

中學校用



卷下

共和國
教科書

代數學

商務印書館出版

新編中學和國教科書

修身要義	國文讀本	英文法	本國史	東亞各國史	西洋史	本國地理	化學	算術	代數學	平面幾何	立體幾何	物理學	法制大要	經濟大要	兵式教練
國語部編前卷上	四冊	第三冊	二卷	一冊	二卷	二卷	一冊	一冊	二卷	一冊	一冊	一冊	一冊	一冊	一冊
每卷	每冊	第一學年	第二學年	第三學年	第四學年	每卷	卷上	卷上	卷上	布面	紙面	布面	紙面	布面	紙面
四角	三角	二角	二角	二角	二角	三角	三角	三角	三角	三角	三角	三角	三角	三角	三角
五分	五分	四分	四分	四分	四分	五分	五分	五分	五分	五分	五分	五分	五分	五分	五分

壬五九號

REPUBLICAN SERIES

Algebra

For Middle Schools

COMMERCIAL PRESS, LTD.

中華民國二年十一月初版

(共和國教科書) 代數學 二(冊)

(卷下 軟布 紙面 每冊定價大洋柒角陸分)

編纂者 紹興駱師曾

校訂者 紹興壽孝天

發行者 商務印書館

印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館

總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館

分售處 北京保定奉天龍江吉林天津濟南開封太原西安成都重慶 商務印書館分館

安慶長沙桂林漢口南昌雲南蕪湖杭州福州廣州潮州香港

※此書有著作權翻印必究※

編輯大意

一本書備中學校代數學教科之用。

一按中學校課程標準。代數之教科。始於第一學年。至第三學年而畢。每年與算術幾何。同時並授。是三年內代數所佔之時間。適得數學全科之半。本書之分量。即依此標準以定之。庶教材與時間。適相應而便於誦習。

一本書分爲上下兩卷。上卷至二次方程而止。應用最廣。下卷自高次方程以上。理論稍深。惟中學程度。應以普通代數爲範圍。故闡發處無不力求簡易。其繁賾深奧之理論。應屬於高等代數者。仍不預爲侵越。

一代數學來自歐西。各種譯名。證以西文。可免歧誤。然若另編中西對照表。未免多費翻檢之時刻。今於名詞初見之處。即用西文原名。附注於後。舉目可得。似於學者更爲便利。

一文字排列之位置。與編輯宏旨。本屬無涉。然適宜與否。於閱者之感覺。亦非毫無關係。設以一貫之算式。而分列於左右兩葉。以一氣之文字。而跨排於前後兩面。則披閱之時。必有感其不便者。本書仍照算術教科書之例。凡單數各面。篇幅終止之處。亦爲文字終止之處。無非爲閱者圖其便利而已。

商 務 印 書 館 出 版

洋裝
一册

世界新輿圖

定價
七元

元 和 奚 若 編 纂

是圖採用中日英法德五國圖籍二十餘種。精繪詳校。迥非直譯一家者可比。譯名精審。且增譯新名。約有三分之一。內容分天文。地理。人文。圖八幅。六洲總圖。各國分圖。三十八幅。城市圖。百餘幅。附記鐵路。航路。運河。海電。及圖例。分率。以便推算。末附統計表。臚列各國政體。教育。財政。國防。交通。商務。以便參攷。

各省摺圖

各省掛圖

(幅一各)

每幅八角

甲種每幅二元五角
乙種每幅一元二角
丙種每幅一元

中國全圖

一册 定價四元

是册首列中國全圖一幅。次各行省。次內外蒙古。次青海及前後藏。合訂一大册。凡鐵路。電線。商埠。租地。無不具載。各省各縣。有新析新置者。悉皆注入。用五彩精印。鮮明奪目。

