

普通高等教育规划教材

偏微分方程 数值解法 (土建类)

樊洪明 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



014013215

0241.82

109

普通高等教育规划教材

偏微分方程数值解法 (土建类)

樊洪明 编著



机械工业出版社

0241.82

109



北航

C1700505

014013512

本书系统地阐述了偏微分方程数值解法的理论基础及其在土建类专业中的应用。全书分有限差分法、变分法与加权余量法、有限元法以及有限体积法四章。本书起点较低，并不一味追求数学的严密性和逻辑性，而是尽量为读者提供偏微分方程数值解法的有关基本概念、基本原理和解决实际问题的方法与步骤，层次清晰，深入浅出，便于自学。

本书可作为高等学校工科相关专业的本科教材，也可供工科专业研究生、教师和广大科技人员参考。

本书配有电子课件，免费提供给选用本书的授课教师，需要者请根据书末的“信息反馈表”索取。

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法：土建类/樊洪明编著. —北京：机械工业出版社，2013. 11

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-44528-9

I. ①偏… II. ①樊… III. ①偏微分方程 - 数值计算 - 高等学校 - 教材 IV. ①0241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 251668 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：刘 涛 责任编辑：刘 涛 陈崇昱

版式设计：常天培 责任校对：姜艳丽

封面设计：张 静 责任印制：乔 宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2014 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 19 印张 · 391 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-44528-9

定价：36.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010)88361066 教材网：<http://www.cmpedu.com>

销售一部：(010)68326294 机工官网：<http://www.cmpbook.com>

销售二部：(010)88379649 机工官博：<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线：(010)88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

土建类工程问题的解决与偏微分方程求解密切相关,从数学物理方法的角度看,如果我们对问题的物理本质了解得很清楚,而且能够用精确的数学模型来表达,也就是定解问题已确定,接下来就是如何求解定解条件下的偏微分方程。线性数学物理问题求解的解析法,仅适用于数量有限的经典问题,以及几何形状简单、边界条件不复杂的情况。解析法的求解过程物理概念清楚,结论简明清晰,便于对物理现象分析研究,特别是给后续运算带来很大便利。在正交曲线坐标系下,可以通过分离变量,利用某些正交曲线坐标系和与之对应的特殊函数来构造偏微分方程的无穷级数解。通常,对于正交边界的数学物理问题可以通过傅里叶-刘维尔(Fourier-Liouville)展开来确定上述无穷级数解中的级数项系数。迄今一般公认有11种正交曲线坐标系下的常见线性问题可以采用分离变量法解决,这11种坐标系即为笛卡儿、圆柱、椭圆柱、抛物柱、长椭球、扁椭球、球极、旋转抛物、锥面、共焦抛物面、共焦椭圆体坐标系,另外还有3种坐标系不能完全分离变量,但对平面或特殊问题可简化求解,它们是双极、圆环面和双球极坐标系。对于不同的物理问题可根据具体的边界来选择合适的坐标系,如对矩形域选择笛卡儿坐标系,对于球域选择球极坐标系等,以使变量得以分离且级数项系数容易确定。事实上,我们在科学研究和实际工程中遇到的很多土建类工程问题,采用经典的分析理论与对偏微分方程进行简化近似得到解析解的方法并不能完全满足要求,很多工程问题即使在建立了物理的或数学的模型之后,由于求解过程的高度复杂性而长期得不到有效的求解,但求解又是通向应用的必由之路,如果不能得到可靠的解,我们关注的问题最终仍得不到解决。

由于偏微分方程在理论和实践上的重要性,它的数值解法长期以来一直吸引着数学家、物理学家和工程师们的注意,因为一种数值解法包括它的数学基础及其实现,紧紧依赖于理论数学的发展和计算手段的改善。土建类工程问题中的偏微分方程数值解法正是计算机科学、计算数学与土建类学科相结合的产物,它不断吸收数学和相关各分支学科的研究成果,借助于计算机这一强大工具,极大地提高了解决实际问题的能力,但在过去,高阶线性代数方程组的求解是极其繁重的工作,所以数学家、物理学家和工程师们宁愿寻求解析解或近似解析解。数值解法既有数学理论上的抽象性和严谨性,又有解决实际问题的实用性和实验性,因此数值解法既有着广泛的工程实际需求,又有学科自身理论发展的深厚余地,同时学科成长的边缘特性还使它为相关学科提供了较宽的切入点,成为科学和工程技术人员解决问题的重要手段。

