随机信号与系统

Suiji Xinhao Yu Xitong

潘仲明 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

随机信号与系统

潘仲明　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书详尽介绍了随机过程、最优估计、时间序列模型和线性动态系统辨识、谱估计与小波分析、最优滤波与状态估计等理论方法及其应用实例，并编配了各章知识要点和习题。重点阐述如何从自然科学和工程技术描述的复杂系统中提炼出简练而又符合现实的随机信号或随机系统模型，进而选用恰当的理论方法来更好地解决工程测试、微弱信号检测与系统辨识等工程实际问题。全书选材精当，基本概念表述清晰、公式推导过程严谨、工程应用实例丰富、MATLAB 算法程序简明易懂，符合工科读者的思维习惯和认识规律。

本书适合作为高等学校自动化、仪器仪表、电气工程、机械工程、电子信息工程和医学生物信息技术等专业的研究生教材，也可供从事工程测试、目标探测、无损检测、装备故障诊断、系统辨识、过程控制和现代信号处理等技术专题研究的科技工作者进修参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号与系统/潘仲明编著. —北京：国防工业出版社，2013. 8

ISBN 978-7-118-08942-4

Ⅰ.①随… Ⅱ.①潘… Ⅲ.①随机信号－信号理论②随机信号－信号分析 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 175014 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷责任有限公司

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 25 字数 518 千字

2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 63.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前 言

科学发现、技术发明、工程建设和各类自动化系统的开发，必然涉及随机过程、参数估计与系统辨识等理论方法的具体应用问题。事实上，这些理论方法在工程测试、系统辨识、目标探测、无损检测、装备故障诊断和医学生物信息技术等各个领域中，都得到了广泛和成效显著的应用，进而推动了现代科学技术的进步与发展，并已逐渐成为高等院校工科专业研究生必修的数学技术课程。

目前，国内高校已普遍为工科专业本科生开设了“信号与系统”和“自动控制原理”这两门技术理论课程，鉴于这两门课程的基本概念、数学工具和研究方法的高度一致性，一些大学已率先将这两门课程合流归一，为自动化、仪器仪表、电气工程和电子信息工程等专业的本科生开设了“信号、系统与控制基础”课程。但至今这门课程的后续课程（或研究专题）（“随机信号与系统”知识体系的建构）仍处于初步的探索阶段。毫无疑问，“随机信号与系统”应当显著区别于具有明确的专业技术（通信、雷达、声纳）导向性的研究生课程——“随机信号处理”，并具备约定俗成的技术理论课程和前沿技术理论的一切特征。因此，作者认为，从随机信号处理的知识体系中抽出“随机过程”与“参数估计”这两大基础理论，加上线性动态系统的数学模型辨识、随机信号的谱估计与小波分析，以及最优滤波与状态估计等技术理论专题，一并构成新的知识体系——随机信号与系统，作为高等院校工科专业研究生或科技工作者的进修课程，是一种较为合理的选择。

全书共分为六章。第一章简要回顾了概率论与随机过程的基础知识。第二章详细介绍了工程中应用最为广泛的多维高斯分布理论及其在最佳检测系统中的应用，内容包括似然比检测系统、白化滤波器和匹配滤波器的基本概念，以及似然比检测系统信噪比的分析与计算方法。第三章深入浅出地阐释了参数估计理论的基本概念、各种估计量和估计量方差下界的物理意义，并举例说明各种估计算法在检测技术和数据处理方面的应用。第四章简明扼要地介绍了随机数据预处理的基本方法，重点介绍了时间序列模型和线性控制系统辨识的基础知识。第五章详尽介绍了非参数化和参数化谱估计算法，简要讨论了非高斯时间序列的双谱估计算法，重点阐述了一维小波分析的基本概念和快速小波的理论框架，并从工程应用的角度，详细介绍了小波变换的数值计算、双正交滤波器组的设计方法和快速小波变换的实现技术，以及小波分析在检测技术和信号处理领域中的应用实例。第六章详尽阐述了最优滤波和状态估计的基本理论方法，内容包括维纳滤波器 LMS、自适应滤波器和卡尔曼滤波器；重点介绍了 LMS 自适应滤波器的各种算法及其在自适

