◎ 贺小明 赵志红 张学梅／编著

数学物理方程

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

数学物理方程

Equations of Mathematical Physics

贺小明 赵志红 张学梅 / 编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

内容简介

本书介绍了数学物理典型方程的物理背景、主要求解方法以及有关适定性的基本结论。在选材上贯彻少而精的原则，充分反映了偏微分方程的核心内容；在内容处理上，由浅入深，循序渐进；在叙述表达上，严谨精炼，清晰可读，力求简明易学。书中配有大量难易兼顾的例题和习题，便于教师教学选讲和自学者选读。

本书可作为高等院校数学类专业以及物理学、金融数学、统计学等相关专业的本科生教材或教学参考书，也可供在实际工作中需要利用偏微分方程基础知识的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程 /贺小明等编著--北京：中央民族大学出版社， 2011.9

ISBN 978-7-5660-0087-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①贺… Ⅲ.①数学物理方程—高等学校—教材 Ⅳ.①0175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第226114号

编　　著　贺小明　赵志红　张学梅
责任编辑　李苏幸
封面设计　布拉格
出 版 者　中央民族大学出版社
　　　　　北京市海淀区中关村南大街27号　邮编：　100081
　　　　　电话：68932815(发行部)　传真：68932751(发行部)
　　　　　　　　68932218(总编室)　　　　68932447(办公室)
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 厂　北京宏伟双华印刷有限公司
开　　本　787×960(毫米)　　1/16　　　印张：11.25
字　　数　200千字
版　　次　2011年9月第1版　　2011年9月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5660-0087-3
定　　价　28.00元

前　　言

数学物理方程是以具有物理背景的偏微分方程作为研究的主要对象。随着微积分的创立，人们便开始关注偏微分方程的研究，特别是自然科学和工程技术的各部门分支中出现的、反映客观世界物理量之间相互联系的偏微分方程。例如连续介质力学、电磁学、量子力学等方面出现的基本方程均属于数学物理方程的范畴。

由于数学物理方程直接联系着许多自然现象和工程技术，范围广泛，内容丰富。因此，无论过去还是现在，它对于推动数学理论的发展，加强理论与实际的联系，帮助人们认识世界起着重要的作用。目前高等院校理工科均开设了“数学物理方程”或“偏微分方程”课程。但是两者的侧重点不同，前者偏重于方程模型的建立和解题方法，而后者侧重于其自身的数学理论。

本书是根据作者近年来的教学实践，旨在以最精简的的篇幅介绍经典数学物理方程的基本理论、基本方法和基本技巧，使读者获得进一步学习所必需的基础知识。尽可能做到直观易懂与严谨处理相结合。注意把数学理论、求解方法、物理背景三者有机地结合起来，这是本书具有的区别于其他相关教材的鲜明特色。

全书共分五章：第一章绪论介绍了偏微分方程的基本概念和例子；二阶偏微分方程的分类与化简，分离变量法的基本思想。第二章至第四章主要讨论波动方程、热传导方程及位势方程三类典型方程的定解问题的求解方法，着重介绍了分离变量法、特征线法、积分变换法、球面平均法、降维法及格林函数法。第五章介绍了三类典型方程的基本理论，如极值原理和能量估计，并由此给出了解的唯一性和稳定性的相关结论。

本书的部分章节内容，例题与习题参考了书末所附的参考文献，在此一并致谢。在本书的写作过程中，得到了北京理工大学葛渭高教授的支持与鼓励，并在百忙中审阅了原稿，在此特表谢忱。

本书的出版得到了国家自然科学基金(No.10971238)及中央民族大学自主科研项目(No.0910KYZY51)的资助。由于作者水平所限，书中错误与不当之处在所难免，诚请读者提出宝贵意见。

作　者

2011 年元旦

目 录

第一章　绪论

数学物理方程在数学、物理学、力学以及工程技术等学科中具有十分重要的作用，这些学科中的许多实际问题常常可以归纳为求解一个，或一组偏微分方程的相应定解问题. 在绪论中，我们首先给出一些重要的、有代表性的偏微分方程的例子，然后介绍二阶偏微分方程的分类与化简，以及分离变量法的基本思想.