土建类工程问题中的偏微分方程数值解法常用的是有限差分法、有限元法、有限体积法、边界元法和有限分析法等,其中有限差分法、有限元法和有限体积法是占主要地位的偏微分方程数值解法,边界元法和有限分析法由于本身的特点,或发展较晚,其应用不如前三种方法普遍。实际上,各种数值方法都是对微分算子离散化,将整个求解域分解为有限个网格或单元,它们之间的差别,本质上讲在于各自所取的分布以及推导离散化方程的方法不同。有限差分法从微分方程出发,将区域经过离散处理后,近似地用差分和差商来代替微分与微商,使定解问题的求解转化为线性代数方程组的求解而得到数值解,因其研究历史较长,在解的存在性和唯一性等方面比较成熟和完善,在各种数值方法中占据主导地位。有限元法是基于变分原理或加权余量法、吸取差分法的离散化思想而发展起来的,其基本思想是分块逼近,也就是利用场函数分片多项式逼近模式来实现离散化,适用于对复杂几何边界的模拟,在引入自然边界条件上比有限差分法容易,求解椭圆型方程时具有优势。有限体积法适应面较广、解题能力较强、通用性较好,与前两种数值计算方法相比,有限体积法得到的离散方程保持了原微分方程的守恒性,各项物理意义明确,方程形式规范。应该说每种数值计算方法都有其特点和最适合的应用领域,例如有限差分法特别适于求解非定常问题,如抛物型和双曲型定解问题,但不便于处理复杂边界,有限元法适于求解有复杂边界的定常问题,如椭圆型边值问题,而在流动和传热计算领域有限体积法占据重要地位。

对于土建类专业学生,要在有限的课时内全面掌握偏微分方程的数值方法有一定的难度,应用商用软件分析问题时常处于知其然而不知其所以然的尴尬境地,基于这种情况,笔者编写了这本适合土建类专业的偏微分方程数值解法教材。作为一本工程数学教材,不可能把所有内容都包罗无遗地吸收进来,如何根据土建类专业自身的特点,用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚,这是编者一直感到棘手的难题。为此,本书结合教学实际,力求阐述简明,条理清晰,着力揭示数学概念和方法的物理背景,注意介绍必要的理论,例题和习题切合土建类专业学生的特点和需要,突出解题方法。对于工科专业学生来讲,他们一般不喜欢数学上的繁琐证明,但却常常追求“严谨”,为此,在叙述问题时注意层次、条理和直观,语言力求深入浅出,以期学生从已掌握的高等数学知识平滑过渡到本课程。

本书分为4章。第1章介绍有限差分法理论,从常微分方程的有限差分方法入手,引入有限差分法基本概念和方法,然后讨论椭圆型、双曲型和抛物型方程的各种离散格式,并重点介绍差分解的相容性、稳定性和唯一性以及数值效应;第2章介绍变分法与加权余量法,本章作为有限元法的数学基础,重点讨论里兹法和加权余量法;第3章介绍有限元法的基本原理,重点讨论有限元列式方法以及有限元方程解题步骤;第4章结合流动与传热问题介绍有限体积法,重点介绍有限体积法的基本思想、离散格式的建立以及SIMPLE算法。

书中引文主要取自参考文献[1]~[30],恕不一一注明,在此对所有参考

信息反馈表

尊敬的老师：

您好！感谢您多年来对机械工业出版社的支持和厚爱！为了进一步提高我社教材的出版质量，更好地为我国高等教育发展服务，欢迎您对我社的教材多提宝贵意见和建议。另外，如果您在教学中选用了《偏微分方程数值解法(土建类)》(樊洪明编著)，欢迎您提出修改建议和意见。索取课件的授课教师，请填写下面的信息，发送邮件即可。

一、基本信息

姓名：_____ 性别：_____ 职称：_____ 职务：_____

邮编：_____ 地址：_____

学校：_____ 院系：_____ 专业：_____

任教课程：_____ 手机：_____ 电话：_____

电子邮件：_____ QQ：_____

二、您对本书的意见和建议

(欢迎您指出本书的疏误之处)

三、对我们的其他意见和建议

请与我们联系：

100037 机械工业出版社·高等教育分社

Tel: 010—8837 9542 (O) 刘编辑

E-mail: Itao929@163.com

<http://www.cmpedu.com> (机械工业出版社·教材服务网)

<http://www.cmpbook.com> (机械工业出版社·门户网)



