电子系统等方面。

1.3 金属塑性成形过程的无网格方法

Chen 等^[118~122] 首先将 RKPM 用于解决金属塑性成形问题,通过完全变换法、混合变换法和边界奇异核函数法施加本质边界条件,对理想塑性或弹塑性材料的二维圆环压缩、轴对称墩粗、二维板料成形、轴对称挤压等塑性成形过程进行了分析,并开发了基于 RKPM 的结构非线性分析平台 SNAW (Structural Nonlinear Analysis Workspace) 来进行结构大变形的无网格法分析。Park^[123,124] 对刚塑性材料的金属体积成形过程进行了 RKPM 分析。Bonet 和 Kulaseqaram^[125] 针对 SPH 方法的缺点,通过对核函数进行修正以满足一致性条件,对积分进行修正来进一步提高解的精度,消除由于点积分而出现的零能模式,提出了修正光滑质点流体动力学 (Corrected Smooth Particle Hydrodynamics, CSPH) 方法,并对理想塑性材料的平面应变墩粗、平面应变锻造和轴对称锻造二维金属塑性成形过程进行了分

析。Xiong 等^[126~131] 采用再生核质点方法和无网格伽辽金方法, 对刚塑性微压缩材料的平面应变轧制、镦粗、挤压等过程进行了模拟分析, 并用罚函数法施加本质边界条件, 采用反正切摩擦模型处理工件与模具间的接触问题, 计算得到了工件的相关物理量, 并将计算结果与刚塑性有限元结果和实验结果进行了比较。Guo 等^[132, 133] 采用无网格配点法对刚塑性材料的平面应变和反挤压问题进行了模拟, 并与刚塑性有限元方法的分析结果进行了比较。Alfaro 等^[134] 采用 α -shape 自然单元法对金属塑性成形过程进行了分析, 实现了三维反向挤压成形过程的数值模拟。Kwon 等^[135, 136] 将最小二乘无网格法引入到弹塑性和刚塑性的金属成形数值模拟中。李光耀等^[137, 138] 分别采用 EFGM 和 FEM 对泰勒杆的冲击、平面应变镦粗和反挤压问题进行了数值模拟分析。卿启湘等^[139] 将 EFGM 与弹塑性力学相结合, 建立了一种基于初始构形及热力学第二定律的有限变形的弹塑性本构关系, 并分析了棒料通过锥形拉拔模的成形过程。千年妃等^[140, 141] 提出体积成形过程的自适应无网格方法, 利用背景网格实现节点的自适应加密, 并采用动态显式算法模拟了泰勒棒冲击和金属挤压成形过程。王琥等^[142] 采用并行三维 RKPM 对金属体积成形过程进行了分析。娄路亮、曾攀等^[143] 采用拉格朗日乘子法施加本质边界条件, 采用罚函数法处理摩擦接触边界, 工件与模具间采用库仑摩擦定律, 对圆柱体镦粗过程进行了 EFGM 分析。李长生、崔青玲等^[144~148] 采用刚塑性微可压缩材料模型, 对金属镦粗过程、平板轧制过程、三维稳态板坯立轧过程等进行了 RKPM 无网格方法数值模拟, 并与 FEM 以及实验数据进行了比较。温宏宇、董湘怀等^[149, 150] 采用三维配点型无网格法对铝合金的挤压成形过程进行了分析。刘永辉、陈军等^[151] 采用 RKPM 对刚(粘)塑性材料的平面应变镦粗和三维方坯镦粗过程进行了数值模拟。刘磊超^[152] 将无网格法与有限元法相结合, 对金属成形过程自适应耦合无网格-有限元法数值模拟技术进行了研究。赵国群等^[153~169] 将无网格伽辽金法与刚(粘)塑性流动理论相结合, 提出了基于刚(粘)塑性流动理论的无网格伽辽金方法, 并对二维、三维金属体积成形过程进行了无网格伽辽金法的数值模拟研究。