应噪声抵消器、自适应谱线增强器和自适应逆建模等技术专题中的应用。

在此，简要说明编撰本书的基本思路可能是有益的。本书是一门数学导向性极强的课程，迄今为止，频谱分析、小波变换、参数估计、系统辨识和最优滤波理论的最新成果绝大多数是应用数学界的贡献。但是，如果片面地强调这些理论方法在纯数学意义上的严密性、完整性和普遍性，以及使用数学工具的技巧性问题，而不解释和讨论这些理论方法所隐含的物理意义及其适用范围，那么，本书将无异于大学的公共数学基础课程。反之，如果绕过频谱分析、小波变换、参数估计、系统辨识和最优滤波等算法的推导过程，而仅仅介绍这些理论方法的实现步骤及其应用实例，或许能收到“立竿见影”的短期效果，然而，实践证明这种“科普”式的教材或“叙述性”专著对于推动相关领域的科技进步是毫无益处的。不言而喻，在抽象理论和工程实现上的任何偏颇，对于理解和掌握“随机信号与系统”的理论方法及其工程应用都是不利的。为此，在本书中，作者尽量采用浅显易懂的数学概念与直观的图示化方法来阐释频谱分析、小波变换、参数估计、系统辨识和最优滤波等算法的物理意义，并给出了有关数学公式的详尽推导过程，同时举例说明这些理论方法在工程测试、微弱信号检测和系统辨识等技术专题中的典型应用；尽量应用简化的数学模型来描述复杂的随机信号与随机系统，并应用 MATLAB /Simulink 软件工具进行系统仿真，尽管有时候理论模型与实际现象可能存在着较大的差异，但在当今工程技术科学中，利用模型进行系统仿真的技术手段却是必不可少的。这种既严谨地介绍各种算法的数学基础及其推导过程，又避免把这些算法当作纯粹的数学问题来讲解的思想，不但体现在本书的取材与结构上，也表现在阐释频谱分析、小波变换、参数估计、系统辨识和最优滤波等理论方法的基本思路上。作者的期望在于，通过本课程的课堂讲授和专题研讨这样的教育经历，使读者初步具备从自然科学和工程技术描述的复杂系统中提炼出简练而又符合现实的随机信号或随机系统模型的能力，进而选用恰当的理论方法来更好地解决工程测试、微弱信号检测和系统辨识以及装备故障诊断等工程实际问题。

应当特别指出，本书是在作者原著《随机信号分析与最优估计理论》的基础上，根据“信号、系统与控制”学科群的内涵及外延重新编排了目录和章节，改写、删除了原书的部分内容，增补了时间序列模型与线性动态系统辨识的基础知识，以及各个章节的知识要点和习题。鉴于修订部分超过了原书的三分之一，因此不应当将本书视为原书的修订版。

由于作者的水平有限，本书的选材和文字难免存在不当和疏漏之处，敬请读者不吝批评指正。

作者

2013 年 2 月

于国防科技大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　概率与随机过程导论

科学理论仅仅是对抽象概念,而不是对工程实际进行讨论的。在纯理论学科中,所有的结论都是从某些公理通过演绎逻辑推导出来的。在某种意义下,这些科学理论是符合自然现象的,而不管它们意味着什么。本章将要讨论的是另一类问题。在这类问题中,通过测量,只能掌握各种可能发生、也可能不发生的事件所呈现出来的局部信号,它要求在不完全知道因果关系下,分析、估计这类可观测信号的特征参数,作为确定观测结果或者决策的依据。作为应用数学的一个分支,概率与随机过程理论为分析此类问题提供了一个理论框架。为使读者能够更容易地理解本书的主要内容,简要复习这方面的基础知识是必要的。

