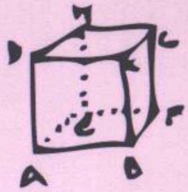
中吉联合

$a^2=b^2+c^2$

数学
人类智慧的源泉

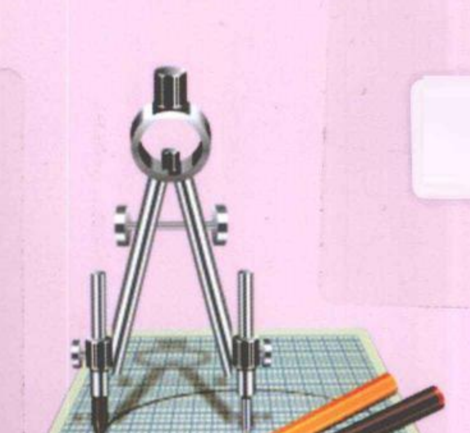


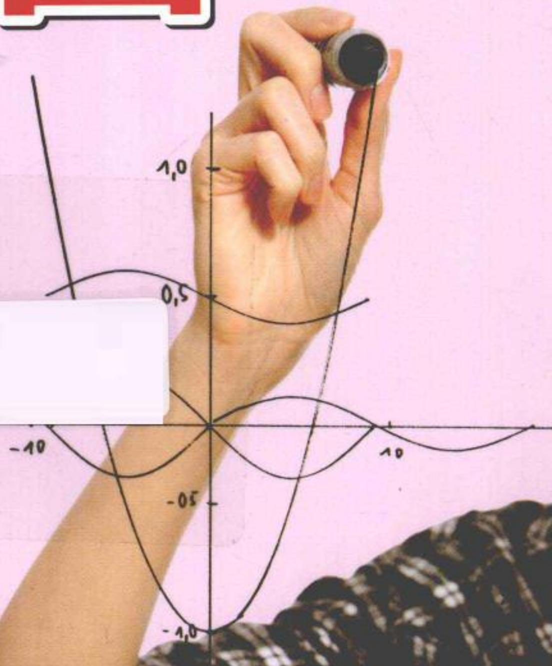
周阳◎编著

打开数学 智慧窗

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

DAKAISHUXUE
ZHIHUICHUANG





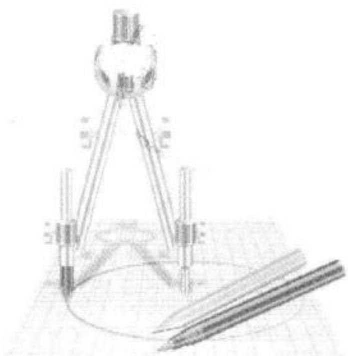
中国出版集团
现代出版社

数学
人类智慧的源泉

打开数学智慧窗

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

周阳◎编著



中国出版集团
现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

打开数学智慧窗／周阳编著.—北京：现代出版社，2012.12
（数学：人类智慧的源泉）
ISBN 978－7－5143－0922－5

Ⅰ.①打… Ⅱ.①周… Ⅲ.①数学－青年读物②数学－少年读物 Ⅳ.①O1－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 274983 号

打开数学智慧窗

编　　著	周　阳
责任编辑	张　晶
出版发行	现代出版社
地　　址	北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码	100011
电　　话	010－64267325　010－64245264（兼传真）
网　　址	www.xdcbs.com
电子信箱	xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷	北京市业和印务有限公司
开　　本	710mm×1000mm　1/16
印　　张	12
版　　次	2013 年 3 月第 1 版　2013 年 3 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－5143－0922－5
定　　价	29.80 元

前 言

数学解题的过程是一种探究答案的过程，也是一个研究的过程。它是从问题当中提取出信息，然后用我们学过的数学知识，寻求解决问题的合理途径。

有人形象地把解题过程比喻为乌鸦喝水：瓶子里有水，但瓶口太小，水面太低，于是聪明的乌鸦衔来石子，放入瓶中。随着石子的不断投入，水面就会慢慢上升，这样乌鸦也就喝到水了。解题实质上是一个寻找答案途径的过程，就好比是不断地向瓶里投入石子。当把要解决的问题转化成为已经学过的知识时，那么问题就迎刃而解了。

