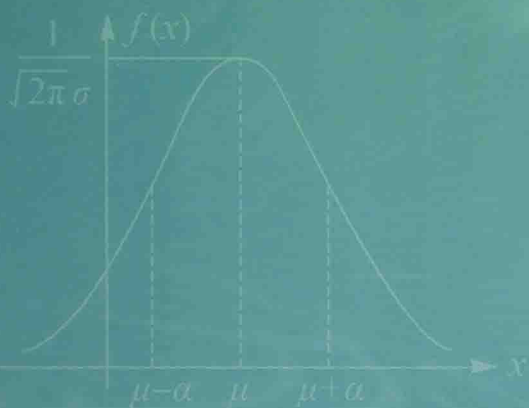


高等学校统编教材

# 误差理论与 测量平差基础

Error Theory and Basis of  
Surveying Adjustment

朱建军 左廷英 宋迎春 主编



$$AV + B\hat{x} - f = 0$$

$$C\hat{x} - f_s = 0$$

$$N_{kk}K + B\hat{x} - f = 0$$

$$B^T K + C^T K_s = 0$$

$$C\hat{x} - f_s = 0$$



测绘出版社

高等学校统编教材

# 误差理论与测量平差基础

Error Theory and Basis of Surveying Adjustment

朱建军 左廷英 宋迎春 主编



测绘出版社

·北京·

© 朱建军 左廷英 宋迎春 2012

所有权利(含信息网络传播权)保留,未经许可,不得以任何方式使用。

### 内 容 简 介

本书是供测绘工程专业本科生学习误差理论与测量平差课程使用的教材。全书共分七章,内容包括误差理论、测量平差原理、测量平差方法、测量平差计算、点和线的位置误差、假设检验、近代测量平差等。教材内容遵循理论、原理、方法、应用四个层次进行设计,其中,平差原理、平差方法、平差计算组成了测量平差基础的核心内容。点和线的位置误差一章针对地理信息和遥感中的不确定性误差在传统点误差基础上新增了线的位置误差的相关内容。假设检验、近代测量平差是学习近代测量平差的基础。另外,教材还针对各知识点设计了习题,题型多样,难易结合,可以帮助学生从不同角度理解和掌握误差理论和平差原理。

本教材层次分明,内容逐步递进,可作为测绘工程本科专业教材,也可作为其他技术人员了解误差理论与测量平差知识的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差基础/朱建军,左廷英,宋迎春主编. —北京:测绘出版社,2013.1

高等学校统编教材

ISBN 978-7-5030-2624-9

I. ①误… II. ①朱… ②左… ③宋… III. ①误差理论—高等学校—教材②测量平差—高等学校—教材 IV. ①0241.1②P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 198350 号

|      |                  |      |     |      |                   |      |     |
|------|------------------|------|-----|------|-------------------|------|-----|
| 责任编辑 | 贾晓林              | 装帧设计 | 李 伟 | 责任校对 | 董玉珍               | 责任印制 | 喻 迅 |
| 出版发行 | 测 绘 出 版 社        |      |     | 电 话  | 010-83060872(发行部) |      |     |
| 地 址  | 北京市西城区三里河路 50 号  |      |     |      | 010-68531609(门市部) |      |     |
| 邮政编码 | 100045           |      |     |      | 010-68531160(编辑部) |      |     |
| 电子信箱 | smp@sinomaps.com |      |     | 网 址  | www.chinasmp.com  |      |     |
| 印 刷  | 北京建筑工业印刷厂印刷      |      |     | 经 销  | 新华书店              |      |     |
| 成品规格 | 184mm×260mm      |      |     |      |                   |      |     |
| 印 张  | 14               |      |     | 字 数  | 320 千字            |      |     |
| 版 次  | 2013 年 1 月第 1 版  |      |     | 印 次  | 2013 年 1 月第 1 次印刷 |      |     |
| 印 数  | 0001-2000        |      |     | 定 价  | 29.00 元           |      |     |