1.1　随 机 事 件

概率论是分析随机现象统计规律性的一门应用数学学科。从概率的观点出发,可把工程上存在的各种现象分为两类:一类称为确定性现象,它是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象;另一类称为随机现象,它指的是在一定条件下可能发生,也可能不发生的现象。尽管应用概率论来分析工程问题所得到的结果是否与物理现实相吻合,是无法被“证明”的,但却是可以接受的。

1.1.1　随机事件的概念

随机事件是随机试验中可能出现的结果,它是概率论的主要研究对象。

一、随机试验

概率论与随机试验密切相关,每个试验都可由一个至三个元素组成的集合 $\{\Omega,\Sigma,P\}$ 来定义。其中:

第一个子集 Ω 表示基本事件的集合,子集中的元素是每次试验中可能发生的某一结果;

第二个子集 Σ 表示复合事件的集合,每个事件在试验中是否发生依赖于试验的执行情况,带有随机性;

第三个子集 P 用于指定 Σ 集合中每个事件所对应的数值(概率)应当遵循的规则。

定义:在随机试验中,每一个可能出现的结果,称为随机事件。

随机事件通常用 A,B,C 等大写字母来表示,它又分为基本事件和复合事件。

(1) 基本事件。最简单的不能再分的单个事件,称为基本事件。

例如，投掷一对完整无缺的骰子，一个骰子的一次滚动就是一个随机试验。由于骰子落在1~6的点数的可能性都存在，因此可将骰子上1~6的点数定义为基本事件。此类基本事件是可数的，通常用符号$\zeta_k(k=1,2,\cdots)$来表示。当基本事件ζ_k是可列集合时，点数k是离散变量。

如果随机试验所产生的基本事件是不可数的，则应引入连续变量τ，并将基本事件记为$\zeta(\tau)$，它表示基本事件的点可能填满整个空间。例如，无限精确地测量电压信号就属于这种情况，这是因为测量值是可能的任何实数。这时完全可以任意地定义一个基本事件，但前提条件是基本事件必须是完备和不相容的，这意味着，在每次试验中必有且仅有一个基本事件发生。

(2) 复合事件。由两个或两个以上的基本事件组成的事件，称为复合事件（或事件）。

例如，在掷骰子试验中，“点数小于4”和“点数为偶数”的事件都是复合事件。

此外，在随机试验中必然出现的结果称为必然事件，而绝对不会出现的结果则称为不可能事件。事实上，这两种事件并非随机事件，但为了研究问题的方便，往往也把它们归入随机事件，作为随机事件的两种极端情况来考虑。

二、样本空间

样本是概率论中最为重要的概念之一。

定义：在随机试验中，每一个基本事件称为一个样本点；样本点的全体称为样本空间Ω，它是全体样本点的集合。

例如，在掷骰子试验中，样本点$(k=1,2,3,4,5,6)$构成了样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，样本空间中的每一个元素都是一个基本事件。

由基本事件$\zeta\in\Omega$组成的复合事件是基本事件（即样本点）的集合。在随机试验时，如果出现了任一基本事件，则称该事件发生。按此定义，样本空间本身也是事件，而且是必然事件。

【例1-1】 在掷骰子试验中，可以列出以下事件：

$$A=\{2,5\};B=\{2,4,6\};C=\{4\}$$
$$D=\{1,2,3,4\};\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

注意，要区分单个事件（点）与包含若干个基本事件的事件（集合）。

三、事件之间的运算关系

事件之间的运算关系如图1-1所示。

(1) 包含关系。设有事件A和B，如果事件B发生必然导致事件A发生，则称B包含A（或A包含于B），记作$A\subset B$。显然，任何事件都包含于Ω。

(2) 相等关系。若$A\subset B$，同时又有$B\subset A$，则称A与B是相等事件，记作$A=B$。

(3) 事件的并集（逻辑OR）。设有事件A、B和C，如果当事件A和B中至少一个发生时，事件C就发生，则称C是A、B的并（和）事件，记作$C=A\cup B$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

