马传渔 等 编著
南京大学金陵学院

Linear Algebra

线性代数

南京大学出版社

南京大学金陵学院

Linear Algebra

线性代数

马传渔　袁明霞　马　荣　章丽霞　庄凯丽　编著

南京大学出版社

内容提要

本书是高等学校独立学院经济管理类线性代数教材。全书共 4 章，内容包括：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值问题和二次型。书中每章设有引言、小结、硕士研究生试题摘选等栏目。A、B 两组习题紧贴教材内容，旨在强化“三基”训练，提升解题能力。

本书内容丰富，便于自学，便于应用。可作为高等学校的教材或数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/马传渔等编著. —南京：南京大学出版社，2013. 7
ISBN 978 - 7 - 305 - 12244 - 6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 236368 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　邮编 210093
网　　址　http://www. NjupCo. com
出 版 人　左　健

书　　名　线性代数
编　　著　马传渔　等
责任编辑　陈亚明　王振义

照　　排　江苏南大印刷厂
印　　刷　江苏南大印刷厂
开　　本　787×960　1/16　印张　15. 75　字数　300 千
版　　次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-12244-6
定　　价　35. 00 元

发行热线　025—83594756　83686452
电子邮箱　Press@NjupCo. com
　　　　　Sales@NjupCo. comd(市场部)

前　言

南京大学金陵学院教学改革成果——《微积分》(经济管理类)上、下两册自2007年出版以来,实用性和指导性都受到了广大读者的认可。其配套教材《微积分解题集萃》、《微积分培优读本》和《微积分解题方法与技巧》自2009年出版至今,也获得了许多好评。2012年《艺术数学》的问世赢得了读者的兴趣和关注。随之,南京大学金陵学院另一教学改革成果——《线性代数》教材又与读者见面了。

纵观目前已出版的各类大学线性代数教材,鉴于各类高校、各类专业对线性代数的教学要求有所不同,从而迫切需求一本能适用于高等学校独立学院经济管理类专业使用的线性代数教材,而本书就是根据这一需要,结合教学实践编著而成的。

全书共分4章,第1章为行列式,第2章为矩阵,这两章内容是学习线性代数的基本工具;第3章为线性方程组,第4章为特征值理论和二次型。尽管二次型的内容在高等学校管理专业的教学大纲中不作要求,但鉴于它是考研的知识点,编者仍将二次型的基本内容浓缩为第4章中的一小节。

全书每章开头设“引言”栏目,以生产、经济等实际问题引出该章的内容,有助于读者带着问题去学习,去探索。每章末设“小结”栏目,便于读者对章内知识点和整体框架有更清晰的理解和把握。每章后配备A、B两组习题,共72题,有利于理解和巩固基本概念、基本理论,有利于提升运算能力和解题水平。除第1章外,每章还设有“硕士研究生试题摘选”栏目,以供学有余力和准备考研的学生阅读。全书设中英对照的“索引”栏目,以方便读者更快捷地查阅到知识点。“结束语”栏目,以行列式和矩阵为两条鸿线,对线性代数内容作出简洁的、总结性的论述。

本书是依据教育部对大学高等数学制定的教学规范和教学安排编写而成的。全书强调针对性、可读性、应用性和实用性。本书可作为经济管理类本科生的线性代数教材或参考书,也可作为高等学校大专类学生和广大自学者的数学参考书。