书 号 ISBN 978-7-5030-2624-9/P·581

本书如有印装质量问题,请与我社联系调换。

## 前 言

“误差理论与测量平差基础”是测绘工程本科专业一门重要的专业基础课,它是测绘类数据处理的基础。本书是根据中南大学 50 多年来的测量平差教学和测绘数据处理实践方面的经验及参编的各兄弟院校的测量平差教学经验,以及测绘工程、遥感和地理信息专业的教学要求,在张后苏教授主编的《误差理论与测量平差基础》的基础上重新编写的。在内容安排上,强调了误差基本理论和测量平差基础两个方向的特色;在能力培养上,加强了测量基本模型的建立、算法设计和解算技巧的结合。本教材也是“误差理论与测量平差基础”国家精品课程建设的一项内容。

全书分为 7 章,从 7 个方面阐述了误差理论与测量平差基础的内容。第 1 章测量误差理论主要介绍测量数据处理的基本理论,第 2 章最小二乘平差主要介绍测量平差的准则,第 3 章测量平差基础主要介绍测量实践中如何根据不同的情况建立测量平差模型进行平差解算,第 4 章测量平差计算主要介绍如何对建立的测量平差模型进行解算,第 5 章点和线的位置误差主要介绍点、线位置误差的基本概念及描述方法,第 6 章假设检验理论主要介绍对平差模型与测绘实际的吻合程度进行检验的方法,第 7 章近代测量平差主要介绍当今测量平差的发展方向。第 1 章至第 3 章为基础内容,第 4 章至第 7 章为提高部分,根据教学时数和后续课程需要有选择性地讲授。

本书由中南大学、江西理工大学、桂林工业大学、辽宁科技大学、黑龙江工程学院、长沙理工大学、湖南科技大学、中南林业科技大学、湖南城市学院的多名老师共同编写。其中,第 1 章由朱建军、马大喜编写,第 2 章由左廷英、陈天伟、邢学敏编写,第 3 章由左廷英、戴吾蛟、杨风云编写,第 4 章由左廷英、鲍建宽编写,第 5 章由左廷英、宋迎春、龙江平编写,第 6 章由宋迎春、曹元志编写,第 7 章由宋迎春、李朝奎编写。全书由朱建军、左廷英、宋迎春统稿,张后苏主审。

由于作者水平有限,书中难免不足之处,恳请读者提供改进意见,以便重印或再版时修订。

# 目 录

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| <b>第 1 章 测量误差理论</b> ..... | 1   |
| 1.1 观测误差与测量平差任务 .....     | 1   |
| 1.2 偶然误差的统计特性 .....       | 3   |
| 1.3 衡量精度的指标 .....         | 5   |
| 1.4 精度、准确度与精确度 .....      | 14  |
| 1.5 协方差传播律.....           | 16  |
| 1.6 协因数传播律与广义传播律.....     | 18  |
| 1.7 广义传播律在测量中的应用.....     | 22  |
| 习题 .....                  | 28  |
| <b>第 2 章 最小二乘平差</b> ..... | 30  |
| 2.1 测量平差的数学模型.....        | 30  |
| 2.2 最小二乘平差准则.....         | 40  |
| 2.3 间接平差法.....            | 41  |
| 2.4 条件平差法.....            | 51  |
| 2.5 附有限制条件的条件平差法.....     | 61  |
| 2.6 测量平差公式汇编.....         | 67  |
| 2.7 最小二乘估计的统计性质.....      | 68  |
| 习题 .....                  | 73  |
| <b>第 3 章 测量平差基础</b> ..... | 76  |
| 3.1 三角网间接平差.....          | 76  |
| 3.2 三角网条件平差.....          | 84  |
| 3.3 导线网平差.....            | 96  |
| 3.4 GPS 网平差 .....         | 110 |
| 3.5 回归模型平差 .....          | 115 |
| 习题.....                   | 119 |
| <b>第 4 章 测量平差计算</b> ..... | 124 |
| 4.1 分组平差概述 .....          | 124 |
| 4.2 间接分组平差 .....          | 124 |
| 4.3 参数可变的间接分组平差 .....     | 130 |
| 4.4 条件分组平差 .....          | 135 |