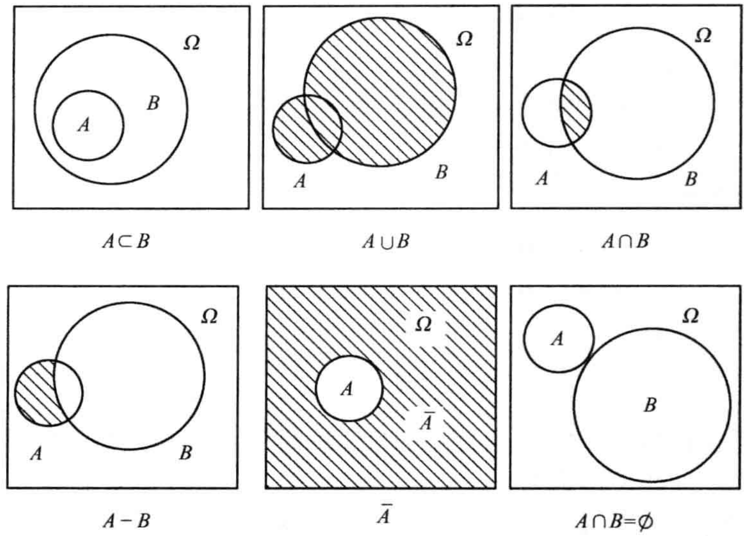

图 1－1　事件的关系

n 个事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的并，记作

$$C=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

（4）事件的交集（逻辑 AND）。如果当事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 才发生，则称 C 是 A 和 B 的交（积）事件，记作 $C=A\cap B$（或 AB）。

n 个事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的交，记作

$$C=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

（5）事件的补集（逻辑 NOT）。不包含事件 A 的基本事件所构成的集合，称为事件 A 的补集，即 $\overline{A}=\Omega-A$。

（6）互不相容（互斥）事件。如果事件 A 和 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$（空集），则称 A 和 B 是互斥事件。任何两个不相同的基本事件都是互斥事件。

（7）对立事件。若样本空间 Ω 只含有事件 A 和 B，即 $\Omega=A\cup B$，且 $AB=\varnothing$，则称 A 和 B 是对立事件，记为

$$A=\overline{B}\text{ 或 }B=\overline{A}$$

（8）事件的差。事件 A 与 $\overline{B}$ 的交，称为 A 与 B 的差，记为 $C=A-B=A\overline{B}$。若样本空间 Ω 只含有事件 A 和 B，即 $\Omega=A\cup B$，则事件的对称差定义为

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\overline{B})\cup(B\overline{A})=\overline{AB}$$

事件之间的组合运算法则：

(1) 交换律：

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律：

$$\begin{cases}(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C\end{cases}$$

(3) 分配律：

$$\begin{cases}(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{cases}$$

(4) 摩根定律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

引入上述事件的关系和集合论中的运算法则后，就可以给出随机试验$\{\Omega, \Sigma, P\}$中的第二个子集Σ的定义。

定义：非空事件集Σ是一个关于并运算（可能是无限的）与补运算封闭的一个事件类，即对于任意的$A \in \Sigma$，都有$\overline{A} \in \Sigma$，且对任意一组$A_k(k=1,2,\cdots) \in \Sigma$，同样有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$$

在代数中，对于任何集合，只要它具有上述事件集合Σ所具有的性质，则称为σ-代数。

若Σ满足上述两个基本条件，则Σ必包含其中元素的交（可能是无限的）和对称差。有了这个定义，就可以保证Σ中的任何事件通过集合运算所得到的事件仍然属于Σ。明确规定这样一个集合Σ仅仅是出于数学处理上的考虑，使得被分析事件的类别是明确定义的，而且总可以将全体事件集视为σ-代数。

