江苏省五年制高等职业教育试用教材

数学

《数学》编写组 编

苏州大学出版社

SHUXUE

第二册

江苏省五年制高等职业教育试用教材

数　学

第二册

《数学》编写组　编

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学　第2册/高安力主编.—苏州:苏州大学出版社,1999.8重印
江苏省五年制高等职业教育试用教材
ISBN 7-81037-438-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.高…　Ⅲ.高等数学-高等教育:职业教育-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第32007号

江苏省五年制高等职业教育试用教材
数　学(第二册)
《数学》编写组　编
责任编辑　董张维

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号　邮编:215006)
丹阳市华鑫印务公司照排
武进市第三印刷厂印刷
(地址:常州西门村前镇　邮编:213154)

开本787×1092　1/16　印张18.75　字数462千
1998年8月第1版　　1999年8月第2次印刷
印数10101—13100册
ISBN 7-81037-438-9/O·16(课)　定价:22.00元

江苏省五年制高等职业教育教材编审委员会

前 言

从1995年起，原国家教委先后批准我省部分重点中专校试办五年制高职班，对我省职业教育的发展和提高起到很大的促进作用。为确保高职教育的培养目标与教学质量，努力办出高职特色，1996年11月初，在原国家教委关心指导下，省教委在无锡召开了“江苏省五年制高职教育工作研讨会”，就中专办高职的办学指导思想和管理、教学计划的制定与修订、教材建设、师资队伍建设等问题进行认真研讨，会上成立了“江苏省五年制高职教育学校协作委员会”及语文、英语、数学、物理四门公共课教材编写组，会后即组织所有试办高职班的学校的有关教师与专家，经过近两年的反复研讨，六易其稿，编写了这四门公共课的教学大纲及试用教材。

编写五年制高职公共课教材的指导思想是为了逐步构建一套适合于高职教育的公共课教材体系。在编写过程中，首先强化培养目标，开发好课程大纲，并以课程大纲为依据来组织教学内容，尽可能地体现五年制高职教育中公共课的基础性和实用性。在教学内容的安排和取舍上，遵循“尊重学科，但不恪守学科性”的原则，删旧增新，减少理论推导，着重阐明实践应用价值，强调公共课与相关学科之间的横向连接，注意与专门课程的接口，力求做到立足实践与应用，拓宽基础知识面，强化能力训练和迁移，使一般能力的培养和职业能力的培养相结合。教学内容留有适当的弹性，使不同专业和学有余力的学生可灵活选用与自学。本套教材主要适用于五年制高等职业教育，同时也可作为五年制专业班和四年制中专的教材或参考书。

四门公共课教材的编写工作，由省教委职教办组织，省高职协作会具体负责。教材编写采用主编负责制，主审协助主编把好教材质量关。编写五年制高职教材是新的探索，我们力求编好，但限于经验和水平，教材的缺点和不完善之处在所难免，请使用本教材的师生及同行们予以指正，使这套教材在实践中不断完善。

江苏省五年制高等职业教育教材编审委员会

1998年5月

编写说明

数学是五年制高等职业教育的一门必修公共课。数学的内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分，因此，从全面提高素质的角度来说，数学是一门重要的基础课；从综合职业能力的要求来说，数学又是进一步学习及参加社会生活、生产所必不可少的一门工具课。

这套教材的编写，我们力求遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则。具体反映在：(1) 尊重学科，但不恪守学科性。在发扬我国数学教育的优良传统的同时，注意借鉴、渗透“大众数学”和“问题解决”等思想，重视并加强数学应用意识、应用能力的培养。(2) 考虑到计算机技术为特征的信息社会对本课程的要求，增加了计算方法、数学建模、计算器使用及 Mathematica 软件介绍等内容。(3) 注意了与初中基础的衔接，对与现代生活和后续课程联系密切的内容，适当留有“接口”。

这套教材的编写，我们试图采用“粗点”，即留有余地让教师创造性地发挥，论证不追求过于严密，有些推导采用若干支撑点过渡；“实点”，尽量贴近生活，联系实际，便于教学；“新点”，通过新一点，逐步体现求异、求变。

这套教材共分三册。第一册以初等教学为主，第二册以一元函数微积分为主，第三册以工程数学为主。总学时为 330 学时左右。

这套教材主要供招收初中毕业生的高等职业技术教育使用，稍作处理，也可供相应专业的中等职业技术教育使用.