中國總圖

甲種每幅四元五角
乙種每幅一元八角
丙種每幅一元

是圖調查確實。印刷鮮明。各省分別顏色。所有各縣地名。均照最新分合者更改。並詳加注明。取便學校講授之用。

四川 山東
安徽 湖南
湖北 浙江
江蘇 直隸

江蘇 浙江
安徽 直隸
湖北 山東
湖南 安徽
四川 湖北

本館所製各圖。皆極精密。是圖縱英尺三十七寸。橫二十六寸。數色套印。最為醒目。

以上各種。計縱英尺四十寸。橫五十四寸。校讎精細。符號清楚。彩印鮮明。紙張光亮。

中學三角類教科書

最新中學教科書三角術

謝洪資譯

一元三角

此二書譯自西文
平面球面均全完
備詳明可稱善本

新撰中等平面三角法教科書

顧澄譯

六角

以上三書皆譯
自東文說理明
顯便於講授

球面三角法新教科書

沈秉焯編

六角

新編初等三角法教科書

周藩譯

二角五分

田野實地測量法

王家葵譯

六角

此書專論球面宜
繼前三書而讀之
此書簡要明顯初
入門者尤為適用
此書專論測量便
於實習

三角法難題詳解表

駱師曾譯

八角

以上二書可備
參攷之用

審定部蓋

氏對數

表

杜亞泉譯

六角五分

中學代數學下卷目次

第七篇	乘冪乘根及指數	1-18
第一章	乘冪 問題三十二	1-3
第二章	乘根 問題三十三	4-13
第三章	指數 問題三十四	14-18
第八篇	不盡根, 虛數	19-28
第一章	不盡根 問題三十五	19-25
第二章	虛數 問題三十六	26-28
第九篇	比, 比例, 變數	29-39
第一章	比 問題三十七	29-31
第二章	比例 問題三十八	32-35
第三章	變數 問題三十九	36-39
第十篇	級數	40-60
第一章	等差級數 問題四十	40-44
第二章	等比級數 問題四十一	45-50
第三章	調和級數 問題四十二	51-52
第四章	雜級數 問題四十三	53-60

第十一篇	錯列及組合	61-69
第一章	錯列 問題四十四	61-64
第二章	組合 問題四十五	65-69
第十二篇	二項式定理	70-79
第一章	二項式定理 問題四十六	70-79
第十三篇	對數	80-100
第一章	對數之性質 問題四十七	80-88
第二章	指數級數及對數級數 問題四十八	89-94
第三章	複利及年金 問題四十九	94-100
第十四篇	雜算法	101-121
第一章	分離係數法 問題五十	101-102
第二章	不等式 問題五十一	103-106
第三章	記數法 問題五十二	107-112
第四章	不定方程式 問題五十三	113-121
第十五篇	圖解	122-138
第一章	定義 問題五十四	122-125
第二章	一次方程式之圖解 問題五十五	126-132
第三章	二次方程式之圖解 問題五十六	137-138
答數		1-8

共和國教科書

中學代數學下卷

第七篇 乘冪乘根及指數

第一章 乘冪

118. 正整數之乘冪 設 m, n, p , 皆爲正整數。

由 §4 $a \times a \times a \times \dots$ 至 n 因數 $= a^n$,

由 §33 $a^m \times a^n \times a^p \times \dots = a^{m+n+p+\dots}$

以 $(a^m)^n$ 表 a^m 之 n 乘冪。則 $(a^m)^n$ 者爲 a^m 自乘至 n 次。故其指數 m 須累加至 n 次。即可以 n 乘 m 爲其指數。

故 $(a^m)^n = a^{mn}$.

故某數之乘冪自乘若干次。等於此數之乘冪。而以二指數之積爲指數。

119. 積之乘冪 設 n, p, q, r 皆爲正整數。

則 $(ab)^n = ab \times ab \times ab \times \dots$ 至 n 因數

$= (a \times a \times a \times \dots \text{至 } n \text{ 因數}) (b \times b \times b \times \dots \text{至 } n \text{ 因數})$

$= a^n b^n$.

仿此。 $(abcd\dots)^n = a^n b^n c^n d^n \dots$.

$(a^p b^q c^r \dots)^n = a^{np} b^{nq} c^{nr} \dots$.