1.1.2 随机事件的概率

在随机试验$\{\Omega, \Sigma, P\}$中，第三个元素P是定义事件$A \in \Sigma$上的一个实值函数$P(A)$，它给集合Σ中的每一个事件都指定了一个概率，用于表示可能发生该事件的测度。

【例 1-2】 在掷骰子试验中，如果事先已确认骰子是完美无缺的，那么就可以指定下列事件

$$A = \{2,5\}; B = \{2,4,6\}; C = \{4\}$$
$$D = \{1,2,3,4\}; \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

的概率，即

$$P(A) = \frac{1}{3}; P(B) = \frac{1}{2}; P(C) = \frac{1}{6}; P(D) = \frac{2}{3}; P(\Omega) = 1$$

定理 1-1(概率论公理):设随机试验的样本空间为Ω,且赋予$A\in\Sigma$一个实数值$P(A)$。$\forall k,m\in Z$(整数域),若该实数满足下式:

$$\begin{cases}P(\Omega)=1 \\ P(A)\geqslant 0, & A\in\Sigma \\ P(\cup A_k)=\sum P(A_k), A_k\in\Sigma \text{ 且 } A_kA_l=\varnothing\ (k\neq l)\end{cases} \tag{1.1.1}$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

根据定理 1-1 和集合论中的各种代数运算关系,不仅可以导出概率的全部性质和运算法则,而且可以根据基本事件$\zeta\in\Omega$的概率构造出任何事件$A\in\Sigma$的概率。例如,从集合论中的恒等式出发

$$A\cup B=A\cup(\bar{A}B)$$

$$B=\Omega B=(A\cup\bar{A})B=(AB)\cup(\bar{A}B)$$

由式(1.1.1)可知:$\forall A,B\in\Sigma$,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}B), P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$$

所以

$$P(A\cup B)=P(A\cup\bar{A}B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1.2}$$

【例 1-3】 在掷一个完整的骰子试验中,点数为偶数(even)或者点数大于 2 的复合事件的概率为

$$\begin{aligned}&P(\{\text{even}\}\cup\{>2\})\\&=P(\{\text{even}\})+P(\{>2\})-P(\{\text{even}\}\cap\{>2\})\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

建立在概率论公理基础上的随机试验$\{\Omega,\Sigma,P\}$的定义,是应用概率论知识描述和解决工程实际问题的重要概念。

1.1.3 条件概率与统计独立

在随机试验中,经常关心在给定事件A发生的条件下事件B发生的概率。当然,发生事件B的可能性也可能不受到事件A的影响,或者事件A和事件B是互相独立的。

一、条件概率

定义:设两个事件$A,B\in\Sigma$,且$P(A)>0$,则在事件A发生的条件下,事件B发生的条件概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.1.3}$$

条件概率与前面定义的基本概率具有相同的性质:

$$
\begin{cases}
P(\Omega \mid A) = 1 \\
P(B \mid A) \geqslant 0, & A, B \in \Sigma \\
P(\cup B_k \mid A) = \sum P(B_k \mid A), & B_k \in \Sigma \text{ 且 } B_k B_m = \varnothing (k \neq m)
\end{cases}
\tag{1.1.4}
$$

式中：k, m 为整数。

【例 1-4】 在掷骰子试验中，事件 $A = \{1,3,5\}$ 表示奇数点出现的情况，事件 $B = \{1,2,3\}$ 表示点数小于 4 的情况，二者的组合事件 $AB = \{1,3\}$；且有 $P(AB) = 1/3$，$P(B) = 1/2$。由式(1.1.3)可知：在事件 $B = \{1,2,3\}$ 发生的条件下，事件 $A = \{1,3,5\}$ 发生的概率为

$$
P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}
$$

二、全概率公式和逆概率公式

定义：在随机试验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，对于一组事件 $A_k (k = 1,2,\cdots,n) \in \Sigma$，如果满足

$$
\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega \text{ 且 } A_k \cap A_m = \varnothing (k \neq m; k, m \leqslant n)
$$

