加法定理

上海教育出版社

加

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

上海教育出版社

加 法 定 理

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编
上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
福建人民出版社重印
福建省新华书店发行　三明市印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张3.25　字数73,000
1959年4月新1版　1978年10月福建第1次印刷
印数：1—200,000册
统一书号：7150·489　定价：0.26元

目　錄

一 加法定理

加法定理的意義

在"三角函數"這一本小册子裏，我們主要的是談了一些三角函數的定義和定義域、各三角函數在不同象限內的符號和它的變化情況、同一變數的三角函數關係以及誘導公式等等。我們在這個基礎上，再來研究關於三角函數的一切性質。在三角分析上佔重要地位的加法定理（角的和差函數）是一切三角公式的基本公式。倍角公式、半角公式以及函數的和積互換等，都是由加法定理引伸出來的。不僅如此，而且由加法定理和它所引伸出來的公式，可以確定正弦和餘弦的值。例如我們可以從 $\sin 18^\circ$ 及 $\sin 15^\circ$ 的值求到 $\sin 3^\circ$ 的值以及 $\sin\dfrac{3^\circ}{2^n}$ 的值（n 指自然數）。三角函數的加法定理既是一切函數的基礎，因此它的一般性證明，就顯得特別重要；对於它的一般性証明，就必須詳盡地有系統地叙述清楚。我們在教學過程中，必須不厭其詳地向学生反覆說明加法定理的重要意義，務使學生對這個定理的幾個公式（和差角的正弦和餘弦）能深刻理解。我們不能要求學生能熟練地證明它們，但必須要求學生能深刻了解它們，而且對公式的一般性深信不疑。如果將基本公式（加法定理）的一般性證明了，則由它導出的公式，當然也具有一般性了。

對於三角函數的恆等變換，應注意函數的定義域，就是在變換過程中，也必須指出公式的適用範圍。這樣，一方面可以提高

學生對科學性的認識，另一方面也爲學習三角方程打下基礎。對於半角公式雙重符號（正或負）的選取問題，應通過各種例子，根據所在象限角函數的符號，在算術根的規定下，加以詳細說明。關於函數的和積互化問題，則必須注意它們變換的目的，以及在實際應用中的重要意義。如解三角形以及利用三角函數解幾何問題等，應用對數表來計算它們的結果時，就必須把三角函數式化爲乘積形式，才能符合使用對數計算的原則。這不但可以簡捷計算過程，而且容易確定結果的近似値精確的程度。爲了簡化函數式恆等變換起見，我們提出函數的積化和差公式，是需要的，而且是有益的。加法定理是複角的三角函數，本質上是兩變量的函數關係。至於這個定義，我們已在本會所編“函數圖象及二元二次聯立方程”小册子上提到，這裏不再重複。

加法定理的證明

在提出 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$ 這兩個公式之前，我們可以向學生提出下面的問題：

$\sin(\alpha+\beta)$ 是否等於 $\sin\alpha+\sin\beta$？ $\cos(\alpha+\beta)$ 是否等於 $\cos\alpha+\cos\beta$？

關於上面的問題，我們可以假定 α 與 β 爲一些特別角來進行研究：

(1) 設 $\alpha=30°$, $\beta=30°$,

則 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(30°+30°)$

$$=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\backsimeq 0.866,$$

又 $\sin\alpha+\sin\beta=\sin 30°+\sin 30°=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,

由上面兩式比較得：

$$\sin 60^\circ = \sin(30^\circ + 30^\circ) \neq \sin 30^\circ + \sin 30^\circ。$$

(2) 設 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$,

則 $\cos(\alpha+\beta) = \cos(30^\circ + 30^\circ)$

$= \cos 60^\circ = 0.5$。

又 $\cos\alpha + \cos\beta = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

≈ 1.732。

由上面兩式比較得:

$$\cos 60^\circ = \cos(30^\circ + 30^\circ) \neq \cos 30^\circ + \cos 30^\circ。$$