本书是一本专门针对趣味数学题的题解集，一是注重选择有趣的数学题；二是对趣题巧妙解读。体现了该书的知识性、趣味性和学术性。本书作为青少年的课外数学读物，紧紧把训练解题思路与扩大青少年朋友的数学知识面有机地结合起来，从而培养他们的数学意识以及运用数学知识解决实际问题的能力。全书通过介绍有关数学解题思路，展现数学的思想和思维特点，从中了解数学是怎样发现问题、解决问题的，对于青少年朋友的数学思维方式养成、增强数学审美意识具有重要的现实意义。

在现实生活中，有不少同学虽然喜欢解数学题，但只考虑答案对否，题目一旦获解，就会产生满足感，往往不愿意再回头看看解题的思路是否清晰，这种解法是否最佳，还可不可以改进等等，忽视了解题后的再思考，这是很可惜的事情。因为这样恰好错过了提高解题能力的机会，无异于空手寻宝空手归。

实际上，任何一道题的解法都不是唯一的，所以解题后需要认真总结，充分探讨，发现问题，改进思路，提高自己对题解的理解水平。

著名法国哲学家、数学家笛卡儿曾说过："数学是知识的工具，亦是其他知识工具的泉源。所有研究顺序和度量的科学均和数学有关。"真是一语道破天机，愿此语与喜爱数学的青少年朋友们共勉！

目 录

古老趣题智慧解

生活趣题智慧解

应该知道的数学知识

古老趣题智慧解

在人类进步的历史过程中，流传下许多饶有趣味的数学题。这些数学题的产生和解答，都是人类智慧的结晶，深深影响了一代又一代人。解答这些趣题的思路和数学思维模式的运用，对于我们成就智慧人生也至关重要。本章展示了古老数学的魅力，让我们在学习中感悟数学的真谛。

物知其数

原题叫“物不知其数”，出自1600年前我国古代数学名著《孙子算经》：“今有物不知其数，三三数之二，五五数之三，七七数之二，问物几何?”这道题的意思是：有一批物品，不知道有几件。如果三件三件地数，就会剩下两件；如果五件五件地数，就会剩下三件；如果七件七件地数，也会剩下两件。问：这批物品共有多少件?

简单地说就是：有一个数，用3除余2，用5除余3，用7除余2。求这个数。

解：设有物 x 个。由题意知

$x=3n+2=5m+3=7l+2$，其中 m，n，l 均为正整数。

由 $3n+2=7l+2$ 知：$3n=7l$，即 $\frac{n}{7}=\frac{l}{3}$，令 $\frac{n}{7}=\frac{l}{3}=t$，则 $n=7t$，$l=3t$，再代入 $3n+2=5m+3$ 中有

$m=\frac{21t+2-3}{5}=\frac{1}{5}$（$21t-1$）$=4t+\frac{1}{5}$（$t-1$），要使 m 为正整数，$t-1$

应是 5 的倍数，即 $t-1=5k$（k 为任意正整数或零）。从而得 $t=5k+1$，$n=35k+7$，$m=21k+4$，$l=15k+3$，$x=105k+23$（$k=0$，1，2，…）

可见此题有无穷多个解。特别地，取 $k=0$，得：$x=23$，显然它是满足题意的一个解。由于 $105=3\times5\times7$，就是说在 $x=23$ 的基础上，再增加 105 或 105 的整数倍 $105k$，所得的数都符合题目的要求。

我们还可以从另一个角度考虑解类似的问题。如果把原有的物中拿走 2 个，则“三三数不剩余，七七数不剩余”，于是这些物应是 3 和 7 的整倍数 $21P$（P 为正整数），特别地，取 $P=1$，则 $21+2=23$ 即为所求的一个解（显然它也符合“五五数剩三”的条件）。同样的道理，所有的解应为 $x=105k+23$（$k=0$，1，2，…）。

知识点

数　学

数学源自于古希腊语，是研究数量、结构、变化以及空间模型等概念的一门学科。透过抽象化和逻辑推理的使用，由计数、计算、量度和对物体形状及运动的观察中产生。

数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的逻辑推理及对完美境界的追求。它的基本要素是：逻辑和直观、分析和推理、共性和个性。

数学主要的学科首先产生于商业上计算的需要、了解数与数之间的关系、测量土地及预测天文事件。这 4 种需要大致地与数量、结构、空间及变化（即算术、代数、几何及分析）等数学上广泛的领域相关相连。

