面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数

第三版

郝志峰　谢国瑞
汪国强　刘　刚　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

线性代数

Xianxing Daishu

第三版

郝志峰 谢国瑞
汪国强 刘 刚 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。内容包括矩阵，消元法、初等变换与初等矩阵，行列式，秩，矩阵特征值问题，向量空间等共6章。全书取材的深广度合适，注意联系应用，符合大学本科教学对线性代数课程的教学要求与实际需要。本书材料丰富，内容展开的思路清晰，易读、好教，有利于读者掌握知识、发展思维与提高能力。书中配有应必做的练习和可选做的习题，并大都附有参考答案，对初学者可有所帮助。本书第二版有配套的辅导用书（参考书目［2］）及英文译本（参考书目［23］）。

本书可作为高等学校非数学类专业线性代数课程的教材，也可作为教学参考书或供考研复习使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/郝志峰等编著.—3版.—北京：高等教育出版社，2013.10

ISBN 978-7-04-038225-9

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①郝…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第181594号

策划编辑　李　茜　　责任编辑　李　茜　　封面设计　张　志　　版式设计　马敬茹
插图绘制　郝　林　　责任校对　李大鹏　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm×960mm　1/16		
印　　张	17.5	版　　次	1998年3月第1版
字　　数	300千字		2013年10月第3版
购书热线	010-58581118	印　　次	2013年10月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	25.80元

物 料 号　38225-00

第三版前言

本书相较前一版作了较大调整,以适应课程教学的实际需要。由于矩阵计算的广泛应用,使得以矩阵为主要内容的线性代数,几乎成了大学阶段必学的一门数学课程。此次再版,力图使本书在保持达到课程教学基本要求及满足全国硕士研究生入学统一考试对线性代数要求的前提下,通过适当分散难点后,在便于教、学方面有大的提高。

全书从规定矩阵这个新数学对象起,第 1 章讲述矩阵及其基本运算,包括重要的矩阵乘法和逆矩阵概念,讨论了运算法则及分块。第 2 章从求线性代数方程组唯一解的 G-J 消元法入手,引入矩阵的行初等变换,并朝两个方向作了推广:用于同时求多个具相同系数矩阵方程组的唯一解(从而可算出逆矩阵);及用行初等变换法讨论一般的 $m\times n$ 方程组的解。对于在线性代数中有特殊地位的齐次方程组也给予关注,在这里,初涉了解空间的称谓。在引入初等矩阵后,讨论了几个矩阵的分解式,这样做是为强化对矩阵乘法的掌握,更是为了便于引出解实际问题有效的方法(正如数的运算中,因数分解,既是对乘法的提升,更有其独立的作用)。第 3 章起的三章,分别讨论与矩阵相关联的三个数字:方阵的行列式、秩、方阵的特征值。行列式的讨论被适度简化了。在秩的一章中,先后论及矩阵秩和向量集的秩两个不全相同又有所相通的概念,这里还介绍了矛盾方程组的最小二乘解等;在讨论特征值、特征向量时,强调的是矩阵对角化及其一些应用。二次型可建立与实对称矩阵的一一对应关系,故安排其与实对称矩阵正交对角化一起进行讨论。最后一章介绍有限维向量空间的一般概念,之前讨论过的向量线性相关性在这里以较一般的面目再次出现,形成了基和维的重要概念,这样,坐标向量就是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量。本章还介绍了欧几里得空间正交基及正交投影等概念,以矩阵的 QR 分解结束。

全书的编写紧凑但并不浓缩,为限制篇幅还宁愿割舍了一些有意义的相关课题(特别是有关矩阵计算初步知识及线性变换的概念等)。在线性代数中,对概念及理论的理解和通晓计算的方法是同样重要的。实践中,虽然数值计算部分由计算机来完成,但你必须有能力选取合适的方法,并对计算的结果作出合理的解释。因此,示例和习题中的数字虽相对简单,但均非单纯追求答案,重在训练方法,助你对课本知识的全面掌握,提高应对问题的能力,故对习题均宜在掌握方法后再行解出。

以本书作为教材，可视教学时数情况组合内容，成为一个课程，例如，若只有30学时左右的上课时间，在略去一些带 * 号部分的内容并将4.3节内容推后讲授后，可望能讲到矩阵对角化（即5.2节）而无损于教学的连贯性。这样，已能满足不少专业对矩阵知识的初步要求了。对于向量空间知识有较高要求的专业或学生，可以选读第6章。新版的这一章，比局限在 $\mathbf{R}^n$ 讨论的要求有所提高，从中也可接触一些抽象的思维方法。书中以两种形式安排了一定量的习题：按章给出的习题及按节给出的练习，为便于查找与比较，集中置于书的后面部分，附有答案，有的还作了解释，与课文互补，相信对初学者会有所裨益。

