中吉联合

$a^2=b^2+c^2$

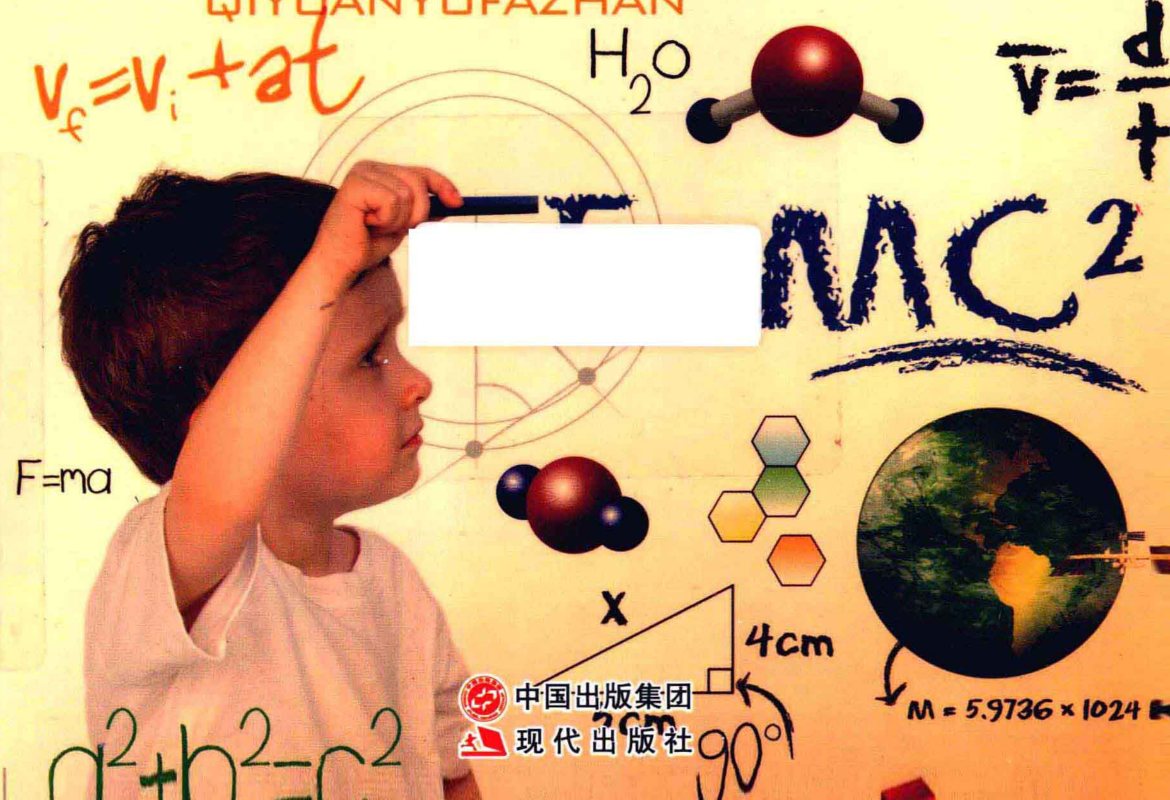
数学
人类智慧的源泉

周阳◎编著

数学的起源与发展

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

SHUXUEDE QIYUANYUFAZHAN



中国出版集团
现代出版社

数学
人类智慧的源泉

数学的
起源与发展

RENLEIZHIHUIDEYUANQUAN

周阳◎编著

中国出版集团
现代出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学的起源与发展 / 周阳编著 . —北京：现代出版社，2012. 12

ISBN 978 - 7 - 5143 - 0919 - 5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①数学史 - 普及读物 Ⅳ. ①O11 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 275096 号

