普通高等教育规划教材

偏微分方程数值解法（土建类）

樊洪明　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

偏微分方程数值解法

（土建类）

樊洪明　编著

机械工业出版社

本书系统地阐述了偏微分方程数值解法的理论基础及其在土建类专业中的应用。全书分有限差分法、变分法与加权余量法、有限元法以及有限体积法四章。本书起点较低，并不一味追求数学的严密性和逻辑性，而是尽量为读者提供偏微分方程数值解法的有关基本概念、基本原理和解决实际问题的方法与步骤，层次清晰，深入浅出，便于自学。

本书可作为高等学校工科相关专业的本科教材，也可供工科专业研究生、教师和广大科技人员参考。

本书配有电子课件，免费提供给选用本书的授课教师，需要者请根据书末的“信息反馈表”索取。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法：土建类/樊洪明编著.—北京：机械工业出版社，2013.11

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-44528-9

Ⅰ.①偏… Ⅱ.①樊… Ⅲ.①偏微分方程-数值计算-高等学校-教材 Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第251668号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：刘 涛 责任编辑：刘 涛 陈崇昱
版式设计：常天培 责任校对：姜艳丽
封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2014年1月第1版第1次印刷
169mm×239mm·19印张·391千字
标准书号：ISBN 978-7-111-44528-9
定价：36.00元

前 言

土建类工程问题的解决与偏微分方程求解密切相关，从数学物理方法的角度看，如果我们对问题的物理本质了解得很清楚，而且能够用精确的数学模型来表达，也就是定解问题已确定，接下来就是如何求解定解条件下的偏微分方程。线性数学物理问题求解的解析法，仅适用于数量有限的经典问题，以及几何形状简单、边界条件不复杂的情况。解析法的求解过程物理概念清楚，结论简明清晰，便于对物理现象分析研究，特别是给后续运算带来很大便利。在正交曲线坐标系下，可以通过分离变量，利用某些正交曲线坐标系和与之对应的特殊函数来构造偏微分方程的无穷级数解。通常，对于正交边界的数学物理问题可以通过傅里叶－刘维尔(Fourier-Liouville)展开来确定上述无穷级数解中的级数项系数。迄今一般公认有11种正交曲线坐标系下的常见线性问题可以采用分离变量法解决，这11种坐标系即为笛卡儿、圆柱、椭圆柱、抛物柱、长椭球、扁椭球、球极、旋转抛物、锥面、共焦抛物面、共焦椭圆体坐标系，另外还有3种坐标系不能完全分离变量，但对平面或特殊问题可简化求解，它们是双极、圆环面和双球极坐标系。对于不同的物理问题可根据具体的边界来选择合适的坐标系，如对矩形域选择笛卡儿坐标系，对于球域选择球极坐标系等，以使变量得以分离且级数项系数容易确定。事实上，我们在科学研究和实际工程中遇到的很多土建类工程问题，采用经典的分析理论与对偏微分方程进行简化近似得到解析解的方法并不能完全满足要求，很多工程问题即使在建立了物理的或数学的模型之后，由于求解过程的高度复杂性而长期得不到有效的求解，但求解又是通向应用的必由之路，如果不能得到可靠的解，我们关注的问题最终仍得不到解决。

由于偏微分方程在理论和实践上的重要性，它的数值解法长期以来一直吸引着数学家、物理学家和工程师们的注意，因为一种数值解法包括它的数学基础及其实现，紧紧依赖于理论数学的发展和计算手段的改善。土建类工程问题中的偏微分方程数值解法正是计算机科学、计算数学与土建类学科相结合的产物，它不断吸收数学和相关各分支学科的研究成果，借助于计算机这一强大工具，极大地提高了解决实际问题的能力，但在过去，高阶线性代数方程组的求解是极其繁重的工作，所以数学家、物理学家和工程师们宁愿寻求解析解或近似解析解。数值解法既有数学理论上的抽象性和严谨性，又有解决实际问题的实用性和实验性，因此数值解法既有着广泛的工程实际需求，又有学科自身理论发展的深厚余地，同时学科成长的边缘特性还使它为相关学科提供了较宽的切入点，成为科学和工程技术人员解决问题的重要手段。