§1.1　基本概念

§1.1.1　定义与例子

含有未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及其偏导数的关系式如果满足下面的等式

$$F(x, u, Du, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}, \cdots, u_{x_nx_n}, \cdots) = 0, \tag{1.1}$$

则称之为**偏微分方程**. 其中，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), Du = (u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n}), F$ 是关于 x 及未知函数 u 及 u 的有限多个偏导数的已知函数. F 可以不显含未知函数 u 及其自变量 x, 但是必须含有未知函数的偏微商. 涉及几个未知函数的多个偏微分方程构成一个**偏微分方程组**. 除非另有说明，我们限制自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取实数，并设函数 u 及其出现在方程中的各阶偏微商连续.

如果一个函数在其自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的某变化范围内连续，并且具有方程中出现的一切连续偏微商，将它代入方程后使其成为恒等式，则称该函数是方程的**解**或**古典解**.

一个偏微分方程或方程组的**阶数**是其中最高阶微商的阶数. 偏微分方程或方程组称为**线性**的，如果它关于未知函数及其所有微商是线性的. 否则，称为**非线性**. 在非线性方程（组）中，如果它关于未知函数的最高阶微商（比如是 m 阶）是线性的，并且系数依赖于自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及未知函数的阶数低于 m 的微商，则称它是 m 阶**拟线性方程（组）**. 进而，若 m 阶微商的系数仅是自变量的函数，则称这种拟线性方程（组）是 m 阶**半线性方程（组）**. 不是拟线性方程（组）的非线性方程（组）叫做**完全非线性方程（组）**. 在线性方程（组）中，像常微分方程中一样，又分为常系数、变系数、齐次和非齐次方程（组）等. 下面我们给出一些例子.

以下如无特别说明，自变量 t 表示时间，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 维空间自

变量. 称微分算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

为 **Laplace（拉普拉斯）算子**. 甚至可以说，它是偏微分方程中最重要的算子，这个算子在坐标的平移和旋转变换之下不变.

例 1.1.1 关于函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 的 n 维波动方程是

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t), \tag{1.2}$$

其中 $a>0, f(x,t)$ 是外力函数.

这是一个二阶常系数线性方程. 当 $n=1$ 时，它描述弦的振动或声波在管中的传播；当 $n=2$ 时，它描述浅水面或薄膜的振动；而当 $n=3$ 时，它描述声波或光波. 方程 (1.2) 的由来在下一章中有详细的推导.

例 1.1.2 当一个导热体的密度和比热都是常数时，其温度分布 $u(x,t)$ 满足热传导方程

$$u_t-a^2\Delta u=f(x,t), \tag{1.3}$$

其中 $a>0, f(x,t)$ 是内部热源强度函数.

在研究粒子的扩散过程时，例如气体的扩散、液体的渗透以及半导体材料中杂质的扩散等，也可用类似方程来描述.

例 1.1.3 关于函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 n 维 Poisson 方程是

$$\Delta u=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}=f(x_1,\cdots,x_n). \tag{1.4}$$

它的解 u 称为调和函数或势函数. 其中 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是未知函数，$f=f(x_1,\cdots,x_n)$ 是给定的已知函数，这是在理论上最重要、在应用中最广泛的方程. 当方程是齐次时，即 $f\equiv 0$, 称之为 Laplace 方程. 它们通称为位势方程. 它们具有广泛的应用背景，特别在研究静电场的电位函数、平衡状态下的波动现象和扩散过程时都会遇到这类方程.

以上方程都是二阶线性常系数方程，它们是本教材的主要研究内容. 二阶线性方程的一般形式具有如下形式：

例 1.1.4

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(x)u_{x_i}+c(x)u=f(x), \tag{1.5}$$

其中, $a^{ij}=a^{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$, 且至少有一个 $a^{ij}\neq 0$.

例 1.1.5 极小曲面是通过给定周线而具有最小表面积的曲面, 它满足二阶拟线性方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0. \tag{1.6}$$

例 1.1.6 Korteweg-de Vries 方程 (简称 KDV 方程) 满足:

$$u_t+cuu_x+u_{xxx}=0, \tag{1.7}$$

它是在水波的研究中被首先发现的, 可用来描述浅水波中孤立子的传播. 其中, $u=u(x,t)$ 是二元光滑函数. 这是一个三阶拟线性方程.