|              |                       |            |
|--------------|-----------------------|------------|
| 4.5          | 法方程的解算方法 .....        | 139        |
|              | 习题 .....              | 148        |
| <b>第 5 章</b> | <b>点和线的位置误差 .....</b> | <b>150</b> |
| 5.1          | 点位误差 .....            | 150        |
| 5.2          | 误差曲线与误差椭圆 .....       | 155        |
| 5.3          | 相对误差椭圆 .....          | 158        |
| 5.4          | 条件平差法误差椭圆的计算 .....    | 160        |
| 5.5          | 直线元位置误差* .....        | 163        |
|              | 习题 .....              | 168        |
| <b>第 6 章</b> | <b>假设检验理论 .....</b>   | <b>169</b> |
| 6.1          | 数理统计中的基本概念 .....      | 169        |
| 6.2          | 正态分布 .....            | 170        |
| 6.3          | 常见的抽样分布 .....         | 171        |
| 6.4          | 假设检验的基本概念 .....       | 174        |
| 6.5          | 假设检验的常用方法 .....       | 177        |
|              | 习题 .....              | 183        |
| <b>第 7 章</b> | <b>近代测量平差 .....</b>   | <b>185</b> |
| 7.1          | 自由网平差 .....           | 185        |
| 7.2          | 附加系统参数的平差方法 .....     | 195        |
| 7.3          | 验后方差分量估计 .....        | 196        |
| 7.4          | 粗差探测与稳健估计 .....       | 199        |
| 7.5          | 广义逆与加权广义逆* .....      | 205        |
|              | 习题 .....              | 207        |
|              | <b>参考文献 .....</b>     | <b>209</b> |
|              | <b>习题参考答案 .....</b>   | <b>210</b> |

# 第1章 测量误差理论

在测量过程中,误差的存在有着必然性与普遍性的特点,它严重影响着测量数据的质量。如何在测绘过程中发现和削弱误差的影响是提高测绘成果质量的关键。本章主要介绍基本误差理论、数据处理方法、不确定度评定规范等三大部分内容,并研究测量结果的精度评定指标,以及观测值与观测值函数之间误差传播规律的理论。

## 1.1 观测误差与测量平差任务

### 1.1.1 观测误差

#### 1. 观测条件与观测误差

测量工作实际就是观测者利用测量仪器,在一定的外界条件下,测定地球表面自然形态的地理要素和地表人工设施的形状、大小、空间位置及其属性等。例如,角度观测、边长丈量、高差测量等。通常,将观测者、测量仪器、外界条件三者统称为观测条件。

由于观测条件不可能尽善尽美,因此,在一定的观测条件下,所得到的观测结果,不可能恰好等于被观测量的真值。这种由观测条件不完善引起的观测量与其理论上应有值之间的差异称为观测误差。观测误差普遍存在于测量实践中。被观测量的观测值与其真值之间的差异就称为观测真误差,即

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = \tilde{L} - L \\ \text{或} \\ L + \Delta = \tilde{L} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

式中, $L$ 为观测值, $\tilde{L}$ 为被观测量的真值, $\Delta$ 为观测真误差。

#### 2. 观测误差产生的原因

观测误差是由观测条件的缺陷产生的,概括来说,有以下三个方面的原因:

(1)观测者的原因。由于观测者感觉器官鉴别能力的局限性、观测者的技术水平及观测者的工作态度等因素使观测值产生的观测误差。

(2)测量仪器的原因。观测通常借助仪器来进行,而仪器在构造上不可能是完美无缺的,如仪器上观测用的刻划只能精确到一定限度等,由此而使观测值产生误差。

(3)外界条件的原因。观测总是在一定的外界条件下进行的,而外界条件是不断变化的,如温度、湿度、风力、大气折光等,这些因素会对观测结果产生直接影响,致使观测结果产生误差。

#### 3. 观测误差的分类及其处理方法

观测误差按其性质可分为粗差、系统误差、偶然误差三种,即

$$\Delta = \Delta_g + \Delta_s + \Delta_n \quad (1.2)$$

式中, $\Delta$ 为观测误差, $\Delta_g$ 为粗差, $\Delta_s$ 为系统误差, $\Delta_n$ 为偶然误差。

### 1) 粗差

粗差是一种大量级的观测误差,可能是测量过程中的差错造成的,如作业人员的疏忽大意而引起的读错、记错、瞄错目标等;也可能是观测者不熟练或粗心而产生的大量级误差。

在测量过程中应尽量避免出现粗差,行之有效的发现粗差的方法是进行必要的重复测量或多余观测,采用必要而又严格的检核、验算等。在现代 GPS、遥感等观测高度自动化的条件下,粗差经常混在有用的观测数据中,此时上述方法难以识别。