参 考 文 献

- [1] Atluri S N, Shen S. The Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) Method [M]. California: Tech. Science Press, 2002.
- [2] Liu G R. Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Method [M]. Singapore: CRC Press, 2002.
- [3] Liu G R, Liu M B. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method [M]. Singapore: World Scientific, 2003.
- [4] Li S F, Liu W K. Meshfree Particle Methods [M]. Berlin: Springer, 2004.
- [5] Atluri S N. The Meshless Method(MLPG) for Domain & BIE Discretizations [M]. California: Tech. Science Press, 2004.
- [6] 张雄, 刘岩. 无网格方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 刘更, 刘天祥, 谢琴. 无网格方法及其应用 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2005.
- [8] Liu G R, Gu Y T. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming [M]. Berlin: Springer, 2005.
- [9] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39: 1-36.
- [10] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least-squares methods [J]. Mathematics of Computation, 1981, 37: 141-158.
- [11] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 20: 1081-1106.
- [12] Babuska I, Melenk J M. Partition of unity method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40 (4): 727-758.
- [13] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [14] Liu G R, Gu Y T. A point interpolation method for two-dimensional solids [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50: 937-951.

- [15] Sibson R. A vector identity for the Dirichlet tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1980, 87: 151-155.
- [16] Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids [J]. *Nature*, 1995, 376: 655-660.
- [17] Belikov V V, Kontorovich V K, Kontorovich V K. The non-Sibson interpolation: A new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points [J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, 37 (1): 9-15.
- [18] 李小林. 基于边界积分方程的 Galerkin 无网格方法[D]. 博士学位论文, 重庆大学, 2009.
- [19] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods [J]. *Mathematics of Computation*, 1981, 37: 141-158.
- [20] Nayroles B, Touzot Q, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse element [J]. *Computational Mechanics*, 1992, 10: 307-318.
- [21] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229-256.
- [22] Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. New implementation of the element free Galerkin method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 113(3-4): 397-414.
- [23] Mukherjee Y X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element-free Galerkin method [J]. *Computational Mechanics*, 1997, 19: 264-270.
- [24] Gavete L, Benito J J, Falcon S, et al. Implementation of essential boundary conditions in a meshless method [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2000, 16(6): 409-421.
- [25] Kaljevic I, Saigal S. Improved element free Galerkin formulation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(16): 2953-2974.
- [26] Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. Coupled finite element-element-free Galerkin method[J]. *Computational Mechanics*, 1995, 17 (3): 186-195.
- [27] Liu G R, Gu Y T. Coupling of element free Galerkin and hybrid boundary element methods using modified variational formulation [J]. *Computational Mechanics*, 2002, 26: 166-173.
- [28] Alves M K, Rossi R. A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions enforced by an extended partition of unity finite element weight function [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57: 1523-1552.
- [29] Rossi R, Alves M K. On the analysis of an EFG method under large deformations and volumetric locking. *Computational Mechanics*, 2007, 39(4): 381-399.
- [30] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element free Galerkin method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 49-74.
- [31] Liu W K, Chen Y. Wavelet and multiple scales reproducing kernel method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 21: 901-931.
- [32] Liu W K, Chen Y, Uras R A, Chang C T. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 91-157.
- [33] Liu W K, Li S F, Belytschko T. Moving least-square reproducing kernel methods, Part I: methodology and convergence [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 143: 113-154.
- [34] Li S F, Liu W K, Belytschko T. Moving least-square reproducing kernel methods, Part II: Fourier analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 159-193.
- [35] Liu W K, Han W M, Lu H S. Reproducing kernel element method, Part I: theoretical formulation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 933-951.
- [36] Li S F, Lu H S, Han W M, et al. Reproducing kernel element method. Part II: Globally conforming Im/Cn hierarchies[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 953-987.
- [37] Duarte C A, Oden J T. H-p clouds-an h-p meshless method[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1996, 12 (6): 673-705.