这套教材由谈兴华任总编。本册主编：高安力，主审：王观藜。参加编写的人员有高安力、张　昉、张建忠、曹苏燕、王世贤、王　岩、胡顺田。

这套教材的编写尽管我们作了很大的努力，但限于水平，加之时间仓促，数学教育改革中的有些问题还有待探索，因此，不足与错误之处在所难免，恳请批评指正。

值得一提的是在本书的编写和出版过程中得到了江苏省教委、各有关学校的领导及苏州大学出版社的大力支持和帮助。王兆明、殷冬生、秦淦等同志还给予了很多具体的指点，在此一并表示衷心的谢意。

《数学》编写组

1998 年 3 月

目　　录

第十章　直　线

以前,我们在研究平面图形和空间图形的概念和性质时,是以公理为基础,直接依据图形中的点、线、面的相互关系来进行的.从本章起到十二章止,我们将在坐标平面里用代数的方法来研究直线和曲线等几何问题.本章先讨论两点间的距离公式和直线的斜率,然后研究直线的方程,点、线间的位置关系,再介绍区域的概念,以及怎样用线性规划解决简单的实际问题.

§10-1　距离公式　斜率

一、两点间的距离公式

在初中,我们已学过在直角坐标平面内可以用一对有序实数来表示平面上一点的位置,这一对有序实数就称作这个点的**坐标**.下面我们导出平面上任意两点间的距离公式.

在直角坐标系中,已知两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$(图10-1),从 P_1,P_2 分别向 x 轴作垂线 P_1M_1 和 P_2M_2,垂足的坐标分别为 $M_1(x_1,0)$,$M_2(x_2,0)$.经过点 P_1 引平行于 x 轴的直线 P_1N 交 M_2P_2 于点 N,则得直角三角形 P_1P_2N.由勾股定理可得线段 P_1P_2 的长度,即 P_1,P_2 两点间的距离(记作 $|P_1P_2|$)公式.

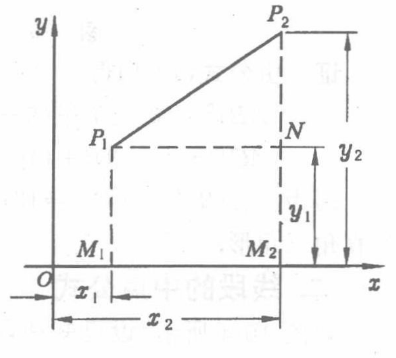


图　10-1

因为

$$|P_1P_2|^2=|P_1N|^2+|NP_2|^2, \tag{1}$$

其中

$$|P_1N|=|OM_2|-|OM_1|=x_2-x_1,$$
$$|NP_2|=|M_2P_2|-|M_2N|$$
$$=|M_2P_2|-|M_1P_1|=y_2-y_1,$$

将 $|P_1N|$ 和 $|NP_2|$ 的值代入(1)式,得

$$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

由此,得到两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离公式为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{10-1}$$

同样可以证明,如果 P_1,P_2 两点在任何其他同一象限或分别在两个象限时,公式(10-1)仍然成立.

如果 P_1 和 P_2 两点在 x 轴上或在平行于 x 轴的直线上,由于 $y_2=y_1$,所以由公式(10-1)可得

$$|P_1P_2|=|x_2-x_1|.$$

如果 P_1 和 P_2 两点在 y 轴上或在平行于 y 轴的直线上,由于 $x_2=x_1$,所以由公式(10-1)可

得

$$|P_1P_2|=|y_2-y_1|.$$

如果 P_1 和 P_2 两点中有一点是坐标原点 $O(0,0)$，设另一点为 $P(x,y)$，那末就得到点 $P(x,y)$到原点的距离公式为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{10-2}$$

例 1 求平面上两点 $A(1,2)$，$B(3,5)$之间的距离(图 10-2).

解 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{13}.$

例 2 证明以 $A(3,2)$，$B(6,5)$，$C(1,10)$为顶点的三角形是直角三角形(图 10-3).