故積之乘冪。等於其各因數同乘冪之積。

120. 分數之乘冪 設 n, p, q, r, s 皆為正整數。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

$$\text{仿此。} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \left(\frac{a^p}{b^q}\right)^n = \frac{a^{np}}{b^{nq}},$$

$$\left(\frac{a^p b^q}{c^r d^s}\right)^n = \frac{a^{np} b^{nq}}{c^{nr} d^{ns}}.$$

故分數之若干乘冪等於一分數。以原分母之同乘冪為分母。原分子之同乘冪為分子。

121. 負數之乘冪 由乘法之指數定則。

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = a^2,$$

$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = a^2(-a) = -a^3,$$

$$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = (-a^3)(-a) = a^4,$$

$$(-a)^5 = (-a)^4(-a) = a^4(-a) = -a^5.$$

故負數之偶數冪為正數。奇數冪為負數。

又設 n 為任何正整數。則 $2n$ 可表偶數一切之形。 $2n+1$ 可表奇數一切之形。因得下式。

$$(+a)^{2n} = a^{2n}, \quad (-a)^{2n} = a^{2n}.$$

$$(+a)^{2n+1} = a^{2n+1}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

故就正數負數總括言之。凡偶數冪為正數。奇數冪與原數同其符號。

122. 多項式之乘冪 可依乘法之公式求之。茲再記其公式於下。

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5.$$

$$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2ac + 2bc.$$

$$(a \pm b \mp c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \mp 2ac - 2bc.$$

$$(a \pm b \pm c)^3 = a^3 \pm b^3 \pm c^3 \pm 3a^2b \pm 3a^2c \pm 3b^2c + 3b^2a \\ + 3c^2a \pm 3c^2b + 6abc.$$

$$(a \pm b \mp c)^3 = a^3 \pm b^3 \mp c^3 \pm 3a^2b \mp 3a^2c \mp 3b^2c + 3b^2a \\ + 3c^2a \pm 3c^2b - 6abc.$$

此種公式去左邊之括號而得右邊之式。謂之展開 *Expand*。其條段次序。有一定之法則。容後第十二篇中詳述其理。此處但默記之可耳。

問題 三十二

去下列各式之括號。

$$1. (2a^2)^3.$$

$$2. (-3a^2b^3)^2.$$

$$3. (-xy^2z^3)^{2n}.$$

$$4. (-xy^mz^{2m})^{2n+1}.$$

$$5. \left(\frac{5ab^2}{3x^2y^3}\right)^3.$$

$$6. \left(\frac{-2x^2y^3z}{3a^2b^3}\right)^2.$$

展開下列各式。

$$7. (2a+b)^2.$$

$$8. (3a-2b)^2.$$

$$9. (a^2+2c^2)^3.$$

$$10. (5x^2-2y^3)^3.$$

$$11. (2x-3y^2)^4.$$

$$12. (3a+4b)^4.$$

$$13. (2+3a^2x^2-4a^4x^4)^2.$$

$$14. (2-3x+x^2)^2.$$

$$15. (2x-y+3z)^3.$$

$$16. (2+x^2-x)^3.$$

第二章 乘根

123. 乘根之性質 一數之平方根恆有二。其一爲正數。他一爲負數。如 a 之平方根爲 $\sqrt{a}$ 及 $-\sqrt{a}$ 。惟通常以正數之方根表之。故僅以 $\sqrt{a}$ 表 a 之平方根。

一數之立方根恆有三。

由前 §112 例 4。如 1 之立方根有三。即 $1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ 。若以希臘字 ω (讀爲亞美加) 代其任一虛數。

$$\text{如 } \omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{則 } \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

$$\text{如 } \omega = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad \text{則 } \omega^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

故 1 之立方根爲 $1, \omega, \omega^2$ 。

又如求 a^3 之立方根。則 $x^3 = a^3$ 。即 $\frac{x^3}{a^3} = 1$ 。即 $\left(\frac{x}{a}\right)^3 = 1$ 。而適合於此方程式中 $\frac{x}{a}$ 之值。有 $1, \omega, \omega^2$ 之三種。故此方程式之根。即 a 之立方根。爲 $a, a\omega, a\omega^2$ 。

由是一有理數之立方根恆有三。其中一爲實數。他二爲含虛數之數。惟通常以實數之方根表之。故僅以 $\sqrt[3]{a}$ 表 a 之立方根。

同理。任何數之 n 乘根有 n 個。此定理之證明。在初等代數學範圍之外。故本書不載。以後凡如 $\sqrt[n]{a}$ 者。皆表 a 之 n 乘根之實數。若實數有正負二種。則皆表其正數。