北航

C1700505

目 录

前言

第 1 章 有限差分法	1
1.1 偏微分方程概述	1
1.1.1 偏微分方程的基本概念	1
1.1.2 偏微分方程分类	2
1.1.3 定解问题与边界条件	3
1.2 常微分方程的有限差分法	4
1.2.1 导数的差分近似	4
1.2.2 线性常微分方程边值问题的有限差分法求解	6
1.2.3 差分方程解的存在性和唯一性	7
1.2.4 差分方程的收敛性	9
1.3 偏微分方程有限差分法原理	11
1.3.1 微商与差商	11
1.3.2 有限差分方程的构建	13
1.3.3 从积分形式出发建立差分格式	15
1.3.4 显式差分格式与隐式差分格式	18
1.4 边界条件和初始条件的处理方法	18
1.4.1 矩形计算域边界条件处理	18
1.4.2 非规则计算域边界条件处理	20
1.4.3 采用单元积分法处理边界条件	22
1.4.4 初始条件处理	24
1.5 有限差分格式的相容性、稳定性与收敛性	24
1.5.1 偏微分方程定解问题的适定性	24
1.5.2 有限差分格式的相容性	25
1.5.3 有限差分格式的收敛性	26
1.5.4 有限差分格式的稳定性	27
1.5.5 Lax 等价定理	37
1.6 椭圆型方程的有限差分格式	37
1.6.1 五点差分格式	38
1.6.2 非均匀网格上的差分格式	39
1.6.3 非矩形计算域上的差分格式	41
1.6.4 差分方程解法	43
1.7 双曲型方程的有限差分格式	44
1.7.1 一阶波动方程的差分格式	44

1.7.2	二阶波动方程的差分格式	46
1.8	抛物型方程的有限差分格式	49
1.8.1	一维抛物型方程的差分格式	49
1.8.2	二维抛物型方程的差分格式	52
1.8.3	一维对流扩散方程的差分格式	56
1.9	数值效应	57
1.9.1	差商逼近微商的近似性质	57
1.9.2	物理耗散和弥散	58
1.9.3	数值耗散和弥散	61
1.9.4	数值振荡效应	65
	习题	66
第2章	变分法与加权余量法	68
2.1	变分法概述	68
2.1.1	变分法的基本概念	68
2.1.2	变分的特性	70
2.2	欧拉方程	75
2.2.1	一维固定端点问题的欧拉方程	75
2.2.2	一维可动端点问题的欧拉方程	80
2.2.3	二维和三维问题的欧拉方程	81
2.2.4	待定边界的变分问题	86
2.3	里兹法	87
2.3.1	里兹法的基本思想	88
2.3.2	微分方程对应的变分问题	90
2.4	加权余量法	94
2.4.1	加权余量法的基本思想	95
2.4.2	配置法	96
2.4.3	子区域法	97
2.4.4	最小二乘法	98
2.4.5	矩法	99
2.4.6	伽辽金法	100
2.4.7	伽辽金法与里兹法的关系	101
2.4.8	二维偏微分方程化为常微分方程求解	102
2.5	强解与弱解	104
2.5.1	弱解积分表达式	104
2.5.2	强解积分表达式	105
2.6	伽辽金法求解初值问题	109
2.6.1	波动方程的伽辽金积分表达式	110
2.6.2	扩散方程的伽辽金积分表达式	110
2.6.3	非定常问题求解	111

2.7	伽辽金法求解非线性问题	114
2.8	基函数的选取	115
	习题	117
第3章	有限元法	119
3.1	有限元法的基本原理	119
3.1.1	有限元法基本原理	119
3.1.2	有限元法解题步骤	120
3.2	有限元列式方法	122
3.2.1	基于变分原理的有限元列式方法	122
3.2.2	基于加权余量法的有限元列式方法	124
3.3	单元的形状和自然坐标	126
3.3.1	单元的形状	126
3.3.2	自然坐标	127
3.4	插值函数	138
3.4.1	插值函数概述	138
3.4.2	单元的插值函数	142
3.4.3	基本单元及其线性插值函数	145
3.5	曲边单元与等参单元	148
3.6	拟协调单元和埃尔米特多项式插值	157
3.7	高斯积分	163
3.7.1	高斯积分概述	163
3.7.2	一维线段基本单元的高斯积分	164
3.7.3	二维正方形基本单元的高斯积分	165
3.7.4	三维正方体基本单元的高斯积分	165
3.7.5	三角形基本单元的高斯积分	166
3.7.6	四面体基本单元的高斯积分	167
3.8	有限元法求解步骤	167
3.8.1	写出积分表达式	167
3.8.2	区域剖分	168
3.8.3	确定单元基函数	170
3.8.4	单元分析	172
3.8.5	总体合成	173
3.8.6	边界条件处理	175
3.8.7	解有限元方程	177
3.9	有限元法求解偏微分方程边值问题	178
3.9.1	写出积分表达式	178
3.9.2	区域剖分	179
3.9.3	确定单元基函数	180
3.9.4	单元分析	181