数学的起源与发展

编　　著	周　阳
责任编辑	李　鹏
出版发行	现代出版社
地　　址	北京市安定门外安华里 504 号
邮政编码	100011
电　　话	010 - 64267325　010 - 64245264（兼传真）
网　　址	www. xdcbs. com
电子信箱	xiandai@ cnpitc. com. cn
印　　刷	北京市业和印务有限公司
开　　本	710mm × 1000mm　1/16
印　　张	12
版　　次	2013 年 3 月第 1 版　2013 年 3 月第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978 - 7 - 5143 - 0919 - 5
定　　价	29. 80 元

前 言

数学，是起源于用来记数的自然数的伟大发明。人类的祖先为了生存，往往几十人在一起，过着群居的生活。在长期的共同劳动和生活中，他们开始用简单的语言夹杂手势，来表达感情和交流思想。随着劳动内容的发展，他们的语言包含了算术的色彩，于是产生了“数”的朦胧概念。他们狩猎而归，猎物或有或无，于是有了“有”与“无”两个概念。后来，群居发展为部落。部落由一些成员很少的家庭组成。所谓“有”，就分为“一”、“二”、“三”、“多”等。

公元前1500年，南美洲秘鲁印加族习惯于“结绳记数”——每收进一捆庄稼，就在绳子上打个结，用结的多少来记录收成。“结”与痕有一样的作用，也是用来表示自然数的。根据我国古书《易经》的记载，上古时期的中国人也是“结绳而治”，就是用在绳上打结的办法来记事表数。后来又改为“书契”，即用刀在竹片或木头上刻痕记数。

而一切自然科学的基础——数学，顾名思义，是研究数的科学。数自然而然成为数学最原始的、最基本的研究对象。正如大数学家克洛耐克所言，“上帝创造了自然数，其他一切都是人造的”。文明开始于计数，而数又是世界通向繁荣进步之路。数的概念是人类经过成千上万年才获得的抽象概念。但是同是1、2、3、4……不同的民族却有不同的称呼和记号，长期以来并没有统一的迹象。

因此，当你跨过国界，又不通晓当地语言文字时，其困难处境可想而知。在这种情况下，你所能认识的，你所能依靠的，你所能求助的，恐怕只有10个印度—阿拉伯数码1、2、3、4、5、6、7、8、9、0，以及由它们组成的千

千万万种数字和符号，这是世界上唯一通用的语言，尽管数字的读法仍然还不能统一，但是电话号码和地址上的数码却是一致的。

在我们走向信息社会的转折关头，数不仅是人和人交流的通用语言，而且更是人与机器交流的通用语言。至今计算机还很难懂得自然语言，你要让它工作，给它指令，那就必须运用它所能理解的机器语言，它也是由数字和字母表示的一串符号，最后甚至转变成只有 0 和 1 的一串数列，机器的一切操作都是在它们的通用语言——数串指导下进行的。因此，把信息翻译成数码，是自动化的一个关键问题，信息社会的主要技术就是数字化。

借助于数字化，我们可以在计算机上实现各种自然界存在的和看不到的美丽的图形。当前热门的浑沌理论，其千奇百怪的图形大都是在屏幕上显示的，这就是数字显示，声音虽然可以借助电流直接传送，但是数字化之后，更精确更抗干扰，这就是数字通信。当用计算机自动控制切削工具或量体裁衣，数字化帮助你更精密地控制，这就是数字控制。

数是人和机器通用的语言，它不仅能够使大家相互理解，也使一切活动更为精密和准确，这就是数的威力。

目 录

各种数的含义与特点

各种数的关系与理论

数海采奇拾趣

数字中的谜团

世界难题求解之旅

各种数的含义与特点

人类祖先最开始创造的是自然数1、2、3等，随着生产生活的需要，人类对数的需求越来越多，名目也越来越复杂，一开始为熟悉的自然数及整数与被描述在算术内的自然数及整数的算术运算。当数系更进一步发展时，整数被承认为有理数的子集，而有理数则包含于实数中，实数则可以被进一步广义化成复数。