由是凡正數之偶數乘根。其實根必有正負二個。

凡有理數之奇數乘根。其實根僅有一個。

凡負數之偶數乘根。皆含虛數。

124. 整數之乘根 由 §118 之理。某數之 n 乘幂。即以 n 乘其指數。反之。則某數之 n 乘根。即以 n 除其指數。

$$\text{故 } (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

$$\text{則 } (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n = \{\sqrt[n]{a}\}^n = a.$$

$$\text{即 } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

故某數若干乘根之若干乘根。等於此數之乘根。而以二個根指數之積爲根指數。

125. 積之乘根 由 §119. 積之乘幂。等於其各因數同乘根之積。

$$\begin{aligned} \text{故 } (\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \times \dots)^n &= (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n (\sqrt[n]{c})^n \dots \\ &= abc \dots \end{aligned}$$

$$\text{即 } \sqrt[n]{abc \dots} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \dots$$

故積之乘根。等於其各因數同乘根之積。

126. 分數之乘根 由 §120.

$$\text{則 } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{即 } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

故分數之若干乘根。等於一分數。以原分母之同乘根爲分母。原分子之同乘根爲分子。

127. 開平方法 *Extraction of square root* 求多項式之平方根。其簡單者。可應用 §122 中 $(a \pm b)^2$ 及 $(a \pm b \pm c)^2$ 等之公式。由視察而知之。其複雜者。則用開平方之普通法則。茲先述用公式求平方根之法。

例 1. 求 $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$ 之平方根。

$$\begin{aligned} 4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4 &= (2x)^2 - 2(2x^2)(3y^2) + (3y^2)^2 \\ &= (2x^2 - 3y^2)^2 \text{〔由 } (a - b)^2 \text{ 之公式〕。} \end{aligned}$$

故所求之平方根爲 $2x^2 - 3y^2$ 。

〔注意〕平方根有正負二種。茲用其正者。如用其負。則變其符號即得。

例 2. 求 $9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 6ac + 4bc$ 之平方根。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (3a)^2 + (2b)^2 + c^2 + 2(3a)(2b) + 2(3a)c + 2(2b)c \\ &= (3a + 2b + c)^2 \text{〔由 } (a + b + c)^2 \text{ 之公式〕。} \end{aligned}$$

故所求之平方根爲 $3a + 2b + c$ 。

$$\begin{aligned} \text{或原式} &= 9a^2 + 12ab + 4b^2 + 6ac + 4bc + c^2 \\ &= (3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2 + 2(3a + 2b)c + c^2 \\ &= (3a + 2b)^2 + 2(3a + 2b)c + c^2 \text{〔由 } (a + b)^2 \text{ 之公式〕} \\ &= (3a + 2b + c)^2 \text{〔由 } (a + b)^2 \text{ 之公式〕。} \end{aligned}$$

128. 茲述開平方之普通法則。先就 $a^2 + 2ab + b^2$ 之平方根爲 $a + b$ 考之。

先將原式之各項。順某文字之降冪列之。但於此例。以順 a 之降冪排列爲便。

首項 a^2 之平方根爲 a 。以

$$a^2 + 2ab + b^2 (a + b)$$

此爲所求平方根之首項。將

$$a^2$$

a 之平方即 a^2 從原式減之。

$$2a + b) 2ab + b^2$$

得餘式 $2ab + b^2$ 。次以平方根

$$2ab + b^2$$

首項之二倍即 $2a$ 除以此餘式之首項。得 b 。以此爲所求平方根之第二項。將根之首項之二倍與其第二項相加即 $2a + b$ 。以根之第二項即 b 乘之。得 $2ab + b^2$ 。從上之餘式減之。其差爲 0。故演算至此完畢。

上例若第二餘式不爲 0。則以 $a + b$ 之二倍除第二餘式。其得商之首項。爲所求平方根之第三項。於此項加 $a + b$ 之二倍。其和再以此項乘之。而由第二餘式減去。如是次第求之。至無餘式而止。