### 2) 系统误差

在大小和符号上表现出系统性的,或者在观测过程中按一定的规律变化的,或者为常数的误差称为系统误差。例如,钢尺量距时,由于钢尺的尺长误差引起的量距误差,水准仪视准轴与水准管轴不平行所引起的误差,测距仪的工作频率与标准频率不一致所引起的测距误差等。另外,大气对 GPS 观测值的影响也是呈系统性的。

在测量工作中,应尽量消除或削弱系统误差的影响。消除或削弱系统误差的方法有三种:第一种是在观测方法或观测程序上采取必要的措施,如三角测量中的正、倒镜观测,盘左、盘右读数,分不同时段进行观测,三角高程中的对向观测,水准测量中的前后视距保持相等;第二种是找出系统误差产生的原因,建立一定的数学模型,在平差计算前按一定的模型对观测值进行系统误差改正,如距离丈量中的尺长改正、温度改正,以及各种观测中的气象改正等;第三种是在平差计算中,将系统误差当作未知参数纳入平差函数模型,然后一并解算得出。现代测量平差与数据处理中发展了半参数理论等系统误差处理的新方法。

### 3) 偶然误差

误差大小和符号没有任何规律,完全是偶然的、随机的误差称为偶然误差。在相同的观测条件下进行一系列观测形成偶然误差序列,从单个误差看,误差的大小和符号没有规律,但对大量误差的总体而言,却呈现出一定的统计规律性,这是偶然误差的统计特性。

偶然误差产生的原因多种多样,往往难以预知和控制。例如,仪器本身构造的各种因素不完善引起的观测误差,观测者的估读、照准等因素引起的观测误差,以及不断变化着的外界条件,如风力、风向、温度、湿度、目标背景、电磁干扰等多种偶然因素引起的观测误差。一个观测值最后的观测误差实际是上述多种因素引起的观测误差的总和,按统计学的大数定理,多项随机误差的总和总体服从或近似服从正态分布,因而在测量中经常把偶然误差看作服从正态分布的误差。

### 4) 模型误差

现代测量平差与数据处理中还有一个误差的概念,就是“模型误差”。模型误差定义为所建立的数学模型(包括函数模型与随机模型)与客观现实之间的差异。模型误差不是观测误差,测量平差基础中一般不涉及,所以本书中也不再介绍。

本书主要的研究对象是偶然误差,即假设粗差和系统误差已从观测值中剔除或改正,观测值中仅含偶然误差,或者说是偶然误差占主导地位。在式(1.2)中,设  $\Delta_g = 0, \Delta_n \rightarrow 0$  时,则有  $\Delta \approx \Delta_n$ 。为书写方便,除个别章节外,均以  $\Delta$  表示偶然误差。

## 1.1.2 测量平差的任务

由于测量中不可避免地存在偶然误差,为了提高观测成果的质量,同时也为了发现和削弱误差的影响,在测量工作中,通常要进行多余观测。所谓多余观测,就是对观测的对象进行多



于必需观测量的观测。例如,对一条边长,只要丈量一次就可得出其长度,但实际上总是要求丈量两次或两次以上;一个平面三角形,只需测量两个内角就能确定它的形状,但通常是对三个内角都进行观测,这样就有了多余观测量。由于有了多余观测量,就会发现带有偶然误差的观测结果之间不一致,或不满足应有的理论关系。这样的数据处理,测量上称为测量平差。

测量平差的任务就是:①削弱偶然误差的影响,消除误差引起的观测值之间的矛盾,计算出观测量的最佳估值;②对观测量的质量进行评估。概括起来讲,测量平差的两大任务就是求取待定量的最佳估值和进行精度评定。