延伸阅读

世界数学发展史

数学，起源于人类早期的生产活动，为中国古代六艺之一，亦被古希腊学

者视为哲学之起点。数学的希腊语意思是“学问的基础”。

数学的演进大约可以看成是抽象化的持续发展，或是题材的延展。第一个被抽象化的概念大概是数字，其对两个苹果及两个橘子之间有某样相同事物的认知是人类思想的一大突破。除了认知到如何去数实际物质的数量，史前的人类亦了解如何去数抽象物质的数量，如时间上的日、季节和年。算术（加减乘除）也自然而然地产生了。古代的石碑亦证实了当时已有几何的知识。

更进一步则需要写作或其他可记录数字的系统，如符木或于印加帝国内用来储存数据的奇普。历史上曾有过许多且不同的记数系统。从历史时代的一开始，数学内的主要原理是为了做税务和贸易等相关计算，为了了解数字间的关系，为了测量土地，以及为了预测天文事件而形成的。这些需要可以简单地被概括为数学对数量、结构、空间及时间方面的研究。

到了16世纪，算术、初等代数以及三角学等初等数学已大体完备。17世纪变量概念的产生使人们开始研究变化中的量与量的相互关系和图形间的相互变换。在研究经典力学的过程中，微积分的方法被发明。随着自然科学和技术的进一步发展，为研究数学基础而产生的集合论和数理逻辑等也开始慢慢发展。

数学从古至今便一直不断地延展，且与科学有丰富的相互作用，并使两者都得到好处。数学在历史上有着许多的发现，并且直至今日还在不断的发现中。

巧解鸡兔同笼

鸡兔同笼是中国古代著名趣题之一。大约在1500年前，《孙子算经》中就记载了这个有趣的问题。书中是这样叙述的：“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”这4句话的意思是：有若干只鸡兔同在一个笼子里，从上面数，有35个头；从下面数，有94只脚。问笼中各有几只鸡和兔？

如果先假设它们全是鸡，于是根据鸡兔的总数就可以算出在假设下共有几只脚，把这样得到的脚数与题中给出的脚数相比较，看看差多少，每差2只脚就说明有1只兔，将所差的脚数除以2，就可以算出共有多少只兔。概括起来，解鸡兔同笼题的基本关系式是：兔数＝（实际脚数－每只鸡脚数×鸡兔总

鸡兔同笼

数）÷（每只兔子脚数－每只鸡脚数）。类似地，也可以假设全是兔子。我们也可以采用列方程的办法来求解。

先用假设法：假设全是鸡：2×35＝70（只）

比总脚数少的：94－70＝24（只）

兔：24÷（4－2）＝12（只）

鸡：35－12＝23（只）

用一元一次方程法解：设兔有 x 只，则鸡有（35－x）只。

$4x+2(35-x)=94$

$4x+70-2x=94$

$2x=24$

$x=12$（只）

$35-12=23$（只）

答：兔子有 12 只，鸡有 23 只。

用二元一次方程法解：设鸡有 x 只，兔有 y 只。

则 $x+y=35$

$2x+4y=94$

$(x+y=35)\times2=2x+2y=70$

$(2x+2y=70)-(2x+4y=94)=(2y=24)$

$y=12$

把 $y=12$ 代入（$x+y=35$）

$x+12=35$

$x=35-12=23$（只）。

答：兔子有 12 只，鸡有 23 只。

用二元一次方程组法解。设鸡有 x 只，兔有 y 只。则有

$$\begin{cases} x+y=35 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+4y=94 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

②－①×2　得

$2x+4y-2x-2y=94-70$

$2y=24 \qquad y=12$

将 $y=12$ 代入① 得

$x+12=35 \qquad x=23$

答：略。

知识点

方 程

含有未知数的等式叫方程，这是中学中的逻辑定义。其实，方程是表示两个数学式（如两个数、函数、量、运算）之间相等关系的一种等式，通常在两者之间有一等号“=”。方程不用按逆向思维思考，可直接列出等式并含有未知数。它具有多种形式，如一元一次方程、二元一次方程等。广泛应用于数学、物理等理科应用题的运算。