在数学发展的漫长历史中，各种数不断涌现：无理数、虚数、分数、函数、浮点数……同时也出现了许多奇妙有趣的数，比如亲和数、T形数、圣经数、对答数、自守数……

实　数

实数可以用来测量连续的量。理论上，任何实数都可以用无限小数的方式表示，小数点的右边是一个无穷的数列（可以是循环的，也可以是非循环的）。在实际运用中，实数经常被近似成一个有限小数（保留小数点后 n 位，n 为正整数）。在计算机领域，由于计算机只能存储有限的小数位数，实数经常用浮点数来表示。

埃及人早在大约公元前1 000年就开始运用分数了。在公元前500年左右，以毕达哥拉斯为首的希腊数学家们意识到了无理数存在的必要性。印度人于公元600年左右发明了负数，据说中国也曾发明负数，但稍晚于印度。

直到17世纪，实数才在欧洲被广泛接受。18世纪，微积分学在实数的基础上发展起来。直到1871年，德国数学家康托第一次提出了实数的严格定义。数学上，实数直观地定义为和数轴上的点一一对应的数。本来实数仅称作数，

后来引入了虚数概念，原本的数就被称作“实数”——意义是“实在的数”。

在日常生活中，人们不仅要对单个的对象计数，有时还需要度量各种量。为了满足度量的需要，就要用到分数，例如长度，就很少正好是单位长的整数倍。于是，定义有理数为两个整数的商 q/p（$p\neq0$）。

有理数有下面这样一个简单的几何解释：在一条水平直线上标出不同的两个点 O 和 I，选定线段 OI 作为单位长。如果用 O 和 I 分别表示 0 和 1，则可以用这条直线上间隔为单位长的点的集合来表示正整数和负整数（正整数在 0 的右边，负整数在 0 的左边）。以 p 为分母的分数可以用每一单位间隔分成 p 等分的点表示。于是，每一个有理数都对应着直线上的一个点。

无理数指无限不循环的数，或不能表示为整数之比的实数。若将它写成小数形式，小数点之后的数字有无限多个，并且不会循环。常见的无理数有大部分的平方根、π 和 e（其中后两者同时为超越数）等。最先发现的无理数是$\sqrt{2}$，它不像自然数与负数那样。在实际生活中遇到，它是在数学计算中被发现的。

远在公元前 500 年左右，古希腊毕达哥拉斯学派的成员认为：“万物皆整数”，宇宙的一切现象都能归结为整数及整数的比。有一个名叫希帕索斯的学生发现正方形对角线与其一边之比不能用两个整数来表达。

这与毕达哥拉斯学派的信条有了矛盾。希帕索斯所用的归谬法成功地证明了它不能用整数及整数之比表示。而毕达哥拉斯学派的许多人都否定这个动摇他们观念的数的存在。这一发现，导致了数学史上的第一次“数学危机”。而希帕索斯本人因违背毕达哥拉斯学派的信念而被抛入大海。

希帕索斯

第一次数学危机表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及比来表示。反之，数却可以由几何量表示。因此古希腊的数学观念受到极大的冲击。从此以后，几何学开始在古希腊迅速发展。希腊人认识到，直觉和经验不一定靠得住，而可靠的只有推理论证。于是，他们开始从公理出发，经过演绎推理，建立了几何学体系。

知识点

微 积 分

微积分是高等数学中研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支。它是数学的一个基础学科。内容主要包括极限、微分学、积分学及其应用。微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论。它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行讨论。积分学，包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供一套通用的方法。

17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，牛顿和莱布尼茨分别在自己的国度里独自研究和完成了微积分的创立工作，虽然这只是十分初步的工作。他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题，一个是求积问题。