## 1.2 偶然误差的统计特性

测量平差研究的对象是含有偶然误差的观测值,为此,有必要对偶然误差的性质作进一步的分析研究。就单个偶然误差而言,其数值的大小和符号均是偶然的、随机的、无规律的,但就其总体而言,却又呈现出一定的统计规律性。人们从无数的测量实践中发现,在相同的观测条件下,大量偶然误差的分布确实表现出一定的统计规律性。下面以三角形闭合差实例来说明这种规律性。

在相同的观测条件下,独立地观测了182个三角形的全部内角。由于观测值中含有偶然误差,因此每一个三角形的内角之和,一般不等于其真值 $180^\circ$ ,由式(1.1)得

$$\Delta_i = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \quad (i=1, 2, \dots, 182)$$

根据该式可算出182个三角形内角和的真误差。

现将这一组真误差按其正负号 and 值的大小排列,并取误差的间隔 $d\Delta$ 为 $0.20''$ ,统计误差出现在各区间的频率为

$$f_i = v_i/n \quad (1.3)$$

式中, $n$ 为误差的总个数, $v_i$ 为出现在第 $i$ 个区间的误差个数。现将计算结果列于表1.1中。

表 1.1 三角形内角和的误差统计

| 误差区间/ $''$ | $\Delta$ 为负值 |       | $\Delta$ 为正值 |       |
|------------|--------------|-------|--------------|-------|
|            | 个数           | 频率    | 个数           | 频率    |
| 0~0.2      | 22           | 0.121 | 22           | 0.121 |
| 0.2~0.4    | 20           | 0.110 | 20           | 0.110 |
| 0.4~0.6    | 16           | 0.088 | 14           | 0.077 |
| 0.6~0.8    | 11           | 0.060 | 12           | 0.066 |
| 0.8~1.0    | 10           | 0.055 | 9            | 0.049 |
| 1.0~1.2    | 6            | 0.033 | 7            | 0.038 |
| 1.2~1.4    | 2            | 0.011 | 4            | 0.022 |
| 1.4~1.6    | 2            | 0.011 | 3            | 0.016 |
| 1.6~1.8    | 1            | 0.006 | 1            | 0.006 |
| 1.8以上      | 0            | 0     | 0            | 0     |
| $\Sigma$   | 90           | 0.495 | 92           | 0.505 |

从表1.1可以看出,误差的分布表现出如下的统计规律:绝对值最大的误差不超过某一限值( $1.8''$ ),绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的个数多,绝对值相等的正、负误差出现的

个数大致相等。

大量的测量实践表明,在其他测量结果中,也都显示出与上述相同的统计规律。因此,上述误差分布规律实际上就是偶然误差普遍具有的统计规律性。

误差分布规律,除了采用上述误差分布表的形式表达外,还可以用直方图来表达。将表 1.1 中的数据绘制成直方图,如图 1.1 所示。绘制时,横坐标取误差  $\Delta$ ,纵坐标取误差出现于各区间的频率  $f_i$  除以区间的间隔值  $d\Delta$ ,即

$$y_i = f_i / d\Delta \quad (1.4)$$

图 1.1 形象地表示了该组误差的分布情况,图中每个长方条的面积为

$$y_i \cdot d\Delta = \frac{f_i}{d\Delta} \cdot d\Delta = f_i \quad (1.5)$$

即误差在该区间内的频率。所以,在直方图中,所有长方条面积的总和为 1。

当误差个数  $n \rightarrow \infty$ ,误差区间的间隔  $d\Delta$  无限缩小时,图 1.1 中各个长方条的顶边折线就变成一条光滑的曲线,该曲线称为误差的概率分布曲线,简称误差曲线,曲线所包含的面积恒为 1。如图 1.2 所示,误差曲线上任一点的纵坐标  $y$  是横坐标  $\Delta$  的函数,即

$$y = f(\Delta) \quad (1.6)$$

$f(\Delta)$  通常称为误差  $\Delta$  的分布密度函数,由概率统计定律可知,误差  $\Delta$  落在  $d\Delta$  区间内的概率为