方程可分为一元一次方程、二元一次方程和一元二次方程等。

延伸阅读

数字是表示数的符号

数字是一种用来表示数的书写符号。它由0～9十个字母组成。数字不单单包括计数，还有丰富的哲学内涵。

1：可以看作是数字“1”，一根棍子，一个拐杖，一把竖立的枪，一支蜡烛，一维空间……

2：可以看作是数字“2”，一只木马，一个下跪着的人，一个陡坡，一个滑梯，一只鹅……

3：可以看作是数字“3”，一只耳朵，斗鸡眼，树杈，倒着的w……

4：可以看作是数字“4”，一个蹲着的人，小帆船，小红旗，小刀……

5：可以看作是数字“5”，大肚子，小屁股，音符……

6：可以看作是数字“6”，小蝌蚪，一个头和一只手臂露在外面的人……

7：可以看作是数字“7”，拐杖，小桌子，板凳，三岔路口，“丁”形物，镰刀……

8：可以看作是数字“8”，数学符号“∞”，花生，套环，雪人……

9：可以看作是数字“9”，一个靠着坐的人，小嫩芽……

0：可以看作是数字“0”，胖乎乎的人，圆形“〇”，鞋底，脚丫，二维空间，瘦子的脸，鸡蛋……

数字在复数范围内可以分实数和虚数，实数又可以划分有理数和无理数或分为整数和小数，任何有理数都可以化成分数形式。

鬼谷子考徒弟

鬼谷子，姓王名诩，一说为春秋时期卫国（今河南鹤壁市淇县）人；一说为战国时期卫国（今江西省贵溪市）人；但具体生卒时间不详，是“诸子百家”之一纵横家的鼻祖，主要著作有《鬼谷子》及《本经阴符七术》。

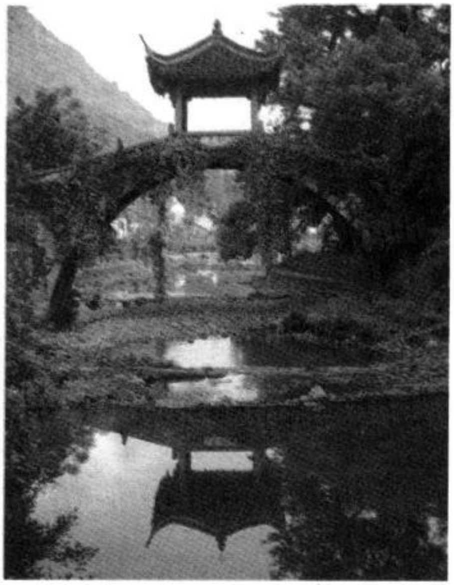
孙膑、庞涓都是鬼谷子的徒弟。鬼谷子想测试一下徒弟的机智与应变能力，他坐在屋里，跟徒弟庞涓、孙膑说：“谁把我从屋里动员到屋外，谁的成绩就及格”。

庞涓装作惊慌失措的样子跑进屋，说：“启禀师傅，元始天尊到，请您接驾。”鬼谷子无动于衷。庞涓第二次跑进来，连鞋都掉了一只，上气不接下气地说：“师傅，九天玄女来了，正在外面等您。”鬼谷子身子动了动，并没起来。庞涓不死心，第三次进来，一急一忙，一跤摔倒地下，结结巴巴地说：“不好啦，苏师弟跟张师弟打架，张师弟把苏师弟打死了！”鬼谷子站起来，看了看他，还是没出去。

轮到孙膑，孙膑一进来就说：“师傅，我不行。”鬼谷子感觉有些奇怪，孙膑说：“您老人家能知五百年过去、五百年未来，我怎么骗得了您?”鬼谷子听罢，有些飘飘然。孙膑接着说：“要是您老人家在屋外，我倒有办法把您骗进来。因为外面的事是有天数的，您可以算出来；而屋里的事，是没有天数的，您出去了就算不出来了。”鬼谷子不信，让人把自己连人带椅子抬到外面。孙

膑见师傅出来，大笑说："我已把师傅动员出来了，及格!"

通过上述简单的测试，鬼谷子明白，孙膑的才华远在庞涓之上。



还有一次，鬼谷子出了这样一道题。他从 2 到 99 中选出两个不同的整数，把积告诉孙膑，把和告诉庞涓。问这两个数分别是多少?