延伸阅读

自 然 数

自然数是在人类的生产和生活实践中逐渐产生的。人类认识自然数的过程是相当长的。在远古时代，人类在捕鱼、狩猎和采集果实的劳动中产生了计数的需要。起初人们用手指、绳结、刻痕、石子或木棒等实物来计数。例如：表示捕获了 3 只羊，就伸出 3 个手指；用 5 个小石子表示捕捞了 5 条鱼；一些人外出捕猎，出去 1 天，家里的人就在绳子上打 1 个结，用绳结的个数来表示外出的天数。这样经过较长时间，随着生产和交换的不断增多以及语言的发展，渐渐地把数从具体事物中抽象出来，先有数目 1，以后逐次加 1，得到 2、3、4……这样逐渐产生和形成了自然数。值得一提的是，长期以来认为 0 不是自然数，现行九年义务教材认为 0 是自然数。

虚　数

在数学里，将平方是负数的数定义为纯虚数。所有的虚数都是复数。这种数有一个专门的符号“i”(imaginary)，它称为虚数单位。定义为 $i^2=-1$。但是虚数是没有算术根这一说的，所以 $\pm\sqrt{(-1)}=\pm i$。对于 $z=a+bi$，也可以表示为 e 的 iA 次方的形式，其中 e 是常数，i 为虚数单位，A 为虚数的幅角，即可表示为 $z=e^{iA}=\cos A+i\sin A$。实数和虚数组成的一对数在复数范围内看成一个数，起名为复数。虚数没有正负可言，即使是纯虚数，也不能比较大小。

要追溯虚数出现的轨迹，就要联系与它相对实数的出现过程。我们知道，实数是与虚数相对应的，它包括有理数和无理数，也就是说它是实实在在存在的数。

有理数出现得非常早，它是伴随人们的生产实践而产生的。

无理数的发现，应该归功于古希腊毕达哥拉斯学派。无理数的出现，与德谟克利特的“原子论”发生矛盾。根据这一理论，任何两个线段的比，不过是它们所含原子数目的比。而勾股定理却说明了存在着不可通约的线段。

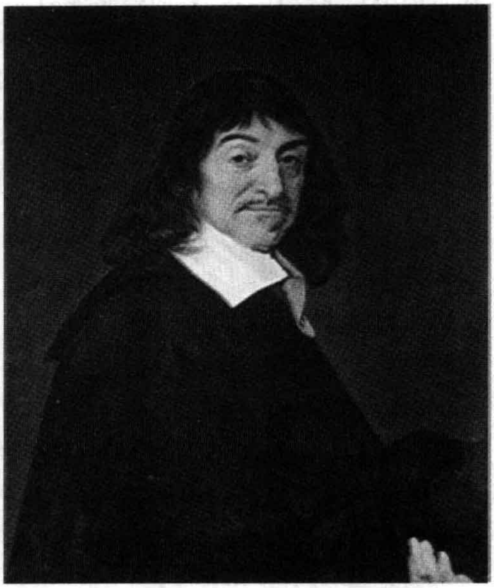
不可通约线段的存在，使古希腊的数学家感到左右为难，因为他们的学说中只有整数和分数的概念，他们不能完全表示正方形对角线与边长的比，也就是说，在他们那里，正方形对角线与边长的比不能用任何“数”来表示。实际上他们已经发现了无理数这个问题，但是却又让它从自己的身边悄悄溜走了，甚至到了希腊最伟大的代数学家丢番图那里，方程的无理数解仍然被称为是“不可能的”。

“虚数”这个名词是 17 世纪著名数学家、哲学家笛卡儿创制的，因为当时的观念认为这是确实不存在的数字。后来发现虚数可对应平面上的纵轴，与对应平面上横轴的实数同样真实。

人们发现即使使用全部的有理数和无理数，也不能解决全部代数方程的求解问题。像 $x^2+1=0$ 这样最简单的二次方程，在实数范围内没有解。12 世纪的印度大数学家婆什伽罗都认为这个方程是没有解的。他认为正数的平方是正数，负数的平方也是正数，因此，一个正数的平方根是两重的；一个正数和一个负数，负数没有平方根，因此负数不是平方数。这等于不承认负数的平方