3.9.5 总体合成	183
3.9.6 边界条件处理	184
3.9.7 解有限元方程	185
3.10 非线性问题的有限元法	187
3.11 非定常问题的有限元法	189
3.11.1 抛物型方程的步进法	189
3.11.2 双曲型方程的步进法	191
3.11.3 非线性方程的步进法	191
3.12 泰勒-伽辽金有限元法	192
3.12.1 一维对流方程	192
3.12.2 多维对流扩散方程的泰勒-伽辽金有限元格式	194
习题	196
第4章 有限体积法	198
4.1 流体流动与传热基本方程	198
4.1.1 连续性方程	198
4.1.2 动量方程	200
4.1.3 能量方程	200
4.1.4 组分质量守恒方程	201
4.1.5 状态方程	202
4.1.6 牛顿流体运动控制方程	202
4.1.7 湍流概述	203
4.1.8 流动控制方程的通用形式	205
4.2 有限体积法的基本思想和特点	205
4.3 一维稳态扩散问题的有限体积法	207
4.4 多维稳态扩散问题的有限体积法	214
4.4.1 二维稳态扩散问题的有限体积法	214
4.4.2 三维稳态扩散问题的有限体积法	219
4.5 一维对流扩散问题的有限体积法	221
4.6 多维对流扩散问题的有限体积法	227
4.6.1 二维对流扩散问题的有限体积法	227
4.6.2 三维对流扩散问题的有限体积法	229
4.7 有限体积法离散格式的特征	230
4.8 有限体积法常用的离散格式	234
4.8.1 对流扩散问题的一阶离散格式	234
4.8.2 混合离散格式	238
4.8.3 指数离散格式与乘方离散格式	240
4.8.4 QUICK 格式	242
4.9 压力与速度耦合问题的有限体积法	249
4.9.1 压力与速度耦合问题	249

4.9.2	交错网格技术	250
4.9.3	SIMPLE 算法	255
4.9.4	SIMPLER 算法	259
4.9.5	SIMPLEC 算法	260
4.10	有限体积法离散方程的解法	262
4.10.1	引言	262
4.10.2	TDMA 算法	263
4.10.3	TDMA 算法在二维问题中的应用	267
4.10.4	TDMA 算法在三维问题中的应用	268
4.11	非稳态流动问题的有限体积法	269
4.11.1	非稳态流动问题的守恒方程	269
4.11.2	非稳态扩散问题的守恒方程	270
4.12	非稳态对流扩散问题的离散方程及其解法	277
4.12.1	非稳态对流扩散问题一阶差分格式	277
4.12.2	SIMPLE 算法在瞬态问题中的应用	279
4.13	边界条件设定方法	280
4.13.1	概述	280
4.13.2	入口边界条件处理	282
4.13.3	出口边界条件处理	283
4.13.4	固定壁面边界条件处理	284
4.13.5	压力边界条件处理	288
4.13.6	对称边界条件处理	289
4.13.7	周期或循环边界条件处理	289
4.13.8	处理边界条件潜在问题	290
	习题	291
	参考文献	293

第 1 章 有限差分法

有限差分法的基本思想是用离散的只含有限个未知数的差分方程去代替连续变量的微分方程和定解条件。这种方法首先将求解域化为离散点集,通过适当的途径将微分方程离散化为差分方程,同时将定解条件离散化,通过这一过程构建差分格式,在此基础上,将微分方程定解问题化为代数方程组,通过求解代数方程组,得到定解问题的解在离散点上的近似值。本章先以线性常微分方程边值问题为例,介绍有限差分法的基本原理和方法,之后重点讨论偏微分方程的有限差分法。