土建类工程问题中的偏微分方程数值解法常用的是有限差分法、有限元法、有限体积法、边界元法和有限分析法等，其中有限差分法、有限元法和有限体积法是占主要地位的偏微分方程数值解法，边界元法和有限分析法由于本身的特点，或发展较晚，其应用不如前三种方法普遍。实际上，各种数值方法都是对微分算子离散化，将整个求解域分解为有限个网格或单元，它们之间的差别，本质上讲在于各自所取的分布以及推导离散化方程的方法不同。有限差分法从微分方程出发，将区域经过离散处理后，近似地用差分和差商来代替微分与微商，使定解问题的求解转化为线性代数方程组的求解而得到数值解，因其研究历史较长，在解的存在性和唯一性等方面比较成熟和完善，在各种数值方法中占据主导地位。有限元法是基于变分原理或加权余量法、吸取差分法的离散化思想而发展起来的，其基本思想是分块逼近，也就是利用场函数分片多项式逼近模式来实现离散化，适用于对复杂几何边界的模拟，在引入自然边界条件上比有限差分法容易，求解椭圆型方程时具有优势。有限体积法适应面较广、解题能力较强、通用性较好，与前两种数值计算方法相比，有限体积法得到的离散方程保持了原微分方程的守恒性，各项物理意义明确，方程形式规范。应该说每种数值计算方法都有其特点和最适合的应用领域，例如有限差分法特别适于求解非定常问题，如抛物型和双曲型定解问题，但不便于处理复杂边界，有限元法适于求解有复杂边界的定常问题，如椭圆型边值问题，而在流动和传热计算领域有限体积法占据重要地位。

对于土建类专业学生，要在有限的课时内全面掌握偏微分方程的数值方法有一定的难度，应用商用软件分析问题时常处于知其然而不知其所以然的尴尬境地，基于这种情况，笔者编写了这本适合土建类专业的偏微分方程数值解法教材。作为一本工程数学教材，不可能把所有内容都包罗无遗地吸收进来，如何根据土建类专业自身的特点，用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚，这是编者一直感到棘手的难题。为此，本书结合教学实际，力求阐述简明，条理清晰，着力揭示数学概念和方法的物理背景，注意介绍必要的理论，例题和习题切合土建类专业学生的特点和需要，突出解题方法。对于工科专业学生来讲，他们一般不喜欢数学上的繁琐证明，但却常常追求“严谨”，为此，在叙述问题时注意层次、条理和直观，语言力求深入浅出，以期学生从已掌握的高等数学知识平滑过渡到本课程。

本书分为4章。第1章介绍有限差分法理论，从常微分方程的有限差分方法入手，引入有限差分法基本概念和方法，然后讨论椭圆型、双曲型和抛物型方程的各种离散格式，并重点介绍差分解的相容性、稳定性和唯一性以及数值效应；第2章介绍变分法与加权余量法，本章作为有限元法的数学基础，重点讨论里兹法和加权余量法；第3章介绍有限元法的基本原理，重点讨论有限元列式方法以及有限元方程解题步骤；第4章结合流动与传热问题介绍有限体积法，重点介绍有限体积法的基本思想、离散格式的建立以及SIMPLE算法。

书中引文主要取自参考文献［1］～［30］，恕不一一注明，在此对所有参考

文献编著者表示深深的谢意！本书初稿承哈尔滨工业大学何钟怡教授审阅，在此特致谢意！由于偏微分方程数值方法涉及土建类多个学科和专业，加之编者的学识水平有限，书中的错误和缺欠在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2013 年 5 月

信息反馈表

尊敬的老师：

您好！感谢您多年来对机械工业出版社的支持和厚爱！为了进一步提高我社教材的出版质量，更好地为我国高等教育发展服务，欢迎您对我社的教材多提宝贵意见和建议。另外，如果您在教学中选用了《偏微分方程数值解法(土建类)》(樊洪明编著)，欢迎您提出修改建议和意见。索取课件的授课教师，请填写下面的信息，发送邮件即可。

一、基本信息

姓名：______ 性别：____ 职称：____ 职务：______

邮编：______ 地址：____________

学校：______ 院系：______ 专业：______

任教课程：______ 手机：______ 电话：______

电子邮件：______ QQ：______

二、您对本书的意见和建议

（欢迎您指出本书的疏误之处）

三、您对我们的其他意见和建议

请与我们联系：

100037　机械工业出版社·高等教育分社

Tel：010—8837 9542（O）刘编辑

E-mail：ltao929@163.com

http：//www.cmpedu.com（机械工业出版社·教材服务网）

http：//www.cmpbook.com（机械工业出版社·门户网）

目 录

第1章　有限差分法

有限差分法的基本思想是用离散的只含有限个未知数的差分方程去代替连续变量的微分方程和定解条件。这种方法首先将求解域化为离散点集，通过适当的途径将微分方程离散化为差分方程，同时将定解条件离散化，通过这一过程构建差分格式，在此基础上，将微分方程定解问题化为代数方程组，通过求解代数方程组，得到定解问题的解在离散点上的近似值。本章先以线性常微分方程边值问题为例，介绍有限差分法的基本原理和方法，之后重点讨论偏微分方程的有限差分法。