根的存在。

到了 16 世纪，意大利数学家卡尔达诺在其著作《大术》（《数学大典》）中，把虚数记为 1545R15－15m，这是最早的虚数记号。但他认为这仅仅是个形式表示而已。1637 年法国数学家笛卡儿，在其《几何学》中第一次给出“虚数”的名称，并和“实数”相对应。



笛 卡 儿

1545 年意大利米兰的卡尔达诺发表了文艺复兴时期最重要的一部代数学著作，提出了一种求解一般三次方程的求解公式：

形如：$x^3+ax+b=0$ 的三次方程解如下：$x=\{(-b/2)+[(b^2)/4+(a^3)/27]^{(1/2)}\}^{(1/3)}+\{(-b/2)-[(b^2)/4+(a^3)/27]^{(1/2)}\}^{(1/3)}$

当卡尔达诺试图用该公式解方程 $x^3-15x-4=0$ 时他的解是：$x=[2+(-121)^{(1/2)}]^{(1/3)}+[2-(-121)^{(1/2)}]^{(1/3)}$

在那个年代负数本身就是令人怀疑的，负数的平方根就更加荒谬了。因此卡尔达诺的公式给出 $x=(2+\mathrm{j})+(2-\mathrm{j})=4$。容易证明 $x=4$ 确实是原方程的根，但卡尔达诺不曾热心解释 $(-121)^{(1/2)}$ 的出现。认为是“不可捉摸而无用的东西”。

直到 19 世纪初，高斯系统地使用了 i 这个符号，并主张用数偶 (a, b) 来表示 $a+b\mathrm{i}$，称为复数，虚数才逐步得以通行。

由于虚数闯进数的领域时，人们对它的实际用处一无所知，在实际生活中似乎没有用复数来表达的量，因此在很长一段时间里，人们对它产生过种种怀疑和误解。笛卡儿称“虚数”的本意就是指它是虚假的；莱布尼茨则认为：“虚数是美妙而奇异的神灵隐蔽所，它几乎是既存在又不存在的两栖物。”欧拉尽管在许多地方用了虚数，但又说：“一切形如 $\sqrt{-1}$、$\sqrt{-2}$ 的数学式子都是不可能有的，是想象的数，因为它们所表示的是负数的平方根。对于这类数，我们只能断言，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比

什么都不是少些什么，它们纯属虚幻。”

继欧拉之后，挪威测量学家维塞尔提出把复数（$a+b\mathrm{i}$）用平面上的点来表示。后来高斯又提出了复平面的概念，终于使复数有了立足之地，也为复数的应用开辟了道路。现在，复数一般用来表示向量（有方向的量），这在水利学、地图学、航空学中的应用十分广泛，虚数越来越显示出其丰富的内容。

知识点

浮点数

浮点数是属于有理数中某特定子集的数的数字表示，在计算机中用以近似表示任意某个实数。具体地说，这个实数由一个整数或定点数（即尾数）乘以某个基数（计算机中通常是2）的整数次幂得到，这种表示方法类似于基数为10的科学记数法。

浮点数参与的运算，称为浮点计算，这种运算通常伴随着因为无法精确表示而进行的近似或舍入。

一个浮点数 a 由两个数 m 和 e 来表示：$a=m\times b^{e}$。在任意一个这样的系统中，我们选择一个基数 b（记数系统的基）和精度 p（即使用多少位来存储）。m（即尾数）是形如 $\pm d.ddd\cdots\cdots ddd$ 的 p 位数（每一位是一个介于 0 到 $b-1$ 之间的整数，包括 0 和 $b-1$）。如果 m 的第一位是非 0 整数，m 称作规格化的。有一些描述使用一个单独的符号位（s 代表＋或者－）来表示正负，这样 m 必须是正的。e 是指数。