$$P(\Delta) = f(\Delta) d\Delta \quad (1.7)$$

即当  $n$  逐渐增大时,实际频率  $f_i$  将逐渐趋于理论频率  $P_i$ 。

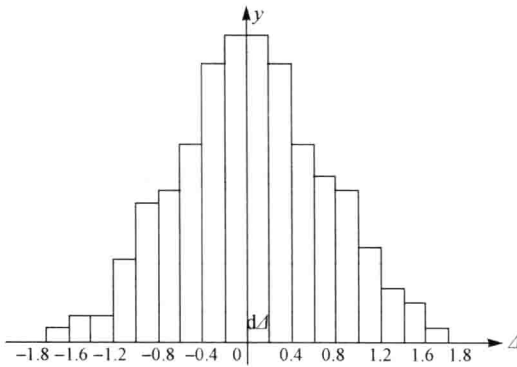


图 1.1 三角形内角和误差分布直方图

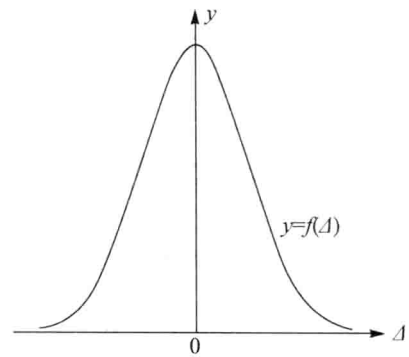


图 1.2 三角形内角和误差曲线

一般情况下,观测误差是由多种因素引起的误差的总和,按统计学的大数定理,这种误差总体上服从或近似服从正态分布,因而在测量中经常把偶然误差看作服从正态分布的误差,称为正态误差或高斯误差,其分布密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.8)$$

偶然误差的统计特性可以用概率术语描述:

(1) 在一定的观测条件下,偶然误差绝对值不大于某个值  $\Delta_M$  是统计必然事件,其概率接近于 1,即

$$P(|\Delta_i| \leq \Delta_M) = \int_{-\Delta_M}^{+\Delta_M} f(\Delta) d\Delta \approx 1 \quad (1.9)$$

也可说是,偶然误差绝对值有一定限值,超出一定限值  $\Delta_M$  的误差概率近似为 0,即

$$P(|\Delta_i| > \Delta_M) \approx 0 \quad (1.10)$$

(2)绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大,即若  $|\Delta_1| < |\Delta_2|$ ,则有

$$f(|\Delta_1|)d\Delta > f(|\Delta_2|)d\Delta \quad (1.11)$$

(3)绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等,即

$$f(+\Delta)d\Delta = f(-\Delta)d\Delta \quad (1.12)$$

这里应该指出,测量误差是连续型随机变量,而连续型随机变量出现在个别点上的概率等于零。因此,我们所讲的误差出现概率指误差出现在某一段区间的概率。

(4)由偶然误差分布的对称性可知,偶然误差的数学期望为 0。换句话说偶然误差  $\Delta$  的理论平均值应为 0,即  $E(\Delta) = 0$ 。现对式(1.1)的两边取期望,有  $E(\Delta) = \tilde{L} - E(L) = 0$ ,故

$$E(L) = \tilde{L} \quad (1.13)$$

对于一系列的观测而言,只要这些观测是在相同的观测条件下独立进行的,不管其观测条件如何,也不管其观测量是相同的还是不同的,该观测所产生的一组偶然误差都具有上述四个特性。

由  $E(\Delta) = 0$  可以得到一个重要启示:在实际观测工作中,若发现  $\sum \Delta_i / n \neq 0$ ,且其绝对值与零相差较大,就意味着观测误差  $\Delta_i$  中不全是偶然误差,可能存在着系统误差或粗差。

## 1.3 衡量精度的指标

### 1.3.1 观测条件与观测精度

由 1.1 节内容可知,测量仪器、观测者、外界条件是引起误差的主要来源,而所谓的观测条件就是这三方面因素的统称,观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的关系。由于一定的观测条件对应一定的观测精度,对于在相同观测条件下进行的一组观测,每一观测值的精度都相等,称为等精度观测值。但必须指出,由于偶然误差的随机性,等精度观测值的观测真误差彼此并不相等,有时甚至会相差较大。在一定观测条件下进行的一组观测,它总是对应着一种确定不变的误差分布。若观测条件好,则小误差出现的机会多,其对应的误差分布较为密集,观测成果的质量较好,即这一组的观测精度较高。反之,若观测条件差些,则误差分布较为离散,观测值的波动较大,观测成果的质量较差,则该组的观测精度较低。