编者们在读书、教书、编书过程中，有一些话语不经意间常在影响我们，甚而在本书中也不难觅见踪影，现摘录部分于下，与大家分享："大学教书不是照本讲……在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学们所提意见的影响……我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念，重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出。目的在于将来进一步学习时会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已。（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已。）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故。找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透。有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明。'数'与'形'的'分'和'合'，'抽象'和'具体'的'分'与'合'都是在反复又反复的过程中不断提高的。"①

最后，必须说明本书再版的工作是在华南理工大学和西交利物浦大学校领导的大力支持下完成的。感谢华南理工大学理学院、西交利物浦大学数理中心以及两校教务等领导部门对编写本书的关心和支持。特别要感谢西交利物浦大学数理中心的郭镜明教授、应明教授、牛强博士，他们的许多中肯意见，使本书增色不少。还要感谢刘丽英老师、朱安昀老师以及马菲、费杰博士等的真诚帮助。许多学生对编写本书的关心和支持令编者们倍受鼓舞，但终因编者水平及编写时间均有限，书中定存未尽善处，敬请批评指正。

编　者

于广州大学城

2013年2月

① 华罗庚，《高等数学引论》，第一卷第一分册序言。北京：科学出版社，1963年。

第二版前言

这本《线性代数(第二版)》是由原书[1]前五章改编而成,力求更好地符合课程教学需要,为大学本科(工科、经济类等)各专业的线性代数课程提供一本合适的教材。

线性代数是代数学中主要处理线性关系问题的一个分支,以向量空间及其线性变换,以及与此相联系的矩阵理论为中心内容。但对于非数学专业的大学生,线性代数大都是被作为应用数学的基础和重要组成部分来学习的。要求学生在学习线性代数课程之后做到,切实掌握最基础部分的线性代数方程组,理解并能运用矩阵、行列式、向量等数学语言,了解其在描述、简化、解决问题时所起的独特作用,并与其他数学课程的相互联系,共同构筑成终身学习的数学基础。根据这样的认识,我们编就了由目录所示六个章次组成的教材,基本上涵盖了各专业对本门课程的教学要求与实际需要。以最简单的线性问题,解线性代数方程组为线索贯穿全书,矩阵、向量等概念则在讨论中自然地出现,并形成互动地推向纵深的格局;行列式则作为工具,体现了在定义概念、表述理论、给出公式中的重要作用。这样的安排,目的是使学生读来能较为亲切,在课程的进展中因能清楚地意识到在不断提高认识的层次而得到鼓励。此外,本书还有以下一些特点,倘能善加利用,当可提高学习效果:

1. 全书起点较低 从熟知的解线性代数方程组的消元法开始。这样做,应能使所有学生在学习线性代数时从同一起跑线出发。事实上,第一章对许多学生来说可能都只是个简要的回顾。

2. 应用示例较多 线性代数中的概念较多,而且往往只是简单的定义,无从解释意义(与导数、积分等概念很不一样),书中辅以较多的应用示例及与相近数学课程联系的内容,力求使内容显得较为丰满,不觉干瘪枯燥。

3. 定理证明的结束有明显的标记号▌ 线性代数有许多的定理,这些往往成为学生学习上的难点。但作为课程的要求,大都只是要求了解或掌握定理的内容而未必是其证明。对证明结束给出明显标志,可为读者带来方便,在初读

---

[1] 原书《线性代数及应用》由八章内容组成。该书曾获 2001 年上海市教学成果奖(二等奖),教育部 2002 年全国普通高等学校优秀教材一等奖。

时，对大多数的定理均可直接越过证明往下读，到有必要时再回过来看证明的细节。而掌握定理的内涵，主要应通过运用定理去证明推论、解决问题，这些当然是在初学时就必须引起足够重视的。初读时越过大段的证明，不仅可避开一些不应有的难点，而且也有利于较好地掌握理论的全貌，有效地提高学习兴趣。