延伸阅读

亲和数

亲和数又叫友好数，它指的是这样的两个自然数，其中每个数的真因子和等于另一个数。毕达哥拉斯是公元前 6 世纪的古希腊数学家。据说曾有人问他：“朋友是什么？”他回答：“就是第二个我，正如 220 与 284。”为什么他把朋友比喻成两个数字呢？原来 220 的真因子是 1、2、4、5、10、11、20、22、44、55 和 110，加起来得 284；而 284 的真因子是 1、2、4、71、142，加起来

恰好是 220。284 和 220 就是友好数。它们是人类最早发现的又是所有友好数中最小的一对。

第二对亲和数（17 296，18 416）是在两千多年后的 1636 年才发现的。之后，人类不断发现新的亲和数。1747 年，欧拉已知道 30 对。1750 年又增加到 50 对。到现在科学家已经发现了 900 对以上这样的亲和数。令人惊讶的是，第二对最小的友好数（1 184，1 210）直到 19 世纪后期才被一个 16 岁的意大利男孩儿发现。

人们还研究了亲和数链：这是一个连串自然数，其中每一个数的真因子之和都等于下一个数，最后一个数的真因子之和等于第一个数。如 12 496、14 288、15 472、14 536、14 264。有一个这样的链竟然包含了 28 个数。

素　数

素数是只能被 1 和它本身整除的自然数，如 2、3、5、7、11 等等，也称为质数。如果一个自然数不仅能被 1 和它本身整除，还能被别的自然数整除，就叫合数。1 既不是素数，也不是合数。全体自然数可以分为三类：1、素数、合数。而每个合数都可以表示成一些素数的乘积，因此素数可以说是构成整个自然数大厦的砖瓦。

许多素数具有迷人的形式和性质。例如：

逆素数：顺着读与逆着读都是素数的数。如 1 949 与 9 491，3 011 与 1 103，1 453 与 3 541 等。无重逆素数，是数字都不重复的逆素数。如 13 与 31，17 与 71，37 与 73，79 与 97，107 与 701 等。

循环下降素数与循环上升素数：按 1～9 这 9 个数码反序或正序相连而成的素数（9 和 1 相接）。如：43、1 987、76 543、23、23 456 789、1 234 567 891。现在找到最大一个是 28 位的数：1 234 567 891 234 567 891 234 567 891。

由一些特殊的数码组成的数：如 31、331、3 331、33 331、333 331、3 333 331 以及 33 333 331 都是素数，但下一个 333 333 331＝17×19 607 843 却是一个合数。

素数研究是数论中最古老、也是最基本的部分，其中集中了看上去极简单，却几十年甚至几百年都难以解决的大量问题。

在小学的算术里，我们知道：能被 2 整除的数叫作偶数，通常也叫作双数；不能被 2 整除的数叫作奇数，通常也叫作单数。0 是奇数，还是偶数呢？在那个

时候，我们讨论奇偶数，一般是指自然数范围以内的。0 不是自然数，所以没有谈。那么这个问题能不能研究呢？我们的回答是：能够研究，而且应该研究。不但应该研究在算术里学过的这个唯一的不是自然数的整数 0，而且在中学学过代数以后，也还应该把奇偶数的概念扩大到负整数。判断的标准也很简单，凡是能被 2 整除的是偶数，不能被 2 整除的是奇数。所谓整除就是说商数应该是整数，而且没有余数。显然，因为 0 与除以任何数商数是整数 0，所以 0 是偶数。同样，在整数里，－2、－4、－6、－8、－10、－360、－2 578 等等，都是偶数；而－1、－3、－5、－7、－249、－1 683 等等，都是奇数。