1.1　偏微分方程概述

1.1.1　偏微分方程的基本概念

含有多元未知函数 u 及其偏导数的关系式称为偏微分方程，其一般形式为

$$F\left(x,y,\cdots,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\cdots\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\cdots\right)=0 \tag{1.1.1}$$

其中,$x,y,\cdots$是自变量,u 是未知函数,$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\cdots$是 u 的偏导数。例如,下列偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad(\alpha\text{ 为常数}) \tag{1.1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u-f(x,t)=0 \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0 \tag{1.1.4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2-u=0 \tag{1.1.5}$$

典型偏微分方程通常由物理问题归结得出,反映了物理规律,因此,有应用背景的偏微分方程一般称为数学物理方程。偏微分方程所含有最高偏导数的阶数称为该偏微分方程的阶。例如,方程式(1.1.2)为一阶偏微分方程,方程式(1.1.3)~式(1.1.5)均为二阶偏微分方程。若方程对未知函数及其所有偏导数都是线性的,也就是说,微分方程中各项关于未知函数及其各阶导数均为一次,则称为线性偏微分方程,否则称为非线性偏微分方程。例如,式(1.1.2)和式(1.1.3)是线性偏微分方程,而方程式(1.1.4)和(1.1.5)为非线性偏微分方程。

1.1.2 偏微分方程分类

对于含有两个自变量 x 和 y 的二阶线性偏微分方程可表示为

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x,y) \tag{1.1.6}$$

式中，A,B,C,D,E 和 F 均为自变量 x,y 的函数。

为了讨论方便，引入线性偏微分算子

$$L \equiv A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F \tag{1.1.7}$$

则方程式(1.1.6)可简记为

$$L(u) = f(x,y) \tag{1.1.8}$$

我们通常遇到的数学物理方程大多数为形如方程式(1.1.6)的二阶偏微分方程，对于该方程，按系数 A、B 和 C 之间的关系，分成三种类型，分别代表不同的物理过程或状态。

若 $B^2-4AC>0$，方程式(1.1.6)为双曲型方程；

若 $B^2-4AC=0$，方程式(1.1.6)为抛物型方程；

若 $B^2-4AC<0$，方程式(1.1.6)为椭圆型方程。

二阶偏微分方程，例如，波动方程、输运方程和拉普拉斯方程（泊松方程），在偏微分方程的理论和应用中占有重要地位。

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.9}$$

是描述振动（或波动）过程的偏微分方程，属双曲型方程。

输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.10}$$

是描述扩散和热传导等不可逆过程的偏微分方程，属抛物型方程。

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1.11}$$

是描述稳定（或平衡）状态过程的偏微分方程，属椭圆型方程。

以下简要介绍起源于流体力学的 Burgers 方程。在非线性偏微分方程的研究过程中，Burgers 方程是一类具有代表性的耗散型波动方程，并且用来描述许多物理现象，例如，黏性介质中的声波问题以及充满黏弹性流体管道中的波动问题等。从一维非恒定对流扩散方程的守恒形式出发，有

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (u\phi)}{\partial x} = \beta\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{1.1.12}$$

式中，ϕ 为待求的因变量；u 为流速；β 为扩散系数，且 $\beta>0$。根据一维流体运动的连续条件，可以将式(1.1.12)改写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{1.1.13}$$

将式(1.1.13)中的因变量 ϕ 改为流速 u,便得一维 Burgers 方程,即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.14}$$

式(1.1.14)等号左边分别称为时变项、对流项,等式右边称为黏性耗散项(或扩散项)。式(1.1.14)与一维纳维-斯托克斯方程(N-S 方程)仅相差一个压力梯度项。一维 Burgers 方程经过不同的简化处理,又可得到几种更为简单的模型方程。若略去黏性耗散项,则得到一维非线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1.15}$$

式(1.1.15)是一维 N-S 方程的惯性力部分,适用于无黏性流动。若将式(1.1.14)的对流项作线性化处理,则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.16}$$