例 1.1.7 在势能为 $V(x,y,z)$ 的场中, 运动的质量为 m 的单个质点所满足的 Schrödinger 方程是

$$i\hbar\psi_t=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi, \tag{1.8}$$

其中 $h=2\pi\hbar$ 是 Planck 常数, 它是量子力学中的基本方程.

例 1.1.8 不可压缩液体的黏性流的 Navier-Stokes 方程是速度分量 u_k 和压力 p 的一组偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\displaystyle\sum_{k=i}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=\mu\Delta u_i, \quad i=1,2,3, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0. \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 ρ 是密度常数, 而 μ 是运动的黏性系数. (1.9) 是流体力学中的基本方程组.

例 1.1.9 二阶反应扩散方程组:

$$\mathbb{U}_t-\Delta\mathbb{U}=f(\mathbb{U}) \tag{1.10}$$

和一个一阶拟线性能量守恒律方程组

$$\mathbb{U}_t+\mathrm{div}\mathcal{F}(U)=0, \tag{1.11}$$

其中 $f,\mathcal{F}$ 是其自变量的非线性 m 维向量函数, $\mathbb{U}=(u_1,\cdots,u_n)$, $\Delta\mathbb{U}=(\Delta u_1,\cdots,\Delta u_n)$.

§1.1.2 叠加原理

在物理学的研究中经常出现这样的现象: 几种不同原因综合所产生的效果等于这些不同原因单独作用产生的效果的累加. 例如, 几个外力作用在一物体上所产生的加速度可以用单个外力各自单独作用在该物体上所产生的加速度相加而得到, 这个原理称为**叠加原理**. 这种具有叠加效应的现象在线性偏微分方程的定解问题中有着重要的应用. 我们以二阶线性偏微分方程 (1.5) 为例来说明方程解的叠加性质. (1.5) 可表示为

$$Lu = f.$$

定理 1.1.1 若 u_i 满足线性问题

$$Lu_i = f_i, \quad Bu_i = g_i, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

其中 L, B 是线性偏微分算子. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ 收敛且可以逐项微分, 同时级数 $\sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} C_i g_i$ 都收敛, 则 $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ 是问题

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i, \quad Bu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i g_i$$

的解.

在后文中, 经常用叠加原理把一个复杂问题的求解化成几个较简单问题的求解, 从而使问题得到解决. 下面例子说明叠加原理的应用.

例 1.1.10 求 Poisson 方程

$$\Delta u = x^2 + 3xy + y^2 \tag{1.12}$$

的通解

解 (1) 先求出方程的一个特解 $w(x, y)$, 使之满足

$$\Delta w = x^2 + 3xy + y^2.$$

由于方程右端是一个二元二次齐次多项式, 可设 w 具有如下形式

$$w = ax^4 + bx^3 y + cy^4,$$

其中 a, b, c 是待定常数, 代入方程, 得

$$a = \frac{1}{12}, \ b = \frac{1}{2}, \ c = \frac{1}{12},$$

于是

$$w = \frac{1}{12}(x^4 + 6x^3y + y^4).$$

(2) 求函数 $v(x,y)$, 使之满足 $\Delta v = 0$.

作变换 $\xi = x, \eta = iy$ $(i^2 = -1)$, 得

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0.$$

再做变换 $s = \xi + \eta, t = \xi - \eta$, 方程进而化为

$$v_{st} = 0,$$

解得

$$\begin{aligned} v &= f(s) + g(t) \\ &= f(\xi + \eta) + g(\xi - \eta) \\ &= f(x + iy) + g(x - iy), \end{aligned}$$

其中, f, g 是任意的二次连续可微函数.

(3) 根据叠加原理, Poisson 方程 (1.12) 的通解为

$$\begin{aligned} u(x,y) &= v + w \\ &= f(x + iy) + g(x - iy) + \tfrac{1}{12}(x^4 + 6x^3y + y^4). \end{aligned}$$