庞涓说：我虽然不能确定这两个数是多少，但是我肯定你也不知道这两个数是多少。

孙膑说：我本来的确不知道，但是听你这么一说，我现在能够确定这两个数字了。

庞涓说：既然你这么说，我现在也知道这两个数字是多少了。

解题思路 1：

假设数为 X，Y；和为 $X+Y=A$，积为 $X*Y=B$。

根据庞第一次所说的："我肯定你也不知道这两个数是多少。"由此知道，$X+Y$ 不是两个素数之和。那么 A 的可能 11，17，23，27，29，35，37，41，47，51，53，57，59，65，67，71，77，79，83，87，89，95，97。

我们再计算一下 B 的可能值：

和是 11 能得到的积：18，24，28，30

和是 17 能得到的积：30，42，52，60，66，70，72

和是 23 能得到的积：42，60…

和是 27 能得到的积：50，72…

和是 29 能得到的积：…

和是 35 能得到的积：66…

和是 37 能得到的积：70…

我们可以得出可能的 B 为…，当然了，有些数（如 $30=5*6=2*15$）出现不止一次。

这时，孙依据自己的数比较计算后说："我现在能够确定这两个数字了。"

我们依据这句话，和我们算出来的 B 的集合，我们又可以把计算出来的 B 的集合删除一些重复数。

和是 11 能得到的积：18，24，28

和是 17 能得到的积：52

和是 23 能得到的积：42，76…

和是 27 能得到的积：50，92…

和是 29 能得到的积：54，78…

和是 35 能得到的积：96，124…

和是 37 能得到的积：…

因为庞说："既然你这么说，我现在也知道这两个数字是什么了。"那么由和得出的积也必须是唯一的，由上面知道只有一行是剩下一个数的，那就是和 17 积 52。那么 X 和 Y 分别是 4 和 13。

解题思路 2：

说话依次编号为 $S1$，$P1$，$S2$。

设这两个数为 x，y，和为 s，积为 p。

由 $S1$，P 不知道这两个数，所以 s 不可能是两个质数相加得来的，而且 $s\leqslant 41$，因为如果 $s>41$，那么 P 拿到 $41\times(s-41)$ 必定可以猜出 s 了（关于这一点，可试作证明，这一点很巧妙，可以省不少事情）。所以和 s 为 {11，17，23，27，29，35，37，41} 之一，设这个集合为 A。

（1）假设和是 11。$11=2+9=3+8=4+7=5+6$，如果 P 拿到 18，$18=3\times6=2\times9$，只有 $2+9$ 落在集合 A 中，所以 P 可以说出 $P1$，但是这时候 S 能不能说出 $S2$ 呢？我们来看，如果 P 拿到 24，$24=6\times4=3\times8=2\times12$，$P$ 同样可以说 $P1$，因为至少有两种情况 P 都可以说出 $P1$，所以 A 就无法断言 $S2$，所以和不是 11。

（2）假设和是 17。$17=2+15=3+14=4+13=5+12=6+11=7+10=8+9$，很明显，由于 P 拿到 4×13 可以断言 $P1$，而其他情况，P 都无法断言 $P1$，所以和是 17。

（3）假设和是 23。$23=2+21=3+20=4+19=5+18=6+17=7+16=8+15=9+14=10+13=11+12$，咱们先考虑含有 2 的 n 次幂或者含有大质数

的那些组，如果 P 拿到 4×19 或 7×16 都可以断言 $P1$，所以和不是 23。

（4）假设和是 27。如果 P 拿到 8×19 或 4×23 都可以断言 $P1$，所以和不是 27。

（5）假设和是 29。如果 P 拿到 13×16 或 7×22 都可以断言 $P1$，所以和不是 29。

（6）假设和是 35。如果 P 拿到 16×19 或 4×31 都可以断言 $P1$，所以和不是 35。

（7）假设和是 37。如果 P 拿到 8×29 或 11×26 都可以断言 $P1$，所以和不是 37。

（8）假设和是 41。如果 B 拿到 4×37 或 8×33，都可以断言 $P1$，所以和不是 41。

综上所述：这两个数是 4 和 13。

知识点

质　数

质数又称素数。指在一个大于 1 的自然数中，除了 1 和此整数自身外，没法被其他自然数整除的数。换句话说，只有两个正因数（1 和自己）的自然数即为素数。比 1 大但不是素数的数称为合数。1 和 0 既非素数也非合数。合数是由若干个质数相乘而得到的。

所以，质数是合数的基础，没有质数就没有合数。这也说明了前面所提到的质数在数论中有着重要地位。历史上曾将 1 也包含在质数之内，但后来为了算术基本定理，最终 1 被数学家排除在质数之外。

延伸阅读

数学与钱币

古今中外的钱币多种多样，与钱币有关的数学更是丰富多彩，趣味无穷。