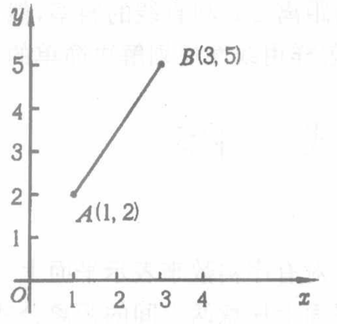


图 10-2

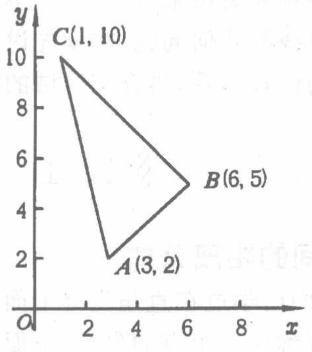


图 10-3

证 由公式(10-1)得

$$|AB|^2=(6-3)^2+(5-2)^2=18,|BC|^2=(1-6)^2+(10-5)^2=50,$$
$$|AC|^2=(1-3)^2+(10-2)^2=68.$$

因为 $|AB|^2+|BC|^2=18+50=68=|AC|^2$，所以由勾股定理的逆定理可以断定$\triangle ABC$为直角三角形.

二、线段的中点公式

如图 10-4 所示，设已知线段 P_1P_2 的两个端点分别是 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$，点 P 为线段 P_1P_2 的中点，下面来求点 P 的坐标(x,y).

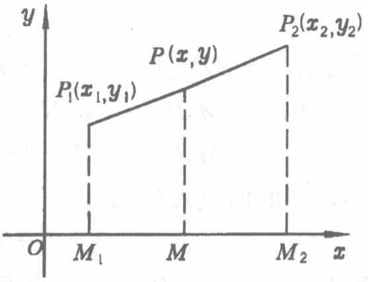


图 10-4

从 P_1,P,P_2 分别作 y 轴的平行线，交 x 轴于 M_1,M,M_2. 由图 10-4 可知

$$|M_1M|=|MM_2|,$$
$$|x-x_1|=|x_2-x|,$$

即
$$x-x_1=x_2-x,$$

从而
$$x=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

用类似上面的方法可得

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

因此，点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$之间所连线段的中点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{10-3}$$

公式(10-3)称为线段的**中点公式**.

可以证明公式(10-3)对于 P_1, P_2 两点在平面内任意位置都是成立的.

例 3　有一线段 AB，它的中点坐标是(4,2)，端点 A 的坐标是(−2,3)，求另一端点 B 的坐标.

解　设端点 B 的坐标为 (x,y)，由中点坐标公式可知

$$4=\frac{-2+x}{2},\quad 2=\frac{3+y}{2},$$

解之得　　$x=10, y=1$.

故端点 B 的坐标为(10,1).

例 4　已知三角形的顶点是 $A(0,0)$，$B(7,2)$，$C(-1,4)$，求此三角形两条中线 CE 和 AD 的长度(图 10-5).

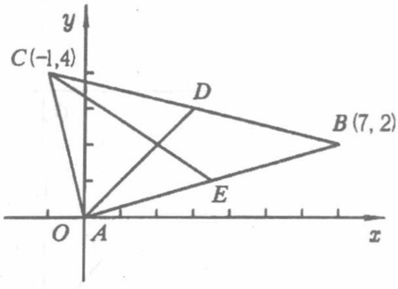


图　10-5

解　设 AB 的中点为 $E(x_1,y_1)$，BC 的中点为 $D(x_2,y_2)$. 由公式(10-3) 可得

中点 E 的坐标为

$$x_1=\frac{7+0}{2}=\frac{7}{2}, y_1=\frac{2+0}{2}=1;$$

中点 D 的坐标为

$$x_2=\frac{-1+7}{2}=3, y_2=\frac{4+2}{2}=3.$$

再根据公式(10-1)、(10-2)分别求得两条中线的长度分别为

$$|CE|=\sqrt{\left[\frac{7}{2}-(-1)\right]^2+(1-4)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{13};$$

$$|AD|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

三、直线的倾斜角和斜率

1. 直线的倾斜角

我们规定，直线 l 的向上方向与 x 轴的正向所成的最小正角称为直线 l 的**倾斜角**. 这个角就是 x 轴正向绕直线与 x 轴的交点依逆时针方向转到与直线第一次重合时所形成的角. 如图 10-6 中的角 α.