则称 $A_k (k = 1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 的一个划分。

定理 1-2（全概率公式）：在随机试验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，设一组事件 $A_k\ (k = 1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 的一个划分，则对于任一事件 $B \in \Sigma$，都有

$$
B = \Omega \cup B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k B, \quad A_k B \cap A_l B = \varnothing (k \neq l) \tag{1.1.5}
$$

如果进一步假设 $P(A_k) > 0$，就有

$$
P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k) \tag{1.1.6}
$$

并称之为全概率公式。

式(1.1.6)利用了条件概率公式(式(1.1.3))。

定理 1-3（贝叶斯（Bayes）公式）：在随机试验 $\{\Omega, \Sigma, P\}$ 中，设一组事件 $A_k (k = 1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_k) > 0$。若已知 $P(A_k)$ 和 $P(B|A_k)$，并且对于任一事件 $B \in \Sigma$，都有 $P(B) > 0$，则下式成立：

$$
P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k)} \tag{1.1.7}
$$

此即著名的贝叶斯公式。

式(1.1.7)利用了条件概率公式(式(1.1.3))和全概率公式(式(1.1.6))。

【例 1-5】 某水声通信系统的发射器分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号 1 和 0。由于通信系统受到干扰，当发出信号 1 时，接收器分别以概率 0.8 和 0.2 收到 1 和 0；而当发出信号 0 时，接收器分别以概率 0.9 和 0.1 收到 0 和 1。试求：

(1) 当接收器收到信号 1 时，发射器发出信号 1 的概率；

（2）当接收器收到信号 0 时，发射器发出信号 0 的概率。

解：设 A_1,A_2 分别表示发射器发出信号 1 和 0 的事件，B_1,B_2 分别表示接收器接收到信号 1 和 0 的事件。依题意，要求确定 $P(A_1|B_1)$和 $P(A_2|B_2)$。将已知条件

$$P(A_1)=0.6,\qquad P(A_2)=0.4$$
$$P(B_1\mid A_1)=0.8,\qquad P(B_2\mid A_1)=0.2$$
$$P(B_1\mid A_2)=0.1,\qquad P(B_2\mid A_2)=0.9$$

代入贝叶斯公式（式(1.1.7)），即可得到

$$P(A_1\mid B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1\mid A_1)}{P(B_1)}$$
$$=\frac{P(A_1)P(B_1\mid A_1)}{P(A_1)P(B_1\mid A_1)+P(A_2)P(B_1\mid A_2)}=0.923$$
$$P(A_2\mid B_2)=\frac{P(A_2)P(B_2\mid A_2)}{P(B_2)}$$
$$=\frac{P(A_2)P(B_2\mid A_2)}{P(A_1)P(B_2\mid A_1)+P(A_2)P(B_2\mid A_2)}=0.75$$

【例 1-6】 假设某一水下无人航行器（UUV）安装了甲、乙和丙三个作用距离不同的水听器，用于检测运动目标所发出的微弱信号，其检测概率分别为 0.5，0.6 和 0.7。如果只有一个水听器检测到信号，则确认目标存在的概率是 0.3；如果有两个水听器同时检测到信号，则确认目标存在的概率是 0.7；如果三个水听器都检测到信号，则完全可以确认目标的存在。试求确认目标存在的概率。