通過上面兩個例子,已經可以說明 $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ 和 $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ 了。我們這樣做主要是要學生搞清楚 $\sin(\alpha+\beta)$ 不能運用乘法分配律來展開它們，但學生往往會犯這個錯誤，所以必須向學生指出 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$ 都是三角函數的整體,决不可隨便把它們展開,這與對數 $\lg(a+b)$ 不能寫成 $lga + lgb$ 有同樣的意義。

雖然我們可以找出 α 與 β 角的一些特殊值,能使 $\sin(\alpha+\beta)$ 與 $\sin\alpha + \sin\beta$ 之值相等和使 $\cos(\alpha+\beta)$ 與 $\cos\alpha + \cos\beta$ 之值相等,例如:

(3) 設 $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$,

則 $\sin(\alpha+\beta) = \sin(90^\circ + 0^\circ)$

$= \sin 90^\circ = 1$,

又 $\sin\alpha + \sin\beta = \sin 90^\circ + \sin 0^\circ = 1 + 0 = 1$,

由上面兩式比較得:

$$\sin 90^\circ = \sin(90^\circ + 0^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ + \sin 0^\circ。$$

(4) 設 $\alpha = 180^\circ$, $\beta = -60^\circ$,

則 $\cos(\alpha+\beta) = \cos[180^\circ + (-60^\circ)]$

$$=-\cos(-60^\circ)$$
$$=-\cos 60^\circ=-0.5,$$

又 $\cos\alpha+\cos\beta=\cos 180^\circ+\cos(-60^\circ)$

$$=\cos 180^\circ+\cos 60^\circ=-1+\frac{1}{2}$$
$$=-0.5,$$

由上面兩式比較得:

$$\cos[180^\circ+(-60^\circ)]=\cos 180^\circ+\cos(-60^\circ)。$$

但這兩個例子並不能說明它們的展開是可以使用乘法分配律，這不過是一些特殊的角，能使 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 及 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 這兩等式成立而已，所以這兩個等式顯然不是恆等式。這個道理等到學過三角方程的解法以後，是不難理解的。現在要弄清楚 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$ 的展開式究竟等於什麼，也就是怎样用角 α 与 β 的函數表達它們的結果。要解决這個問題，就必須根據三角函數的定義、三角圓上的函數綫以及誘導公式，進行幾何的和代數的分析，才能得到解决。

三角函數的加法定理，就是角的和差的函數，是建立一些公式的基礎。它是把和或差的三角函數值，用各加數(或減數)的三角函數，代數地表示出來。關於正弦及餘弦的有下面四個公式:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (S_{\alpha+\beta})$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (S_{\alpha-\beta})$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \qquad (C_{\alpha+\beta})$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。 \qquad (C_{\alpha-\beta})$$

這四個公式在中學三角教本第 51 節中已經有了證明。我們若用單位圓和有向綫段，則一角的正弦與餘弦各等於這角的正弦綫與餘弦綫的值，從而可以使原來的證明變成比較簡單的形式。

證明如下：

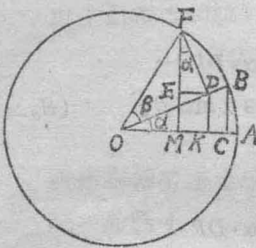

图 1.

設 $0°<\alpha<90°$，$0°<\beta<90°$，且 $\alpha+\beta<90°$，

如圖 1 中，$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOF=\beta$，又半徑 OA，OB，OF 都是一個單位長。$FD\perp OB$，FM，DK，BC 都垂直 OA，且 $DE \parallel OA$。

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)&=MF\\
&=ME+EF\\
&=KD+EF\\
&=\sin\alpha\cdot OD+\cos\alpha\cdot DF\\
&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta，\quad (S_{\alpha+\beta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta)&=OM\\
&=OK-MK\\
&=OK-ED\\
&=\cos\alpha\cdot OD-\sin\alpha\cdot DF\\
&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta。\quad (C_{\alpha+\beta})
\end{aligned}
$$