§1.2 定解问题

由上面的例 1.1.10 可知，一个偏微分方程通常有无穷多个解. 正如前文所说，这些方程都具有实际的物理背景，是从实际问题中抽象出来的. 例如，当 $n = 2$ 时，方程 (1.2) 表示在一个平面区域上张紧的薄膜的横振动，而薄膜的边界振动状态是已知的. 也就是说，按照薄膜具体的物理状态，位移函数 $u(x,y,t)$ 在边界上的值或法向微商的值或二者的线性组合的值是已知的. 这就是要求求出的解满足这个条件. 我们把方程的解必须满足的事先给定的条件叫做**定解条件**. 一个方程配备上定解条件就构成一个**定解问题**. 一般来说，常见的定解条件有初始条件和边值条件两大类，相应的定解问题叫做**初值问题**和**边值问题**. 初值问题或边值问题的**解**或称**古典解**是指这样的函数：它在区域的内部具有方程中出现的一切连续偏微商，而本身在区域的闭包上连续，它满足方程，并且当时间变量趋于初始时刻或空间变量趋于区域的边界时，它连续地取到给定的初始值或边

界值. 有时, 对方程同时附加初始条件和边界条件, 这就构成一个初边值问题. 下面给出几个例子.

例 1.2.1 考虑在区间 $[0,l]$ 上张紧的均匀弦的微小横振动

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

其中, $u(x,t)$ 表示在时刻 t 质点 x 的在垂直于线段 $\overline{0l}$(位于 x 轴上) 方向上的位移. 弦的两端固定, 即 $u(0,t) = u(l,t) = 0$, 弦的初始位移为 $\varphi(x)$, 初始速度为 $\psi(x)$, 弦不受外力. 其中, $a > 0$ 是波的传播速度.

在上面的例子中, 如果考虑线中间一小段的振动状态, 该小段的位移相对于弦的边界如此之小, 以至于边界条件的影响尚未传到此处考察就结束了. 所以, 边界条件的影响可以不计, 理论上可以把弦看做无限长, 于是就得到了下面的初值问题:

例 1.2.2

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

假设定义在三维空间某区域 Ω 上的电位函数为 $u(x,y,z)$, 电荷分布密度为 $\rho(x,y,z)$. 由静电学理论知, $u(x,y,z)$ 满足 Poisson 方程 $\Delta u = -4\pi\rho(x,y,z)$. 若测得在 Ω 的边界上的电位为 $\varphi(x,y,z)$, 则得到 Poisson 方程的边值问题:

例 1.2.3

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi\rho(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z) = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

在该例中, 若区域内部无电荷分布, 则得 Laplace 方程的边值问题:

例 1.2.4

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega \\ u(x,y,z) = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

上面的边值问题称为**第一类边值问题**，也叫 Dirichlet 问题，即给出未知函数在边界上的值（称为第一类边界条件）．另外还有**第二类边值问题**，也叫 Neumann 问题，即给出未知函数在边界上的法向微商的值（称为第二类边界条件）；还有**第三类边值问题**，也叫 Robin 问题，即给出未知函数在边界上的法向微商和本身的线性组合的值（称为第三类边界条件）．在本书以后的章节中，我们还会多次遇到这些边界条件和边值问题.

从上面的例子我们看到，对于不同的物理问题，一般来说其定解条件也是不同的. 从数学上看，一个定解问题的提出是否合理，即是否能够完全描述一个给定的物理状态，一般来说有以下三个标准：

(1) **解的存在性** 所给的定解问题有解；

(2) **解的唯一性** 所给的定解问题只有一个解；

(3) **解的稳定性** 当定解条件（初始条件，边界条件）以及方程中的系数有微小变动时，相应的解也只有微小变动. 解的稳定性也称为解关于参数的连续依赖性.

解的存在性、唯一性和稳定性，三者合起来称为**解的适定性**. 一般来说，一个具体的物理问题在一定的条件下，总有唯一确定的状态，反映在定解问题中就是解的存在唯一性. 定解条件都是通过测量和统计得到的，在测量和统计的过程中误差总是难免的，同时在建立数学模型的过程中也多次利用了近似. 如果解的稳定性不成立，那所建立的定解问题就失去了实际意义. 如果一个定解问题的适定性不成立，就要对定解问题作进一步的修改，直到它具有适定性.

§1.3 二阶线性偏微分方程的分类和化简

不同类型的方程或方程组所表达的物理现象有着本质的不同，反映到方程中就出现了各类方程或方程组所特有的性质和理论，以及在研究方法上的不同特点. 讨论定解问题的解法及解的初步定性性质，是本教材的核心任务. 因为处理偏微分方程的基本步骤，是先把一般式化成**标准型**，再给出解决标准型的基本方法，所以先对二阶线性偏微分方程进行分类和化简是必要的.