1.1 偏微分方程概述

1.1.1 偏微分方程的基本概念

含有多元未知函数 u 及其偏导数的关系式称为偏微分方程,其一般形式为

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0 \quad (1.1.1)$$

其中, x, y, \dots 是自变量, u 是未知函数, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$ 是 u 的偏导数。例如,下列偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\alpha \text{ 为常数}) \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u - f(x, t) = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0 \quad (1.1.4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 - u = 0 \quad (1.1.5)$$

典型偏微分方程通常由物理问题归结得出,反映了物理规律,因此,有应用背景的偏微分方程一般称为数学物理方程。偏微分方程所含有最高偏导数的阶数称为该偏微分方程的阶。例如,方程式(1.1.2)为一阶偏微分方程,方程式(1.1.3)~式(1.1.5)均为二阶偏微分方程。若方程对未知函数及其所有偏导数都是线性的,也就是说,微分方程中各项关于未知函数及其各阶导数均为一次,则称为线性偏微分方程,否则称为非线性偏微分方程。例如,式(1.1.2)和式(1.1.3)是线性偏微分方程,而方程式(1.1.4)和(1.1.5)为非线性偏微分方程。

1.1.2 偏微分方程分类

对于含有两个自变量 x 和 y 的二阶线性偏微分方程可表示为

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y) \quad (1.1.6)$$

式中, A, B, C, D, E 和 F 均为自变量 x, y 的函数。

为了讨论方便,引入线性偏微分算子

$$L \equiv A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D \frac{\partial}{\partial x} + E \frac{\partial}{\partial y} + F \quad (1.1.7)$$

则方程式(1.1.6)可简记为

$$L(u) = f(x, y) \quad (1.1.8)$$

我们通常遇到的数学物理方程大多数为形如方程式(1.1.6)的二阶偏微分方程,对于该方程,按系数 A, B 和 C 之间的关系,分成三种类型,分别代表不同的物理过程或状态。

若 $B^2 - 4AC > 0$, 方程式(1.1.6)为双曲型方程;

若 $B^2 - 4AC = 0$, 方程式(1.1.6)为抛物型方程;

若 $B^2 - 4AC < 0$, 方程式(1.1.6)为椭圆型方程。

二阶偏微分方程,例如,波动方程、输运方程和拉普拉斯方程(泊松方程),在偏微分方程的理论和应用中占有重要地位。

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.9)$$

是描述振动(或波动)过程的偏微分方程,属双曲型方程。

输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.10)$$

是描述扩散和热传导等不可逆过程的偏微分方程,属抛物型方程。

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1.11)$$

是描述稳定(或平衡)状态过程的偏微分方程,属椭圆型方程。

以下简要介绍起源于流体力学的 Burgers 方程。在非线性偏微分方程的研究过程中, Burgers 方程是一类具有代表性的耗散型波动方程,并且用来描述许多物理现象,例如,黏性介质中的声波问题以及充满黏弹性流体管道中的波动问题等。从一维非恒定对流扩散方程的守恒形式出发,有

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (1.1.12)$$

式中, ϕ 为待求的因变量; u 为流速; β 为扩散系数,且 $\beta > 0$ 。根据一维流体运动的连续条件,可以将式(1.1.12)改写为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (1.1.13)$$

将式(1.1.13)中的因变量 ϕ 改为流速 u , 便得一维 Burgers 方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.14)$$

式(1.1.14)等号左边分别称为时变项、对流项, 等式右边称为黏性耗散项(或扩散项)。式(1.1.14)与一维纳维-斯托克斯方程(N-S方程)仅相差一个压力梯度项。一维 Burgers 方程经过不同的简化处理, 又可得几种更为简单的模型方程。若略去黏性耗散项, 则得到一维非线性对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.15)$$

式(1.1.15)是一维 N-S 方程的惯性力部分, 适用于无黏性流动。若将式(1.1.14)的对流项作线性化处理, 则得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1.16)$$

式中, α, β 为常数。式(1.1.16)称为一维线性对流扩散方程, 该方程适合于污染物质在流体中的运动, 包括对流与扩散两个物理过程。

若再进一步简化, 忽略扩散项(二阶导数项), 即令式(1.1.16)中 $\beta = 0$, 则得一维纯对流方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.17)$$