质数的个数是无穷的。最经典的证明由欧几里得在他的《几何原本》中就有记载。它使用了现在证明常用的方法：反证法。具体的证明如下：假设质数只有有限的 n 个，从小到大依次排列为 p_1，p_2，……，p_n，设 $x=(p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots\cdots \cdot p_n)+1$，如果 x 是合数，那么它被从 p_1，p_2，……，p_n 中的任何一个质数整除都会余 1，那么能够整除 x 的质数一定是大于 p_n 的质数，和 p_n 是最大的质数前提矛盾，而如果说 x 是质数，因为 $x>p_n$，仍然和 p_n 是最大的质数前提矛盾。因此说如果质数是有限个，那么一定可以证明存在另一个更大的质数在原来假设的质数范围之外，所以说质数的个数无限。

被称为“17 世纪最伟大的法国数学家”的费马，也研究过质数的性质。他发现，设 $F_n=2^{(2^n)}+1$，则当 n 分别等于 0、1、2、3、4 时，F_n 分别给出 3、5、17、257、65 537，都是质数，由于 F_5 太大（$F_5=4\ 294\ 967\ 297$），他没有再往下检测就直接猜测：对于一切自然数，F_n 都是质数。这便是费马数。但是，就是在 F_5 上出了问题！费马死后 67 年，25 岁的瑞士数学家欧拉证明：

$F_5=4\ 294\ 967\ 297=641\times 6\ 700\ 417$，它并非质数，而是一个合数！

更加有趣的是，以后的 F_n 值，数学家再也没有找到哪个 F_n 值是质数，全部都是合数。目前由于平方开得较大，因而能够证明的也很少。现在数学家们取得 F_n 的最大值为：$n=1\ 495$。这可是个超级天文数字，其位数多达 $10^{10\ 584}$ 位，当然它尽管非常之大，但也不是个质数。

知识点

欧几里得

欧几里得（约前 330～前 275），古希腊数学家，被称为“几何之父”。他活跃于托勒密一世（前 323～前 283）时期的亚历山大里亚，他最著名的

著作《几何原本》是欧洲数学的基础。《几何原本》是一部集前人思想和欧几里得个人创造性于一体的不朽之作。传到今天的欧几里得著作并不多，然而我们却可以从这部书详细的写作笔调中，看出他真实的思想底蕴。全书共分13卷。书中包含了5条公理、5条公设、23个定义和467个命题。在每一卷内容当中，欧几里得都采用了与前人完全不同的叙述方式，即先提出公理、公设和定义，然后再由简到繁地证明它们。

延伸阅读

阿列夫3

阿列夫原是一个希伯来字母，它的写法很特殊，有时候就近似地写为S\S，当我们在考虑无穷大数时就用希伯来字母（或用S\S）来表示。这比用∞（通常以此表示无穷大）来表示有更大的好处，因为∞无法分出无穷大的级别，而S\S可以分出无穷大的级别。

无穷大也有级别之分，小的无穷大遇到大的无穷大，真好比是“小巫见大巫”。

我们用S\S$_0$表示最小的无限集合，这里面包含有所有自然数的数目，所有整数的数目，所有分数的数目；又用S\S$_1$表示稍为高一级的无限集合，那就是所有实数的数目，所有虚数的数目，所有复数的数目，所有四元数的数目；再用S\S$_2$表示我们尚未介绍的另一类的无限集合，那就是所有几何曲线的数目。因为每条几何曲线都是在空间中的，而且不同的几何曲线都有不同的规律，因此这千变万化的几何曲线的数目的总和就必然是高一级的无限集合，记作S\S$_2$。既然有阿列夫0（S\S$_0$）、阿列夫1（S\S$_1$）和阿列夫2（S\S$_2$），会不会还有阿列夫3（S\S$_3$）、阿列夫4（S\S$_4$）等等？

到目前为止，还没有人想得出（当然更没有发现）一种能用S\S$_3$（即阿列夫3）来表示的无穷大数。当然，阿列夫4、阿列夫5更高级的无穷大数就更渺茫了。或许这与人类对大自然的认识程度有关。