解：用 $A_k(k=1,2,3)$ 分别表示单个、双个和三个水听器检测到目标信号，用 B 表示目标被确认的事件。用 $C_m(m=1,2,3)$ 分别表示甲、乙、丙水听器检测到目标信号，那么，当且仅当 A_k 出现时，B 才成立。依题意，要求计算 $P(B)$。已知事件 C_m 的概率为

$$P(C_1)=0.5,P(C_2)=0.6,P(C_3)=0.7$$

事件 A_1 及与之相关的概率是

$$A_1=C_1\bar{C}_2\bar{C}_3+\bar{C}_1C_2\bar{C}_3+\bar{C}_1\bar{C}_2C_3,\qquad P(B\mid A_1)=0.3$$
$$P(A_1)=0.5\times0.4\times0.3+0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.4\times0.7=0.29$$

事件 A_2 及与之相关的概率是

$$A_2=C_1C_2\bar{C}_3+C_1\bar{C}_2C_3+\bar{C}_1C_2C_3,\qquad P(B\mid A_2)=0.6$$
$$P(A_2)=0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.5\times0.7+0.5\times0.6\times0.7=0.475$$

事件 A_3 及与之相关的概率是

$$A_3=C_1C_2C_3,\qquad P(B\mid A_3)=1$$
$$P(A_3)=0.5\times0.6\times0.7=0.21$$

将以上各式代入全概率公式（式(1.1.6)），即可得到目标被确认的概率，即

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(A_kB)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$$
$$=0.29\times 0.3+0.475\times 0.6+0.21\times 1=0.582$$

三、统计独立

定义:在随机试验$\{\Omega,\Sigma,P\}$中,对于任意的两个事件$A,B\in\Sigma$,若有
$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.1.8}$$
则称这两个事件互相独立(或统计独立)。

在式(1.1.8)中,左边表示事件A和事件B同时发生的概率,它表示在随机试验中既属于事件A又属于事件B的基本事件出现的概率。将两个事件A,B相互独立的定义推广到一组事件$A_k(k=1,2,\cdots,n)$上,则有
$$P(A_kA_l)=P(A_k)P(A_m)\quad(k\neq m;k,m\in Z)$$
对于两个以上的独立事件也有类似的关系。

【例1-7】 掷一完整的骰子,令事件$A=\{1,3,5\}$表示奇数点出现的情况,事件$B=\{1,2,3\}$表示点数小于4的情况,则有
$$P(AB)=P(\{1,3\})=1/3$$
$$\neq P(A)P(B)=(1/2)(1/2)=1/4$$
显然这两个事件不独立。

将两个事件的条件概率方程式(1.1.3)代入方程式(1.1.8),则可得事件相互独立的另一种等价的定义:如果
$$P(A\mid B)=P(A)\quad 或\quad P(B\mid A)=P(B) \tag{1.1.9}$$
则称事件A和事件B相互独立。

“独立”这个词的意思与日常所理解的词意是一致的,它表明事件A发生的可能性不受事件B的影响,反之亦然。

对于同时考虑的两个事件A和B,往往要求它们必须属于同一事件集Σ,这种限制有时会带来分析问题的不便。不过,可以通过拓展随机试验的定义,并扩充基本事件集Ω,使之包含所有感兴趣的事件。例如,设$A\in\Sigma_1,B\in\Sigma_2$是两个不同事件集的事件,且$\Omega_1,\Omega_2$是对应于基本事件$\zeta_{1k},\zeta_{2m}$的样本空间。为了将这两组事件联合在一起,可通过定义新的基本事件$\zeta_{km}=(\zeta_{1k},\zeta_{2m})$,使所有的$\zeta_{km}$点构成一个新的样本空间$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$,称为空间$\Omega_1$和$\Omega_2$的笛卡儿积。这样,就可以在空间$\Omega$上建立起联合事件的$\sigma$-代数。

1.2 随机变量

在1.1节中,所处理的问题都是随机试验的结果和称为事件的集合。在随机试验中,人们可以把实数看作试验结果,如骰子的“点数”;也可以把能够辨认的各种各样的现象作为试验结果,如硬币的“正面”或“反面”。然而,这仅仅是辨认试验结果的某些特殊方法。下面,将介绍具有普遍意义的随机变量及其概率分布函

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com