图　10-6

当直线与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0°；当直线与 y 轴平行或重合时，它的倾斜角为 90°. 任意一条直线的倾斜角 α 的取值范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$(或 $0 \leqslant \alpha < \pi$).

2. 直线的斜率

直线倾斜角 α 的正切，称为直线的**斜率**，通常记作 k，即

$$k=\mathrm{tg}\alpha \quad (0°\leqslant\alpha<180°,\alpha\neq 90°). \qquad (10\text{-}4)$$

根据直线的倾斜角的取值范围，直线的斜率可分为以下四种情形：

(1) 当 $\alpha=0°$(即直线平行于 x 轴或重合于 x 轴)时，$k=0$，如图 10-7(1)；

(2) 当 α 为锐角(即 $0°<\alpha<90°$)时，$k>0$，如图 10-7(2)；

(3) 当 α 为钝角(即 $90°<\alpha<180°$)时，$k<0$，如图 10-7(3)；

(4) 当 $\alpha=90°$(即直线平行于 y 轴或重合于 y 轴)时，k 不存在，如图 10-7(4).

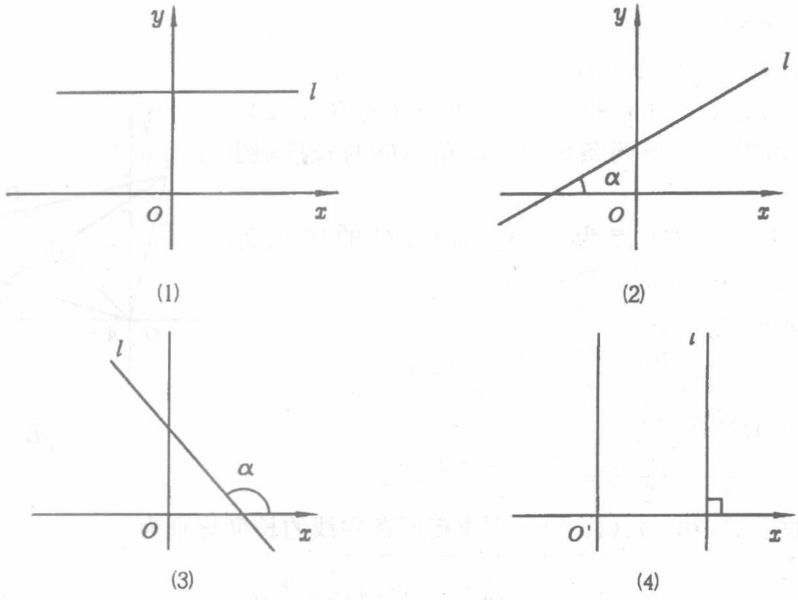


图 10-7

设直线经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，且直线的倾斜角 α 不等于 90°(即 $x_2\neq x_1$)，求经过这两点的直线的斜率.

如图 10-8 所示，从 P_1，P_2 两点分别向 x 轴作垂线 P_1M_1，P_2M_2，作 $P_1Q\perp P_2M_2$.

设已知直线的倾斜角 α 为锐角，由图 10-8 可知

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\angle P_2P_1Q\\&=\frac{|QP_2|}{|P_1Q|}=\frac{|M_2P_2|-|M_2Q|}{|OM_2|-|OM_1|}\\&=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.\end{aligned}$$

可以证明，当 α 为钝角时，以上结论也成立.

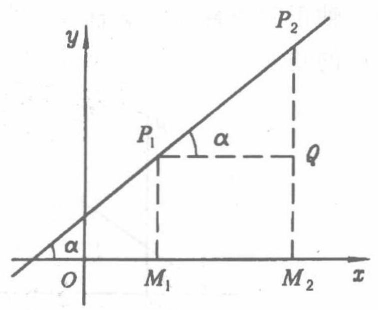


图 10-8

所以我们得到经过 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点的直线的**斜率公式**为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (x_2\neq x_1). \qquad (10\text{-}5)$$

若 $x_2=x_1$，则直线垂直于 x 轴，这时斜率不存在.