兩角差的正弦及餘弦公式的證明：

設 $0°<\alpha<90°$，$0°<\beta<90°$，且 $\alpha>\beta$，

如圖 2，$\angle AOB=\alpha$，$\angle FOB=\beta$，$\angle AOF=\alpha-\beta$，又半徑 OA，OB，OF 都是一個單位長，$FD\perp OB$，FM，DK，BC 都垂直 OA，且 $FE \parallel OA$。

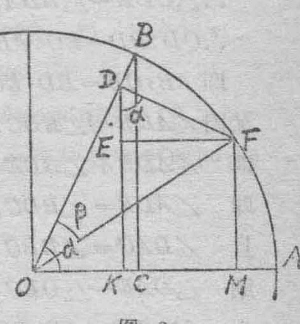

图 2.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=MF\\&=KD-ED\\&=\sin\alpha\cdot OD-\cos\alpha\cdot DF\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (S_{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=OM\\&=OK+EF\\&=\cos\alpha\cdot OD+\sin\alpha\cdot DF\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。 \qquad (C_{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

關於前面所證明的四個公式($S_{\alpha+\beta}$, $C_{\alpha+\beta}$, $S_{\alpha-\beta}$, $C_{\alpha-\beta}$),我們也可以利用布特勞密定理來證明。克拉基·布特勞密曾發現了一個幾何定理:"圓的內接四邊形每組對边乘积的和,等於兩對角綫的積。"在這個定理中,已隱然含有這四個公式。現在我們先介紹這個定理的證明。

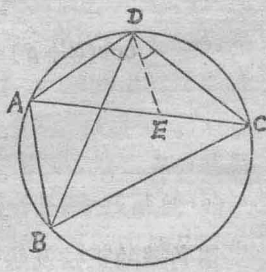

圖 3.

已知: 圓內接四邊形 $ABCD$,

求證: $AB\cdot DC+AD\cdot BC=AC\cdot BD$。

證明: 如圖 3,假定 $\angle BDC>\angle ADB$,

作 DE 使 $\angle CDE=\angle ADB$,

因 $\angle ECD=\angle ABD$,

$\therefore \triangle CDE\sim\triangle BDA$,

$\therefore CD:BD=EC:AB$,

即 $AB\cdot CD=BD\cdot EC$。 (1)

又因 $\angle ADB=\angle EDC$,

則 $\angle ADB+\angle BDE=\angle EDC+\angle BDE$,

即 $\angle ADE=\angle BDC$。

且 $\angle DAC=\angle DBC$,

則 $\triangle DAE\sim\triangle DBC$,

$\therefore AD:BD=AE:BC$,

即　$AD\cdot BC=BD\cdot AE$。　　　　(2)

由上面證得的(1)＋(2)得:

$$\begin{aligned}AB\cdot CD+AD\cdot BC&=BD\cdot EC+BD\cdot AE\\&=BD(EC+AE)\\&=BD\cdot AC。\end{aligned}$$

應用布特勞密定理證明公式($S_{\alpha+\beta},C_{\alpha+\beta},S_{\alpha-\beta},C_{\alpha-\beta}$)。

設: 如圖 4.　$\angle FEG=\alpha$, $\angle GEH=\beta$。

取 EG 爲一個長度單位, 並以 EG 爲直徑作圓, 與 EF 相交於 F 點,與 EH 相交於 H 點。連 GF, GH 及 FH, 再自 H 點作直徑 HJ, 並連 EJ, FJ 及 GJ,

則　$\alpha+\beta=\angle FEH=\angle FJH$。

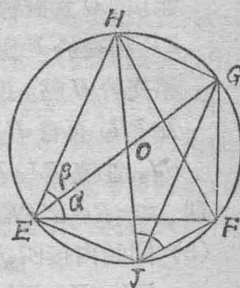

圖 4.