4. 系统使用 * 号标记和指出参考书目 学生在学习线性代数时，常会因发现在其他领域的应用或与其他数学课程的联系而受到鼓舞①。但学时有限、教材篇幅也有限，这里用带 * 号的节、段等表示此为应用性的材料或与相近数学课程有联系的材料，若因时间不够暂且搁下不读是无损于连贯性的。在一些场合，学生可能因感到教材内容应有所发展而心存疑窦，这时就用指出参考书目来引领学生迈出新的一步。

5. 附有历届硕士研究生入学考试的线性代数试题 让学生在初次学习课程时就接触这些试题有助于学生测试自己的水平，以正确定位。而按年份先后录入试题，不仅给出了考研要求的具体体现，而且从中还可探索试题演变的信息。

最后，我们要对教育部高教司的领导和专家组的专家给予我们以编写这本国家级规划教材的荣誉和信任表示由衷的感谢，也要对高等教育出版社及理工分社的各位领导的支持表示感谢。在本书的成书过程中，曾获得全国教育科学“十五”规划重点课题（高水平大学数学教育特点的研究与实践，课题编号为DIA010305）、全国高等学校教学研究会研究课题（国家教学基地优秀教学成果的总结与推广，课题编号为 C227）、2001—2002 年度广东省哲学社会科学规划立项课题（建构和推进广东省大学数学创新教育体系的研究与探索，课题编号为H28）、教育部“新世纪网络课程建设工程”项目（大学数学系列课程，项目编号为14410011）和华南理工大学研究生教育与学科建设课题（高水平理工大学研究生培养的数学素质要求与培养模式的研究与实践，课题编号为 121 - N71650）等项目研究的资助，并得到华南理工大学、学校教务处、华南理工大学国家工科基础课程数学教学基地的支持，在此也一并致谢。

参加本书编写的有郝志峰、谢国瑞、汪国强、刘丽萍、陈洁蓓等。囿于编者们的水平和见闻，书中难免留存错、漏或欠妥之处，敬请专家、读者批评指正。

编　者

2003 年 2 月

① 编者曾经历，有学生在学习数学物理方程中施图姆-刘维尔（Sturm - Liouville）理论时，因发现那里与本书习题 6 - 17 的 **A** 具类似的性质（特征向量规范、正交、生成全空间），而导致解决问题的方法几乎就是解 6 - 17 的线性代数方程组方法的推广而兴趣倍增。

第一版前言

近年来，大学线性代数的教学有了很大的发展：一些以前在大学阶段不上数学课的文科及艺术类专业的学生也开始在修习线性代数；而工学、经济学类的不少专业更正逐步提高着对线性代数课程的教学要求，向加强基础、计算与应用的方向推进。编写本书是想为工科大学生提供适应发展要求的一本线性代数教材，也为其他的大学生或在职人员提供一本合适的参考用书。

本书前五章(除带星号部分)的内容涵盖了该课程教学基本要求规定的全部内容，若再加上6.2.1段，则能满足工学、经济学硕士生入学考试对线性代数的考试要求。这些内容在教师指导下，略去少数定理证明的细节(学生应切实掌握每个定理推论的证明)，可作为36学时的课程教材用。在这里，一些最基本的概念、方法、论题被安排成多次出现，在运用中逐步展开与深入，使在较短的学程(或很少周学时)内能有必要的反复，以利于读者牢固地掌握；对定理和推论加上阴影以引起注意，并为每项证明加上了结束符号，初读(预习)时可容易地越过证明细节去抓住主题的发展线索；对相近而又有异的术语、概念及相关的命题，在编纂索引时都专列了条目，供复习时集中比较、对照；为锻炼、提高自学与处理问题的能力，这里的概念、术语、符号都注意了与当代文献的应用相衔接，并结合内容的展开，用较少篇幅介绍了线性代数在管理、化工、振动、微分方程、优化等领域的一些应用示例，以窥用数学方法处理实际问题时，在描述、分析、预测、控制方面发挥独特作用之一斑。

在编写后三章时，并未想对所选题目作广泛论述；相反，只是环绕教学目标作了有限的展开，注意巩固已有的知识和为进一步学习、应用打好基础。第6章对线性变换的讨论，是按使多数工科学生较易接受的方式和途径循序前进的，在这里，前五章讨论的基本问题可得到深一层的认识，同时也为学习一般理论铺垫了一个坚实的台阶。设想中，这一章的学习，应该是可以在教师指导下通过自学及书写读书报告完成的。第7章、第8章将读者引向两个备受关注的领域，可与前几章一起组成革新课程的教材。事实上，在没有足够时间去选修单独设课的“计算方法”或“线性规划”的情况下，这两章的材料，作为这两门课程的初阶，对多数学生是有价值的。