本书能与读者见面,得益于南京大学金陵学院历届院领导的关心和指导,得益于南京大学金陵学院数学组(文科)团队精神的充分发挥。书中有不足之处,恳请同行和读者不吝赐教。

编者

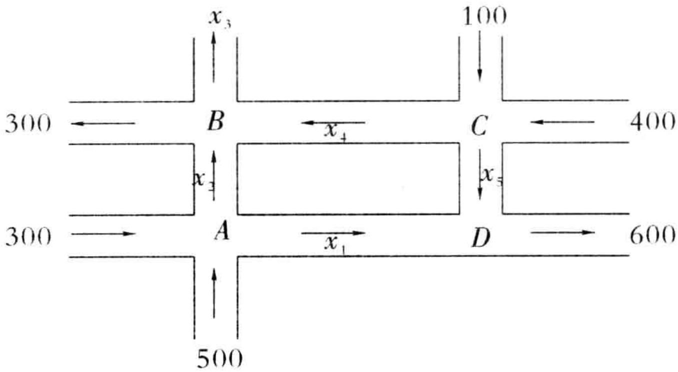
2013年6月

目　　录

第 1 章　行　列　式

引　言

行列式是线性代数中最基本的内容，贯穿在线性代数各章内容之中. 行列式作为一种数学工具，在数学和其他科学分支中有一定的应用，例如在线性经济模型等实际问题中要涉及 n 阶行列式. 在初等数学里，用二阶、三阶行列式求解二元、三元线性方程组. 本章借助消元法的思想将三阶行列式推广为 n 阶行列式. 先看下面实例：交通流量问题.



在某城市的中心区，几条单行道彼此交叉，每个道路交叉口的交通流量（以每小时经过交叉口的平均车辆数计）如上图所示. 试确定这个交通流量图的一般模型.

分析本问题的解. 关于交通流量的基本假设是：(1)交通网络的总流入量等于总流出量；(2)全部流入每一个路口的流量等于全部流出此路口的流量.

根据各路口进出流量平衡关系，在每个交叉路口车辆驶入数目等于车辆驶出数目. 如下表所示.

交叉路口	车辆驶入数目		车辆驶出数目
A	$300+500$	$=$	x_1+x_2
B	x_2+x_4	$=$	x_3+300
C	$100+400$	$=$	x_4+x_5
D	x_1+x_5	$=$	600

另外,该交通网络中的总流入量等于总流出量,即

$$300+500+100+400=300+x_3+600.$$

整理后,5 个方程联立可得下面的方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad\qquad =800, \\ \qquad x_2-x_3+x_4 \qquad =300, \\ \qquad\qquad\qquad x_4+x_5=500, \\ x_1+ \qquad\qquad\qquad x_5=600, \\ \qquad\quad x_3 \qquad\qquad\quad =400. \end{cases}$$

根据此方程组的特点,类似于消元法,可将 x_5 看成自由变量. 除 $x_3=400$ 外,其余三个变量 x_1,x_2,x_4 均可用 x_5 表示,即

$$\begin{cases} x_1=600-x_5, \\ x_2=200+x_5, \\ x_3=400, \\ x_4=500-x_5. \end{cases}$$

由此可知,方程组有无穷多组解.

由于本问题中的道路是单行路,变量不能有负值,从而 $0\leqslant x_5\leqslant 500$,其他变量的约束条件为

$$100\leqslant x_1\leqslant 600,200\leqslant x_2\leqslant 700,0\leqslant x_4\leqslant 500.$$

实际生活中的网络流量问题也可用相同的方法来说明.

本章通过求解二元一次方程组和三元一次方程组引入二阶和三阶行列式的定义和行列式值的计算. 以三阶行列式为载体介绍余子式和代数余子式的概念,并推广到 n 阶行列式. 利用代数余子式按第一行(列)展开定义 n 阶行列式之值. 然后利用代数余子式的性质给出 n 阶行列式按任意一行(列)展开的计算公式.

在介绍行列式性质的同时,注意到与第 2 章矩阵初等变换的知识接轨. 利用行列式的性质介绍多种计算行列式的方法,并通过实例透彻说明各种计算方法的应用价值.

当方程组的个数与未知量的个数相等,且方程组系数行列式不为零时,采用克拉默法则,给出方程组的唯一解.

1.1 二阶与三阶行列式

首先讨论解线性方程组的问题.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & ② \end{cases}$$

其中 $x_i(i=1,2)$ 代表未知量, $a_{ij}(i,j=1,2)$ 是 x_j 的系数, $b_i(i=1,2)$ 是常数项.

利用消元法解此线性方程组.

①$\times a_{22}-$②$\times a_{12}$,得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$,

②$\times a_{11}-$①$\times a_{21}$,得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$.