(1) 圓的內接四邊形 $EFGH$ 中,由布特勞密定理則有:

$$FH\cdot EG=FG\cdot EH+EF\cdot GH。$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)&=\sin FJH\\&=FH\\&=FH\cdot EG \qquad (\because EG=1)\\&=FG\cdot EH+EF\cdot HG\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta。\qquad (S_{\alpha+\beta})\end{aligned}$$

(2) 圓的內接四邊形 $EJFG$ 中,由布特勞密定理則有:

$$JF\cdot EG+FG\cdot EJ=EF\cdot JG,$$

即　$JF\cdot EG=EF\cdot JG-FG\cdot EJ$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)&=\cos FJH\\&=JF\end{aligned}$$

$$=JF\cdot EG \qquad (\because EG=1)$$
$$=EF\cdot JG-FG\cdot EJ$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta。\quad (C_{\alpha+\beta})$$

設：如圖 5，

$\angle FEG=\alpha$，$\angle HEG=\beta$。

取 EG 爲一個長度單位，並以 EG 爲直徑作圓，與 EF 相交於 F 點，與 EH 相交於 H 點。連 GF，GH 及 FH，再自 H 點作直徑 HJ，並連 EJ，FJ 及 GJ，

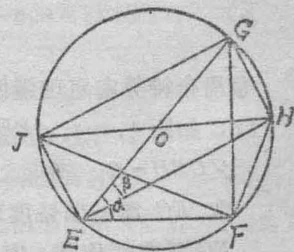

图 5.

則 $\alpha-\beta=\angle FEH=\angle FJH$。

(3) 圓的內接四边形 $EFHG$ 中，由布特勞密定理則有：

$$FG\cdot EH=FH\cdot EG+EF\cdot HG,$$

即 $FH\cdot EG=FG\cdot EH-EF\cdot HG$。

$$\therefore \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin FJH$$
$$=FH$$
$$=FH\cdot EG \qquad (\because EG=1)$$
$$=FG\cdot EH-EF\cdot HG$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta。\quad (S_{\alpha-\beta})$$

(4) 圓的內接四邊形 $EFGJ$ 中，由布特勞密定理則有：

$$JF\cdot EG=EF\cdot JG+FG\cdot EJ。$$

$$\therefore \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos FJH$$
$$=JF$$
$$=JF\cdot EG \qquad (\because EG=1)$$
$$=EF\cdot JG+FG\cdot EJ$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。\quad (C_{\alpha-\beta})$$

我們爲了說明方便，把應用布特勞密定理推證公式的圖形合併成兩個，在每一個證明的過程中，作爲說理所依據的圖形上，總有兩條綫是不用的（這個幾何證法僅供教師參考）。

上面的推證過程，關於公式$(S_{\alpha+\beta})$與$(S_{\alpha-\beta})$以及$(C_{\alpha+\beta})$與$(C_{\alpha-\beta})$的證明內容是非常相像和一致的。但是這個證明與課本上第 51 節一樣，是在角 α 與 β 的非常特殊情形下討論的，就是在 $0°<\alpha<90°$，$0°<\beta<90°$，且 $\alpha+\beta<90°$ 時引出的公式，因此這些公式的一般性，就必須加以詳細研究。我們根據現行中學三角課本上用數學歸納法來證明公式的一般性，如果公式$(S_{\alpha+\beta})$及$(C_{\alpha+\beta})$的一般性得到證明，然後由它爲基礎所推出的其他公式，當然具有一般性了。爲了說明用數學歸納法證明的全部過程，所以把課本上沒有提到的情形，也補充進去。現在我們在誘導公式的基礎上，將證明過程系統地敍述如下：

（1）當 $0°<\alpha<90°, 0°<\beta<90°$，且 $\alpha+\beta<90°$時，前面已經證明過了。

（2）當 $0°<\alpha<90°, 0°<\beta<90°$，但 $\alpha+\beta=90°$時，

則 $\beta=90°-\alpha$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin 90°=1$，