例 5 求经过$(-2,0)$，$(-5,3)$两点的直线的斜率和倾斜角.

解 根据公式(10-5)得

$$k=\frac{0-3}{-2-(-5)}=-1,$$

于是 $$\mathrm{tg}\alpha=-1,\quad \alpha=\frac{3\pi}{4},$$

所以，这条直线的斜率是-1，倾斜角是$\frac{3\pi}{4}$.

例 6 证明 $A(2,3)$，$B(1,-3)$，$C(3,9)$三点在一条直线上.

证 由已知条件可得 $k_{AB}=\frac{3-(-3)}{2-1}=6$，

$$k_{AC}=\frac{3-9}{2-3}=6.$$

由于直线 AB 和 AC 的斜率相等，而且它们经过同一点 A，因此 A，B，C 三点在一条直线上.

习　题　10-1

1. 求下列两点间的距离：

(1) $P_1(-1,0)$和$P_2(2,0)$；

(2) $P_1(0,6)$和$P_2(0,-2)$；

(3) $A(2,-5)$和$C(2,3)$.

2. 在 y 轴上有一点 P，它与点 $A(4,-6)$的距离是 5，求点 P 的坐标.

3. 已知点 $A(a,-5)$和 $B(0,10)$的距离是 17，求 a 的值.

4. 已知点 $P(x,2)$，$Q(-2,-3)$，$M(1,1)$，且$|PQ|=|PM|$，求 x.

5. 已知点 P 的横坐标是 7，点 P 到点 $N(-1,+5)$的距离等于 10，求点 P 的纵坐标.

6. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$，$B(-2,3)$，$C(0,-1)$，求三角形三条中线的长度.

7. 求连接下列两点的线段的长度和中点坐标：

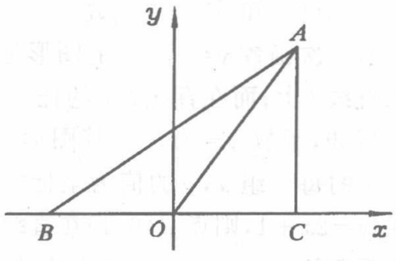
(1) $A(7,4)$，$B(3,2)$；

(2) $P_1(6,-4)$，$P_2(-2,-2)$；

(3) $M(3,1)$，$N(2,1)$.

8. 已知三点 $A(x,5)$，$B(-2,y)$，$C(1,1)$且点 C 平分线段 AB，求 x，y.

9. 已知两点 $A(3,-1)$，$B(2,1)$，求点 A 关于 B 的对称点的坐标.



第 10 题图

10. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AO 是 BC 边上的中线，求证：$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$.

11. 直线的倾斜角的大小有什么限制？斜率的大小有什么限制？是不是所有的直线都有倾斜角？是不是所有的直线都有斜率？

12. 已知下列各直线的倾斜角，求各直线的斜率：

(1) $\frac{\pi}{6}$；　(2) $45°$；　(3) $\frac{5\pi}{12}$；　(4) $\frac{3\pi}{4}$；　(5) $120°$.

13. 一直线通过$(-a,3)$和$(5,-a)$两点，且斜率等于 1，求 a 的值.

14. 求以下每两点所确定的直线的斜率和倾斜角：

(1) $(2,-2)$，$(4,2)$；

(2) $(1,1)$，$(5,-5)$；

(3) $(0,-4)$，$(-\sqrt{3},-5)$；

(4) $(-2,0),(-5,3)$.

15. 已知 a,b,c 是两两不等的实数,求经过下列每两个点的直线的倾斜角:

(1) $A(a,c),B(b,c)$;

(2) $C(a,b),D(a,c)$;

(3) $P(b,b+c),Q(a,c+a)$.

16. 设直线 AB 的倾斜角等于由 $C(2,-2),D(4,2)$ 两点所确定直线的倾斜角的 2 倍,求直线 AB 的斜率.