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

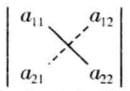
$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

此即该方程组的公式解,但其表达式较复杂,不便于记忆.因此,引入新的记号 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$,并定义:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

称 D 为二阶行列式,其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为 D 的第 i 行第 j 列元素.

二阶行列式是两项的代数和,第一项是从左上角到右下角的对角线(称为主对角线)上两个元素的乘积,取正号;第二项是从右上角到左下角的对角线(称为副对角线)上两个元素的乘积,取负号.这一法则称为对角线法则,见右图.



据此定义,令

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

其中 D_i 表示把 D 中第 i 列换成方程组右边的常数列所得的行列式.

于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组的唯一解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

【例 1】 解线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2=2,\\ 2x_1+7x_2=3.\end{cases}$

解: $D=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{vmatrix}=7-6=1\neq 0$,

$D_1=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=14-9=5$, $D_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1$,

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=5$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=-1$.

下面讨论三元线性方程组的解法：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{*}$$

求解此方程组，可由前两个方程消去 x_3，得到一个只含 x_1,x_2 的二元方程；再由后两个方程消去 x_3，得到另一个只含 x_1,x_2 的二元方程，联立这两个二元方程，消去 x_2，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

为了便于记忆，引入新的记号来表示 x_1 的系数.

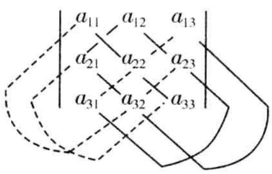
定义 1 由 9 个数按三行三列排列组成的记号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，并定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称 D 为三阶行列式. a_{ij} 称为第 i 行第 j 列元素($i,j=1,2,3$).

上述定义表明：三阶行列式是 6 项的代数和，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积，并带有正号或负号.

三阶行列式可用对角线法则来记忆：实线上三元素的乘积取正号，虚线上三元素的乘积取负号，见下图.



称定义 1 中的 D 为三元线性方程组(*)的系数行列式.

类似于二元线性方程组的解法，令

$$\begin{aligned}D_1&=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32},\end{aligned}$$

则 x_1 可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理可得
$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$
其中 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

D_i 是把 D 中第 i 列换成(*)式右边的常数列所得的行列式.

【例 2】 计算下列行列式

(1)$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; (2)$D=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

解:(1)$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}=1\times1\times6+0\times2\times0+1\times2\times4-1\times1\times0-0\times2\times6$
$-1\times2\times4=6$.

(2)$D=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

【例 3】 解方程
$$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解:$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$,

故解为 $x=1$ 或 $x=3$.

【例 4】 解三元线性方程组
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$$

解:用对角线法则计算行列式,得

$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8,D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8$,

$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=16,D_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=24$,

故解为 $x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=2, x_3=\frac{D_3}{D}=3.$

1.2 n 阶行列式

用对角线法则计算二阶、三阶行列式，虽简便直观，但对于高于三阶的行列式，该法就不适用了. 为求解 $n>3$ 的 n 元线性方程组，有必要把二、三阶行列式推广到 n 阶行列式.

为此，先分析三阶行列式与二阶行列式之间的关系.

由三阶行列式和二阶行列式的定义，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (*)$$

从上式可看出，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和. 这些二阶行列式与原三阶行列式有什么关系呢？为进一步了解，下面引入余子式和代数余子式的概念.

定义 2 在三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中，把元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 所在的第 i 行元素与第 j 列元素划去，剩下的元素按原位置不变所构成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如，在三阶行列式 D 中，a_{12} 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$a_{12}$ 的代数余子式

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由定义 2，(*)式可写成

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

这表明，三阶行列式等于它的第一行每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

事实上，若定义一阶行列式$|a_{11}|$的值为a_{11}，二阶行列式也可用代数余子式表示.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.$$

由此可利用递推的方法，当$(n-1)$阶行列式已予定义，根据代数余子式可给出n阶行列式的定义.