而 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\sin\alpha\cos(90°-\alpha)+\cos\alpha\sin(90°-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos 90°=0$，

而 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\cos\alpha\cos(90°-\alpha)-\sin\alpha\sin(90°-\alpha)$

$=\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=0$，

$\therefore$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(3) 當 $\alpha=0°, \beta=0°$ 時,

則 $\sin(\alpha+\beta)=\sin 0°=0$,

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\sin 0°\cos 0°+\cos 0°\sin 0°=0\times 1+1\times 0=0$,

$\therefore$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos 0°=1$,

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\cos 0°\cos 0°-\sin 0°\sin 0°=1\times 1-0\times 0=1$,

$\therefore$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(4) 當 $\alpha=0°$, $0°<\beta<90°$, 或 $\beta=0°$, $0°<\alpha<90°$時。

如 $\alpha=0°$, $0°<\beta<90°$,

則 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta$,

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\sin 0°\cos\beta+\cos 0°\sin\beta$

$=0\cdot\cos\beta+1\cdot\sin\beta$

$=\sin\beta$,

$\therefore$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta$,

而 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\cos 0°\cos\beta-\sin 0°\sin\beta$

$=1\cdot\cos\beta-0\cdot\sin\beta$

$=\cos\beta$,

$\therefore$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

(5) 當 $0°<\alpha<90°$, $0°<\beta<90°$ 但 $\alpha+\beta>90°$ 時,

可設 $\alpha=90°-\alpha_1$, $\beta=90°-\beta_1$,

則 $\alpha+\beta=180°-(\alpha_1+\beta_1)$。

因 $90°<\alpha+\beta<180°$,

$\therefore\ \alpha_1+\beta_1<90^\circ$。

於是得:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]\\&=\sin(\alpha_1+\beta_1);\\\cos(\alpha+\beta)&=\cos[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]\\&=-\cos(\alpha_1+\beta_1)。\end{aligned}$$

由於 $\alpha_1+\beta_1<90^\circ$, 所以可以應用已經證明的公式 $(S_{\alpha+\beta})$ 及 $(C_{\alpha+\beta})$, 並以 $\alpha_1=90^\circ-\alpha$, $\beta_1=90^\circ-\beta$ 代入 $\sin(\alpha_1+\beta_1)$ 及 $\cos(\alpha_1+\beta_1)$ 的展開式得:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin(\alpha_1+\beta_1)\\&=\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1\\&=\sin(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta)\\&\quad+\cos(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)\\&=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta;\\\cos(\alpha+\beta)&=-\cos(\alpha_1+\beta_1)\\&=-\cos\alpha_1\cos\beta_1+\sin\alpha_1\sin\beta_1\\&=-\cos(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta)\\&\quad+\sin(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)\\&=-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta。\end{aligned}$$

現在所得 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$的展開式, 與前面證得的完全相同。

從上面這些討論中, 可以說明公式 $(S_{\alpha+\beta})$ 及 $(C_{\alpha+\beta})$適用於當 $0^\circ\leq\alpha<90^\circ$, $0^\circ\leq\beta<90^\circ$ 的一切情形。也就是說公式能適用於一切正銳角或 0°

我們假定公式$(S_{\alpha+\beta})$ 與 $(C_{\alpha+\beta})$對某兩個正角成立, 可以向其中的一個角加 90°, 則這兩個公式成立。

設這兩個角爲 α,β, 且令 $\alpha+90^\circ=\alpha_1$, 則得:

$$\sin(\alpha_1+\beta)=\sin[90°+(\alpha+\beta)]$$
$$=\cos(\alpha+\beta);\qquad(1)$$
$$\cos(\alpha_1+\beta)=\cos[90°+(\alpha+\beta)]$$
$$=-\sin(\alpha+\beta)。\qquad(2)$$