17. 设直线 AB 的倾斜角等于由 $C(3,-5),D(0,-9)$ 两点所确定的直线的倾斜角的一半,求直线 AB 的斜率.

18. 有一动点,从点 $A(-3,-2)$ 到 $B(4,5)$ 作直线运动,试求:

(1) 动点所经过的距离;

(2) 动点的轨迹的倾斜角 α.

19. 判断下列各题中所给的三点是否在同一条直线上:

(1) $A(2,3),B(1,-3),C(3,9)$;

(2) $A(2,1),B(3,-2),C(-4,-1)$;

(3) $A(a,b+c),B(b,c+a),C(c,a+b)$.

§10-2 直线方程

一、直线方程的概念

我们已经知道,一次函数 $y=kx+b$ 的图形是一条直线,并且它们之间具有如下关系:

若一次函数 $y=kx+b$ 的图形是直线 l,则以满足 $y=kx+b$ 的每一组 x,y 的值为坐标的点都在直线 l 上;而在直线 l 上的任一点,它的坐标也都满足 $y=kx+b$.

例如,函数 $y=2x+1$,其图形为直线 l(图 10-9),则以满足 $y=2x+1$ 的每一组 x,y 的值为坐标的点都在直线 l 上,如 $x=0,y=1$ 满足 $y=2x+1$,则点 $A(0,1)$ 在直线 l 上;而在直线 l 上的任一点,它的坐标都满足 $y=2x+1$,如点 B 在直线 l 上,则 $B(1,3)$ 点的坐标满足 $y=2x+1$.

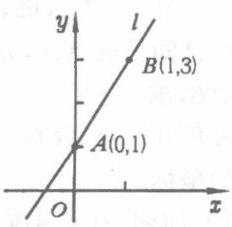


图 10-9

由于函数 $y=kx+b$ 也可以看成是含有 x,y 的二元一次方程 $kx-y+b=0$,所以满足 $y=kx+b$ 的每一组 x,y 的值,就是方程 $kx-y+b=0$ 的一组解,反之亦然.

一般地,若方程 $kx-y+b=0$ 与直线 l 之间具有下列对应关系:

(1) 以满足方程 $kx-y+b=0$ 的每一组解 x,y 为坐标的点都在直线 l 上;

(2) 在直线 l 上的任一点的坐标 (x,y) 都是方程 $kx-y+b=0$ 的解,

则把 $kx-y+b=0$ 称作直线 l 的方程,直线 l 称作这个方程的图象(或图形).

二、直线方程的几种形式

在建立了直角坐标系的平面上一条直线的位置,可以由不同的直线方程来确定.下面,我们来研究怎样根据给定的条件,建立直线方程.

1. 点斜式方程

已知 (1) 直线 l 的斜率为 k;(2) 直线 l 经过定点 $P_1(x_1,y_1)$,求直线 l 的方程.

设 $P(x,y)$ 为直线 l 上不与 P_1 重合的任意点(图 10-10). 因为 P_1P 的斜率等于直线 l 的斜率,根据公式(10-5)得

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k \qquad (x\neq x_1),$$

即
$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{10-6}$$

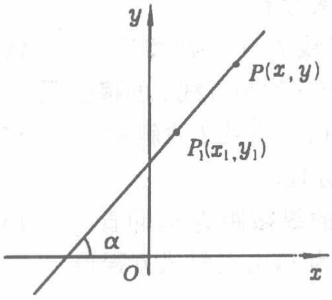


图 10-10

上式是由直线上的一个定点和直线的斜率确定的,所以称为直线的**点斜式方程**.

下面讨论经过点 $P_1(x_1,y_1)$ 且倾斜角为 0°或 90°时的直线 l 的方程.

(1) 直线 l 的倾斜角 α 为 0°(图 10-11).

这时,斜率 $k=\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}0°=0$,代入(10-6)式,得

$$y=y_1. \tag{10-7}$$

上式称为平行于 x 轴的直线方程.

特殊地,当 $y_1=0$ 时,得到 x 轴的方程为

$$y=0. \tag{10-8}$$

(2) 直线 l 的倾斜角为 90°(图 10-12).