定义 3 由n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式. 并定义D的值为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中a_{ij}称为第i行第j列元素，A_{1j}为$a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式，即一个n阶行列式等于它的第一行诸元素与其对应的代数余子式乘积之和. 这种定义也称为行列式按第一行展开. A_{ij}由划去D中a_{ij}所在的第i行，第j列元素，剩下的$(n-1)^2$个元素按原来排列的顺序所组成的$(n-1)$阶行列式再乘以$(-1)^{i+j}$，称A_{ij}为a_{ij}的代数余子式. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称M_{ij}为a_{ij}的余子式.

n阶行列式是一个数值，有时候，将n阶行列式D简记作$|a_{ij}|$.

【例 1】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解：$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-37-46=-83.$$

【例 2】 证明$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

证明：将等式左端的行列式按第一行展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

【例 3】 求行列式$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$中元素 2 和 -2 的代数余子式.

解:元素 2 在第 3 行第 1 列,其代数余子式

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

元素 -2 在第 3 行第 2 列,其代数余子式

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 29.$$

【例 4】 计算下列 n 阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

称形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行列式为下三角形行列式(诸 $a_{ii} \neq 0$);

称形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行列式为上三角形行列式.

这两个行列式的值都等于 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

这种行列式称为对角形行列式,简记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$.

注　三角形行列式和对角形行列式,均等于主对角线上各元素的乘积.

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{1n}(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2(n-1)} \\ 0 & \cdots & a_{3(n-2)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= a_{1n}(-1)^{1+n} a_{2(n-1)}(-1)^{1+(n-1)} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3(n-2)} \\ 0 & \cdots & a_{4(n-3)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= a_{1n}(-1)^{1+n} a_{2(n-1)}(-1)^{1+(n-1)} \cdots a_{(n-1)2}(-1)^{1+2} a_{n1}(-1)^{1+1}$$

$$= (-1)^{1+n+[1+(n-1)]+\cdots+(1+1)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{2n} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

注 $a_{2(n-1)}$在原行列式的第2行第$(n-1)$列，但在$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2(n-1)} \\ 0 & \cdots & a_{3(n-2)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$中，

$a_{2(n-1)}$在第1行第$(n-1)$列，所以$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2(n-1)} \\ 0 & \cdots & a_{3(n-2)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=$

$$a_{2(n-1)}(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3(n-2)} \\ 0 & \cdots & a_{4(n-3)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.3 行列式的性质

从行列式的定义可看出，当行列式的阶数较高时，直接用定义计算n阶行列式的值相当麻烦，为此介绍行列式的一些性质. 利用这些性质可简化行列式的计算.

将行列式D的行与列互换后得到的新的行列式，称为D的转置行列式，记为D^T或D'，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{则 } D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1 行列式D与它的转置行列式D^T相等，即$D^T=D$.

对于二阶行列式可由定义直接验证.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=D.$$

至于一般n阶行列式可用数学归纳法加以证明.

性质1说明行列式的行与列有相同的地位，凡是行所具有的性质，对于列也一样成立，反之亦然.

性质2 互换行列式的两行(列)，行列式的值变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{(i)\leftrightarrow(j)} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 以(i)表示行列式的第i行，以$\widehat{j}$表示行列式的第j列，交换i,j两行记作$(i)\leftrightarrow(j)$，交换i,j两列记作$\widehat{i}\leftrightarrow\widehat{j}$.

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则行列式为 0.

证明:设D是第i行和第j行相同的行列式，把D的i,j两行对换，由性质 2，有$D=-D$，故$D=0$.

由n阶行列式的定义，似乎行列式的第一行处于一种特殊地位，而性质 2 告诉我们，任何一行均能换至第一行的位置，只需将符号调整，故第一行并不特殊. 以四阶行列式为例加以分析.

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

利用性质 2，有

$$D \xlongequal{(2)\leftrightarrow(3)} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=a_{31}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{33}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{34}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}.$$

这表明行列式亦可按第三行展开. 上面分析具有一般性，由此得到下面的性质 3.

性质 3 n阶行列式的值等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余