式中,α,β 为常数。式(1.1.16)称为一维线性对流扩散方程,该方程适合于污染物质在流体中的运动,包括对流与扩散两个物理过程。

若再进一步简化,忽略扩散项(二阶导数项),即令式(1.1.16)中 $\beta=0$,则得一维纯对流方程,即

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.1.17}$$

式(1.1.17)为线性方程。

若流动速度较小,则对流项可忽略,式(1.1.16)中的 $\alpha=0$,得一维扩散方程。

1.1.3　定解问题与边界条件

因微分方程描述的是物理现象的一般规律，故只由一个偏微分方程一般不能完全确定具体物理现象的规律，为此，需给出适当的附加条件。通常把微分方称为泛定方程，而把能完全确定物理现象规律的附加条件，称为定解条件。定解条件一般包括初始条件和边界条件，分别表明物理现象的初始状态和在边界上的约束情况。由泛定方程与定解条件所构成的数学问题，称为定解问题。根据定解条件的不同，定解问题分为三种类型：只有初始条件而没有边界条件的定解问题称为初值问题；只有边界条件而没有初始条件的定解问题称为边值问题；既有边界条件，又有初始条件的定解问题称为混合问题。与定解问题相对应，边界条件也主要分为三类。

第一类边界条件，直接给出未知函数 u 在边界上各点的函数值。设边界为 Γ，边界点记作 M，则

$$u|_{\Gamma}=f(M,t)\quad(M\in\Gamma)$$

第二类边界条件，给出未知函数 u 在边界各点函数的外法向微商值，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(M,t) \quad (M \in \Gamma)$$

第三类边界条件，给出未知函数 u 在边界上各点的函数值与外法向微商值间的线性关系，即

$$\left.\left(u + \alpha\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma} = f(M,t) \quad (M \in \Gamma)$$

求解任何一个定解问题都必须考虑该定解问题的解是否存在、解是否唯一、解是否稳定。如果定解问题的解存在、唯一且稳定，则称该定解问题是适定的。通常，由实际问题归结出的定解问题在数学上都是适定的，对此，本章后续内容将对此作进一步讨论。

1.2　常微分方程的有限差分法

1.2.1　导数的差分近似

有限差分法求解微分方程的基本思想是用离散的、只含有限个未知量的差分方程去近似代替连续变量的微分方程和定解条件，并把相应的差分方程的解作为微分方程定解问题的近似解。本节以常微分方程为例讨论导数的有限差分近似以及差分方程的建立。

对于函数 $y=f(x)$，利用 Taylor 展开有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \tag{1.2.1}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \tag{1.2.2}$$

可推得

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots \tag{1.2.3}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots \tag{1.2.4}$$

于是得到一阶导数的近似表达式

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) \tag{1.2.5}$$

$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h) \tag{1.2.6}$$

其中，$O(h)$ 为截断误差项，可分别表示为

$$O(h) = -\frac{h}{2}f''(\xi) \quad (x<\xi<x+h) \text{ 和 } O(h) = \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (x-h<\xi<x)$$

式(1.2.5)和式(1.2.6)分别称为 $f'(x)$ 的向前差分公式和向后差分公式，它们都具有一阶精度。为获得具有更高精度的近似表达式，将式(1.2.1)和式(1.2.2)相减，得

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{2h^3}{3!}f'''(x)+\cdots \tag{1.2.7}$$

于是，有

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2) \tag{1.2.8}$$

其中，$O(h^2)$ 为截断误差项，可表示为

$$O(h)=-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)\quad (x-h<\xi<x+h)$$

式(1.2.8)称为 $f'(x)$ 的中心差分公式，它具有二阶精度。$f'(x)$ 的差分近似表达式的几何意义如图 1.2.1 所示。

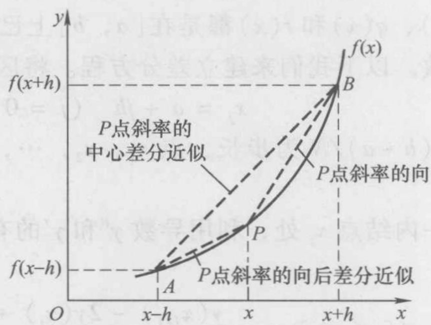

图 1.2.1　$f'(x)$ 的差分近似表达式的几何意义

若将式(1.2.1)和式(1.2.2)相加，得

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{12}f^{(4)}(x)+\cdots \tag{1.2.9}$$

于是，有

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+O(h^2) \tag{1.2.10}$$

其中，$O(h^2)$ 为截断误差项，可表示为

$$O(h^2)=-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)\quad (x-h<\xi<x+h)$$

用类似的方法，可获得更高阶导数的差分近似式。除了前述的几种差分近似式以外，常用的还有

$$f'(x)=\frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}+O(h^2) \tag{1.2.11}$$

$$f'(x)=\frac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}+O(h^2) \tag{1.2.12}$$

$$f'(x)=\frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)-f(x-2h)}{12h}+O(h^4) \tag{1.2.13}$$

$$f''(x)=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+O(h) \tag{1.2.14}$$