虽说本书主要是为工科大学生设计、编写的教材，但是如果在第4章的4.2

节后直接进入第 8 章,应该也能适应一些专业的教学要求。当然,还可以其他次序组合使用本书。

在本书编写过程中,施惠娟、邵晓华、汪国强(华南理工大学)、史荣昌(北京理工大学)分别写过部分初稿及提供了一些有用素材。俞文鮆(华东理工大学)、岑嘉评(香港中文大学)等教授先后审阅了初稿;刘丽萍同志对书稿做了细致的打字、加工工作;陆元鸿为本书第 7,8 章涉及的一些计算方法编制了专用的软件,为本书进行教改试点提供了便利。对以上这些真诚的帮助,我在此深表谢意。我也要对学校的各级领导、教研室同事,特别是成千上万过去或现在听我讲这门课的学生们表示由衷的感谢,没有他们多年来持续的支持、鼓励,是不会形成本书的。最后,我要感谢教育部的有关部门给我以编写这本“九五”国家级重点教材的荣誉和信任,感谢教育部工科数学课程教学指导委员会副主任汪国强教授主持了本书稿的审稿会,感谢与会专家骆承钦(主审)及苏化明、王国瑾、管平等教授提出的宝贵意见,感谢教育部重点教材建设管理委员会、高等教育出版社对本书出版所给予的大力支持。

囿于个人的见闻和水平,书中难免留存错、漏及欠妥之处,敬祈专家、读者批评指正。

谢国瑞

1997 年岁末于

华东理工大学

目　录

第 1 章

矩　阵

本章介绍矩阵的基本概念和运算，通过示例、习题说明其由来及运算的基本法则，对在解决问题、解释结果中有用的技巧（特别如矩阵的按列分块或向量合并成矩阵）也作了讨论.

1.1 基 本 概 念

1.1.1 矩阵的概念

定义 1 $m \cdot n$ 个元［素］[①]排成 m 行(row)n 列(column)（横称行，纵称列）的矩形阵列（表）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

称为维是 $m\times n$ 的矩阵(matrix)，也称为 $m\times n$［型］矩阵[②]，常用大写黑斜体字母如$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…记之，必要时也可以下标来区别不同的矩阵，如$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，….

在书写矩阵时，也有将(1-1)的 $m\times n$ 矩阵用圆括号写作

① 在行文中方括号内的文字，表示约定"可略去或不读".

② matrix 这个词是西尔维斯特(James Joseph Sylvester，1814－1897)于 1850 年首先使用的.

西尔维斯特是犹太人，在他取得剑桥大学数学荣誉会考一等第 2 名的优异成绩时，仍被禁止在剑桥大学任教. 从 1841 年起他接受过一些较低的教授职位，也担任过书记官和律师，经过一些年的努力，他终于成为霍普金斯(Hopkins)大学的教授，并于 1884 年七十岁时重返英格兰成为牛津大学的教授，他开创了美国的纯数学研究，并创办了《美国数学杂志》，在长达五十多年的时间内，他是行列式和矩阵理论始终不渝的作者之一. 他的主要贡献是组合的思想和从较具体的发展中进行抽象. 本书 5.3.4 节介绍以他名字命名的惯性律(1852).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

另外,在不致引起混淆时还常将(1-1)简记作

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$$

这里的 a_{ij} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的代表性元(简称为矩阵的 i-j 元,当然地,应有 $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$,下同),矩阵的元常用与矩阵符号相应的"白体"小写(也可用大写,但本书不用)字母表示,而所带的两个下标则分别示明该元在矩阵中所处的行号及列号. 如对于 3×4 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 14 & 19 \end{bmatrix}$$

有 $a_{21}=15, a_{33}=14$ 等.

在叙述普遍规律或从前后文容易明确时,一般就不特别指明所涉及矩阵的维,而在必要时常用

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} \text{ 或 } \underset{m\times n}{\boldsymbol{A}}$$

表明 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵.

1.1.2 一些特殊的矩阵

矩阵(1-1)的元可以是实数,也可以是复数(虚数),或者元本身就是个矩阵或其他更一般的数学对象. 我们分别称这种矩阵为实矩阵、复矩阵、超矩阵等. 本书主要在实数范围内展开,除预作说明外,**一般涉及的总是实矩阵**.