根據假設,當 α,β 爲某兩個正角時,公式$(S_{\alpha+\beta})$ 及 $(C_{\alpha+\beta})$ 成立,則有:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$-\sin(\alpha+\beta)=-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)。$$

以這兩式依次代入(1)與(2)得:

$$\sin(\alpha_1+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\qquad(3)$$
$$\cos(\alpha_1+\beta)=-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)。(4)$$

又因 $\alpha+90°=\alpha_1$, 則 $\alpha=\alpha_1-90°=-(90°-\alpha_1)$。

由此得:

$$\sin\alpha=-\sin(90°-\alpha_1)$$
$$=-\cos\alpha_1,$$
$$\cos\alpha=\cos(90°-\alpha_1)$$
$$=\sin\alpha_1。$$

現在以 $-\cos\alpha_1$ 代替(3),(4)中右邊的 $\sin\alpha$, 以 $\sin\alpha_1$ 代替(3),(4)中右邊的 $\cos\alpha$, 則得:

$$\sin(\alpha_1+\beta)=\sin\alpha_1\cos\beta-(-\cos\alpha_1)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha_1\cos\beta+\cos\alpha_1\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha_1+\beta)=-[(-\cos\alpha_1)\cos\beta+\sin\alpha_1\sin\beta]$$
$$=\cos\alpha_1\cos\beta-\sin\alpha_1\sin\beta。$$

從上面的證明,可以知道當兩角爲 $\alpha_1=\alpha+90°$ 及 β 時,所得的結果仍舊與公式$(S_{\alpha+\beta})$及$(C_{\alpha+\beta})$的展開法則完全一樣。也就是說,當一個角加 90° 時,公式仍然成立。

由於公式 ($S_{\alpha+\beta}$) 及 ($C_{\alpha+\beta}$) 已經證明在 $0°\leq\alpha<90°$,

$0^\circ \leq \beta < 90^\circ$ 時成立，所以 α 加上一個 90° 或若干個 90° 之後，則 α 由任意正銳角或 0° 增加爲 90° 或大於 90° 的任意正角。同樣，在 β 上加上一個 90° 或若干個 90°，則 β 由任意正銳角或 0° 增加爲 90° 或大於 90° 的任意正角。現在已經證明當其中一角加 90° 時公式仍然成立。我們可以屢次運用這個規律來推證這兩個公式的適用範圍，就可以證得這兩個公式能適用於 α 及 β 的任意正值或 0° 了。

如果把 α 或 β 的值減去一個或若干個 360°，由於正弦或餘弦都是 360° 爲週期的函數，因此兩角的函數值並沒有改變。即當一角爲任意負值時，可以從某一正值減去 360° 的整倍數得出。如另一角亦爲任意負值時，也可以從另一正值減去 360° 的整倍數得出。這時 $\alpha+\beta$ 的值也變動了 360° 的整倍數，但它們的相應函數值都沒有改變，因此它們的相互關係也沒有改變。

例如：

(1) 設 $\alpha=-35^\circ, \beta>0^\circ$，

則
$$\begin{aligned}\sin(-35^\circ+\beta)&=\sin(325^\circ+\beta-360^\circ)\\&=\sin(325^\circ+\beta)\\&=\sin 325^\circ\cos\beta+\cos 325^\circ\sin\beta。\end{aligned}$$

其中
$$\begin{aligned}\sin 325^\circ&=\sin(360^\circ-35^\circ)\\&=\sin(-35^\circ),\\ \cos 325^\circ&=\cos(360^\circ-35^\circ)\\&=\cos(-35^\circ)。\end{aligned}$$

因此，
$$\begin{aligned}\sin(-35^\circ+\beta)&=\sin 325^\circ\cos\beta+\cos 325^\circ\sin\beta\\&=\sin(-35^\circ)\cos\beta+\cos(-35^\circ)\sin\beta。\end{aligned}$$

這就說明了兩角中一角爲負值時，公式 $(S_{\alpha+\beta})$ 仍然適用。