二阶线性偏微分方程的一般形式是

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

其中 $a_{i,j}, b_i, c$ 和 f 都是实值函数. 当 $n=2$ 时可以写成

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f. \tag{1.13}$$

它极相似于二次代数方程（二次曲线）$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y=f$, 但是二者之间没有必然的联系. 然而，人们仍用二次曲线来划分二阶方程的类型.

下面我们考虑两个自变量的二阶线性偏微分方程 (1.13)，其中 $a_{i,j}, b_i, c, f$ 都是 x, y 的连续可微实值函数，并且 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不同时为零.

在任一点 $(x_0, y_0)\in\Omega$ 的一个邻域内，考虑自变量变换

$$\xi=\xi(x,y), \quad \eta=\eta(x,y), \tag{1.14}$$

假设它的 Jacobi 行列式

$$J=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\left|\begin{array}{cc}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{array}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0.$$

由隐函数定理知，该变换是可逆的，即存在逆变换 $x=x(\xi,\eta), y=y(\xi,\eta)$. 直接计算，有

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x, \quad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y, \cdots.$$

将其代入方程 (1.13) 得

$$a_{11}^*u_{\xi\xi}+2a_{12}^*u_{\xi\eta}+a_{22}^*u_{\eta\eta}+b_1^*u_\xi+b_2^*u_\eta+c^*u=f^*, \tag{1.15}$$

其中 $c^*=c, f^*=f, a_{i,j}^*$ 和 b_i^* 可以分别用 $a_{i,j}, b_i$ 以及 ξ 和 η 的各阶偏导数表示. 特别的，

$$\begin{cases} a_{11}^*=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\ a_{12}^*=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\ a_{22}^*=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,\\ b_1^*=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\ b_2^*=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y. \end{cases} \tag{1.16}$$

我们希望选取一个变换 (1.14)，使得方程 (1.15) 有比方程 (1.13) 更简单的形式. 注意到 (1.16) 式中的 a_{11}^* 与 a_{22}^* 有相同的形式，如果能解出方程

$$a_{11}\varphi_x^2+2a_{12}\varphi_x\varphi_y+a_{22}\varphi_y^2=0 \tag{1.17}$$

的两个函数无关的解 $\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)$, 那么取 $\xi=\varphi_1(x,y),\eta=\varphi_2(x,y)$, 就能保证 $a_{11}^*=a_{22}^*=0$. 因此方程 (1.17) 的解的结构对方程 (1.13) 的化简至关重要.

假设 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$, 不妨设 $\varphi_y\neq 0$. 用 φ_y^2 除方程 (1.17) 得

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+a_{22}=0. \tag{1.18}$$

沿着曲线 $\varphi(x,y)=C$（常数）, 有 $0=d\varphi=\varphi_x dx+\varphi_y dy$, 于是

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

方程 (1.18) 就成为

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0,$$

或者

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0. \tag{1.19}$$

这说明, 如果 $\varphi=\varphi(x,y)$ 是方程 (1.17) 的解, 则 $\varphi(x,y)=C$ 是方程 (1.19) 的一族积分曲线. 反之，若 $\varphi(x,y)=C$ 是方程 (1.19) 的一族积分曲线且 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$, 则 $\varphi=\varphi(x,y)$ 是方程 (1.17) 的解. 因此，求解方程 (1.17) 等价于求解方程 (1.19). 常微分方程 (1.19) 称为偏微分方程 (1.13) 的**特征方程**, 其积分曲线称为方程 (1.13) 的**特征线**.

记 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$, 易证 $\Delta^*=a_{12}^{*2}-a_{11}^*a_{22}^*=\Delta\times J^2$. 所以在变换 (1.14) 之下, Δ 的符号不变，我们可以利用 Δ 的符号来讨论方程 (1.19) 的解及相应的变换.

(1) 在点 (x_0,y_0) 的邻域内 $\Delta>0$. 方程 (1.19) 可分解为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}}.$$

于是存在两族不相同的积分曲线 $\varphi_1(x,y)=C_1,\varphi_2(x,y)=C_2$, 且 φ_1 和 φ_2 函数无关. 作变换

$$\xi=\varphi_1(x,y),\quad \eta=\varphi_2(x,y),$$

直接计算知 $a_{11}^*=a_{22}^*=0$. 此时方程 (1.15) 化简为

$$u_{\xi\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$