从矩阵的形状看,遇到最多的是在(1-1)中 $m=n$ 的情形. 这时,就称之为 **n 阶方阵**或 **n 阶矩阵**. 今后常将 1 阶矩阵作为数对待,但是,决不可将数看作 1 阶矩阵. 另外,只有一列(即 $n=1$)或一行(即 $m=1$)的矩阵也常碰到,分别称为列矩阵或行矩阵,亦称为列向量或行向量. 作为列向量,常用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 记之,而行向量则常被记作 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}, \cdots$ 或 $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \cdots$. 如

$$\begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}$$

是个 2 阶矩阵,而

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

是个 2×1 的列矩阵,也可当作列向量. **就向量而言,称其元为分量,分量的个数即为向量的维**,故所谓 n 维向量,即 n 个数的一个有序数组,亦即是个 $n\times 1$ 的列

矩阵，或 $1\times n$ 的行矩阵. 这样，称(1-2)是 2 维向量，**今后凡未作特别说明，讲到向量均指列向量**，在用同一字母代表不同向量时，常以下标区别，如 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots$. 并将全体 n 维列向量的集合记作 $\mathbf{R}^n$，于是，对(1-2)的列向量，就可记作 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2$.

从矩阵中零元的分布位置看，也可区分出几种常见的特殊形式的矩阵. 例如，下列 5×6 矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

中，有很多元是零，根据其特征，称之为**梯矩阵**. 一般地，有如下定义：

定义 2 称对 $k=1,2,\cdots,m-1$ 满足以下两个条件的 $m\times n$ 矩阵为梯矩阵(echelon matrix)：

(1) 若第 k 行是零(即该行的元全为零)，则第 $(k+1)$ 行(若存在)必是零.

(2) 若第 $(k+1)$ 行是非零行，则该行的首非零元所在的列号，必大于第 k 行首非零元所在的列号.

例 1 说明

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为梯矩阵.

解 $\boldsymbol{A}$ 的第 1,2,3 行是三个非零行，其首非零元 3、8、5 分别处于第 2、3、5 列，即这些元之前的零元个数分别是 1、2、4 个，而且全零行之下已无非零行，$\boldsymbol{A}$ 满足定义 2 的全部条件，故 $\boldsymbol{A}$ 是个梯矩阵.

可见，检查一个矩阵是否为梯矩阵可从第一行起依次往下考察，若各非零行的首非零元所处的列号递增，一旦遇到元全为零的行(可以没有这样的行)，且其下的行全为零，则该矩阵为梯矩阵.

容易看出，(1-3)是梯矩阵，特别地，像

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也都是梯矩阵.

一个梯矩阵，若各非零行的首非零元等于1，且该元所在列的其余元皆为0，则称这样的梯矩阵为**简化梯矩阵**(reduced echelon matrix)，(1-3)就是个简化梯矩阵.

下面专对常用的 n 阶方阵引入一些特殊的方阵名称.

对于方阵，称自其左上角元起到右下角元止的连线为矩阵的**主对角线**. 对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 而言，$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 构成其主对角线. 并称元 $a_{i,i+1}$ 位于 $\boldsymbol{A}$ 的上对角线上，而元 $a_{i,i-1}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的下对角线上.

在下列这个4阶矩阵中，δ 表明其主对角线位置，而 μ 及 λ 分别标示上、下对角线位置：

$$\begin{bmatrix} \delta & \mu & \times & \times \\ \lambda & \delta & \mu & \times \\ \times & \lambda & \delta & \mu \\ \times & \times & \lambda & \delta \end{bmatrix}$$

若一个 n 阶矩阵的非零元只出现在对角线及其上(或右)方，就称为**上三角[形矩]阵**(upper triangular matrix)，有时用 $\boldsymbol{U}$ 或 $\boldsymbol{R}$(right)记之. 如

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是4阶上三角阵，值得注意的是，对角线下(或左)方的元必为零而其他元可以是零也可以不是零. 现在，这个上三角阵，正好还是个梯矩阵. 相反，非零元只出现在对角线及其下(或左)方的方阵为**下三角[形矩]阵**(lower triangular matrix)，记作 $\boldsymbol{L}$(left). 如

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

是个3阶下三角阵.

一般而言，对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，当 $i>j$ 必 $a_{ij}=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵，而当 $i<j$ 必 $a_{ij}=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 是下三角阵.

一个既是上三角又是下三角的矩阵称为**对角[矩]阵**(diagonal matrix)，亦即对角阵是非零元只能在主对角线上出现的方阵，如

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$