例 1. 求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$ 之平方根。

先依 a, b, c 之次序。順其降冪列之後用上法開方。

$$a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2 (a + b + c + d)$$

$$a^2$$

$$2a + b) 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$$

$$2ab$$

$$+ b^2$$

$$2a + 2b + c) 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$$

$$2ac$$

$$+ 2bc$$

$$+ c^2$$

$$2a + 2b + 2c + d) 2ad + 2bd + 2cd + d^2$$

$$2ad$$

$$+ 2bd$$

$$+ 2cd + d^2$$

故所求之平方根爲 $a + b + c + d$ 。

例2. 求 $4x^6 + 80x^4 - 8x + 60x^3 + 32x^5 + 1$ 之平方根。

先順 x 之降冪列之。後用上法開方。

$$\begin{array}{r}
 4x^6 + 32x^5 + 80x^4 + 60x^3 \qquad -8x + 1(2x^3 + 8x^2 + 4x - 1) \\
 \underline{4x^6} \\
 4x^3 + 8x^2) 32x^5 + 80x^4 + 60x^3 \qquad -8x + 1 \\
 \underline{32x^5 + 64x^4} \\
 4x^3 + 16x^2 + 4x) 16x^4 + 60x^3 \qquad -8x + 1 \\
 \underline{16x^4 + 64x^3 + 16x^2} \\
 4x^3 + 16x^2 + 8x - 1) -4x^3 - 16x^2 - 8x + 1 \\
 \underline{-4x^3 - 16x^2 - 8x + 1} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

故所求之平方根爲 $2x^3 + 8x^2 + 4x - 1$ 。

例3. 求 $x^6 + 4x^5 - 10x^3 + 4x + 1$ 之平方根。

$$\begin{array}{r}
 x^6 + 4x^5 \qquad -10x^3 \qquad +4x + 1(x^3 + 2x^2 - 2x - 1) \\
 \underline{x^6} \\
 2x^3 + 2x^2) 4x^5 \qquad -10x^3 \qquad +4x + 1 \\
 \underline{4x^5 + 4x^4} \\
 2x^3 + 4x^2 - 2x) -4x^4 - 10x^3 \qquad +4x + 1 \\
 \underline{-4x^4 - 8x^3 + 4x^2} \\
 2x^3 + 4x^2 - 4x - 1) -2x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \\
 \underline{-2x^3 - 4x^2 + 4x + 1} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

故所求之平方根爲 $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ 。

[注意] 算術中開一數之平方，有能開盡者，有不能開盡者，而代數學中開一式之平方亦然，故凡用上法無論開至何處，其餘式終不爲 0 者，即可知原式不能開盡，但用根號加於原式以表示之可也，例如 $b^2 - 4ac$ 之平方根，可以 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ 表之。

129. 數目開平方 由前節之法。可知算術中開平方法之理由。茲示一例於下。

例. 求 576081 之平方根。

$$\begin{array}{r}
 57 \overline{) 6081} \quad \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\
 \underline{a^2 = 49 \ 00 \ 00} \\
 2a + b = 1450 \overline{) 8 \ 60 \ 81} \\
 \underline{(2a + b)b = 7 \ 25 \ 00} \\
 2a + 2b + c = 1509 \overline{) 1 \ 35 \ 81} \\
 \underline{(2a + 2b + c)c = 1 \ 35 \ 81}
 \end{array}$$

故所求之平方根爲 759。

130. 開立方方法 *Extraction of cube root* 求多項式之立方根。其簡單者。可應用 §122 中 $(a \pm b)^3$ 之公式。由視察而知之。其複雜者。則須用開立方之普通法則。茲先述用公式求立方根之法。

例 1. 求 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ 之立方根。

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (x)^3 - 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 - (2)^3 \\
 &= (x - 2)^3 \text{ (由 } (a - b)^3 \text{ 之公式).}
 \end{aligned}$$

故所求之立方根爲 $x - 2$ 。

例 2. 求 $27x^3 + 54x^2y + 36x^2y^2 + 8x^2y^3$ 之立方根。

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(2xy) + 3(3x^2)(2xy)^2 + (2xy)^3 \\
 &= (3x^2 + 2xy)^3 \text{ (由 } (a + b)^3 \text{ 之公式).}
 \end{aligned}$$

故所求之立方根爲 $x(3x + 2y)$ 。