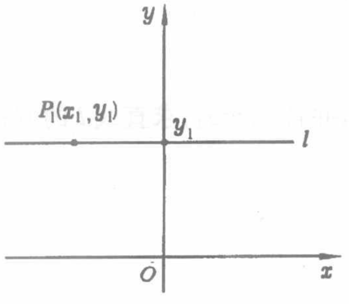


图 10-11

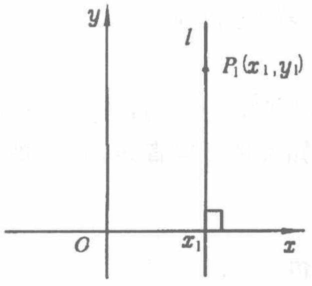


图 10-12

这时,斜率 k 不存在,因而直线 l 的方程不能用点斜式表示. 但 l 上每点的横坐标都等于 x_1,所以它的方程为

$$x=x_1. \tag{10-9}$$

上式称为平行于 y 轴的直线方程.

特殊地,当 $x_1=0$ 时,得到 y 轴的方程为

$$x=0. \tag{10-10}$$

例 1 已知一条直线经过 $P_1(-2,3)$,倾斜角 $\alpha=45°$,求这条直线的方程.

解 按所给条件有

$$x_1=-2, y_1=3, \quad k=\mathrm{tg}45°=1,$$

代入(10-6),得

$$x-y+5=0.$$

这就是所求的直线方程.

2. 斜截式方程

如果直线 l 与 x 轴相交于点 $A(a,0)$，与 y 轴相交于点 $B(0,b)$，那末 a 称为直线 l 的**横截距**，b 称为直线 l 的**纵截距**.

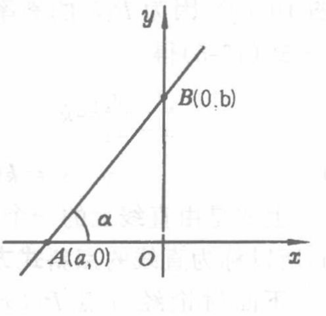


图 10-13

已知 (1) 直线 l 的斜率为 k；(2) 直线 l 的纵截距为 b，求直线 l 的方程.

因为 l 的纵截距为 b，即直线 l 过点 $B(0,b)$（图 10-13），又知它的斜率为 k，由点斜式方程得

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b. \qquad (10\text{-}11)$$

上式称为直线的**斜截式方程**.

例 2 求与 y 轴交于点 $B(0,-3)$，且倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线方程.

解 按所给条件，得

$$k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad b=-3.$$

代入斜截式方程，得

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-3,$$

化简得所求直线的方程为

$$\sqrt{3}x-3y-9=0.$$

例 3 已知直线 l 经过点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，并且 $x_2\neq x_1$，求直线 l 的方程.

解 由已知条件可得直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

由点斜式方程得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

上式即为所求直线 l 的方程.

例 4 直线 l 的横截距为 a，纵截距为 b，$(a\neq 0, b\neq 0)$，求直线 l 的方程.

解 因为直线 l 经过 $(a,0)$ 和 $(0,b)$ 两点，利用例 3 的结果得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

上式即为所求直线 l 的方程. 该方程称为**截距式方程**.

例 5 已知三角形的顶点为 $A(-5,0)$，$B(3,-3)$，$C(0,2)$，如图 10-14 所示. 求这个三角形的三边所在的直线的方程.

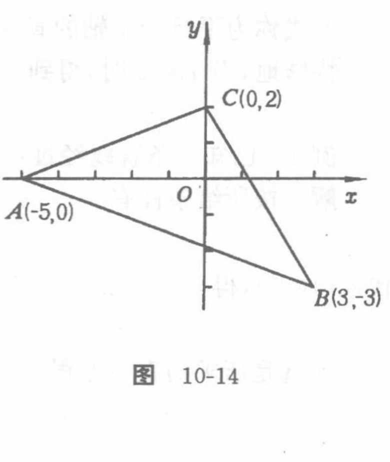


图 10-14

解 $k_{AB}=\frac{-3-0}{3-(-5)}=-\frac{3}{8}$，由点斜式方程得

$$y-0=-\frac{3}{8}(x+5),$$