式(1.1.17)为线性方程。

若流动速度较小, 则对流项可忽略, 式(1.1.16)中的 $\alpha = 0$, 得一维扩散方程。

1.1.3 定解问题与边界条件

因微分方程描述的是物理现象的一般规律, 故只由一个偏微分方程一般不能完全确定具体物理现象的规律, 为此, 需给出适当的附加条件。通常把微分方程称为泛定方程, 而把能完全确定物理现象规律的附加条件, 称为定解条件。定解条件一般包括初始条件和边界条件, 分别表明物理现象的初始状态和在边界上的约束情况。由泛定方程与定解条件所构成的数学问题, 称为定解问题。根据定解条件的不同, 定解问题分为三种类型: 只有初始条件而没有边界条件的定解问题称为初值问题; 只有边界条件而没有初始条件的定解问题称为边值问题; 既有边界条件, 又有初始条件的定解问题称为混合问题。与定解问题相对应, 边界条件也主要分为三类。

第一类边界条件, 直接给出未知函数 u 在边界上各点的函数值。设边界为 Γ , 边界点记作 M , 则

$$u|_{\Gamma} = f(M, t) \quad (M \in \Gamma)$$

第二类边界条件, 给出未知函数 u 在边界各点函数的外法向微商值, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f(M, t) \quad (M \in \Gamma)$$

第三类边界条件, 给出未知函数 u 在边界上各点的函数值与外法向微商值间的线性关系, 即

$$\left(u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = f(M, t) \quad (M \in \Gamma)$$

求解任何一个定解问题都必须考虑该定解问题的解是否存在、解是否唯一、解是否稳定。如果定解问题的解存在、唯一且稳定, 则称该定解问题是适定的。通常, 由实际问题归结出的定解问题在数学上都是适定的, 对此, 本章后续内容将对此作进一步讨论。

1.2 常微分方程的有限差分法

1.2.1 导数的差分近似

有限差分法求解微分方程的基本思想是用离散的、只含有限个未知量的差分方程去近似代替连续变量的微分方程和定解条件, 并把相应的差分方程的解作为微分方程定解问题的近似解。本节以常微分方程为例讨论导数的有限差分近似以及差分方程的建立。

对于函数 $y = f(x)$, 利用 Taylor 展开有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (1.2.1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (1.2.2)$$

可推得

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \dots \quad (1.2.3)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f''(x) - \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \dots \quad (1.2.4)$$

于是得到一阶导数的近似表达式

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (1.2.5)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (1.2.6)$$

其中, $O(h)$ 为截断误差项, 可分别表示为

$$O(h) = -\frac{h}{2}f''(\xi) \quad (x < \xi < x+h) \text{ 和 } O(h) = \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (x-h < \xi < x)$$

式(1.2.5)和式(1.2.6)分别称为 $f'(x)$ 的向前差分公式和向后差分公式,它们都具有一阶精度。为获得具有更高精度的近似表达式,将式(1.2.1)和式(1.2.2)相减,得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x) + \dots \quad (1.2.7)$$

于是,有

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (1.2.8)$$

其中, $O(h^2)$ 为截断误差项,可表示为

$$O(h) = -\frac{h^2}{6}f'''(\xi) \quad (x-h < \xi < x+h)$$

式(1.2.8)称为 $f'(x)$ 的中心差分公式,它具有二阶精度。 $f'(x)$ 的差分近似表达式的几何意义如图1.2.1所示。

若将式(1.2.1)和式(1.2.2)相加,得

$$\begin{aligned} & f(x+h) + f(x-h) \\ = & 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

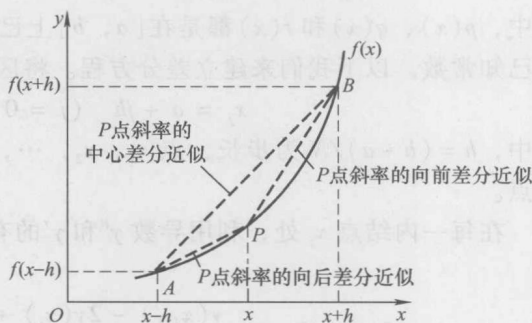


图 1.2.1 $f'(x)$ 的差分近似表达式的几何意义

于是,有

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (1.2.10)$$

其中, $O(h^2)$ 为截断误差项,可表示为

$$O(h^2) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \quad (x-h < \xi < x+h)$$

用类似的方法,可获得更高阶导数的差分近似式。除了前述的几种差分近似式以外,常用的还有

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2) \quad (1.2.11)$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + O(h^2) \quad (1.2.12)$$

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) - f(x-2h)}{12h} + O(h^4) \quad (1.2.13)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h) \quad (1.2.14)$$