所谓观测精度,就是指一组误差分布的密集或离散的程度,也就是误差分布离散度的大小。在实际观测中,假如两组观测成果的误差分布相同,我们便认为两组观测成果的精度相同;反之,若误差分布不同,则精度也就不同。

### 1.3.2 衡量精度的指标

衡量观测值的精度高低,虽然可以按上面所述的方法,即将一组在相同条件下得到的误差,用直方图或误差分布曲线来进行比较,但在实际工作中,这样做比较麻烦,有时甚至是很困难的。为此,最好用数值来对精度进行表征,这种数值应能反映误差分布的密集或离散的程度,即应能反映其离散度的大小,这就是我们要研究的衡量精度的指标。衡量精度的指标有多种,下面介绍几种常用的精度指标。

### 1. 中误差

对于独立同精度的观测误差  $\Delta$ , 中误差定义为

$$m^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \quad (1.14)$$

式中,  $m$  称为观测中误差, 即在一定的观测条件下, 独立误差平方的平均值极限定义为中误差的平方;  $[\ ]$  为取和的符号。如果观测误差不仅包含偶然误差, 还含有系统误差, 则中误差可表示为

$$m^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(\Delta_n + \Delta_s)(\Delta_n + \Delta_s)]}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_n \Delta_n]}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2\Delta_s \Delta_n]}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_s \Delta_s]}{n} = m_n^2 + m_s^2$$

式中,  $m_n$ 、 $m_s$  分别表示偶然中误差和系统中误差。如果观测误差包含偶然误差和系统误差, 则其中误差平方就是偶然中误差和系统中误差的平方和。

由上可知, 中误差反映了真误差的平均值大小, 中误差越小, 表示真误差的平均值越小, 观测质量越好, 精度越高; 中误差越大, 表示真误差的平均值越大, 观测质量越差, 精度越低。中误差是测量中最常见的表示观测精度的指标。

### 2. 方差

观测值  $L$  和观测误差  $\Delta$  均为随机变量, 因此其方差应为  $D_L = \sigma_L^2 = E[(L - E(L))^2]$ , 当观测误差中只包含偶然误差时, 顾及  $E(\Delta) = 0$ ,  $E(L) = \tilde{L}$ , 则有  $D_L = D_\Delta = E(\Delta^2)$ 。可见, 任一观测值的方差与观测值真误差的方差是相同的。由式(1.8)可知, 真误差  $\Delta$  的分布密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right)$$

所以

$$D_L = D_\Delta = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) d\Delta = \sigma^2 \quad (1.15)$$

这表明, 误差分布密度函数  $f(\Delta)$  中的参数  $\sigma^2$  就是真误差  $\Delta$  的方差  $D(\Delta)$ 。根据数学期望定义, 方差又可表示为

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \quad (1.16)$$

即当观测误差为偶然误差时, 观测方差等于观测中误差的平方。但当观测值含有系统误差时, 方差不等于中误差的平方。方差  $\sigma^2$  的平方根  $\sigma$  可表示为

$$\sigma = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad (1.17)$$

在此需要说明的是, 在数理统计学中, 一般称  $\sigma$  为标准差, 而在测量工作中, 我们称之为中误差。不同的  $\sigma$  对应着不同形状分布曲线,  $\sigma$  越小, 曲线就越陡峭,  $\sigma$  越大, 曲线就越平缓。 $\sigma$  的几何意义是偶然误差分布曲线拐点的横坐标。用方差  $\sigma^2$  作为观测值  $L$  的精度指标, 主要是因为方差能反映观测值的离散程度。观测条件越好, 观测值的取值越密集, 方差也越小; 反之, 观测条件差时, 观测值的取值就越离散, 方差也越大。从上面分析可以看出, 方差的大小能很好地反映观测值的离散度, 而中误差在数值上等于方差的算术平方根, 故中误差的大小也可反映出观测值的离散度, 因此在数据处理中可以将方差和中误差作为衡量观测精度的指标。方差(或中误差)越大, 精度越低; 方差(或中误差)越小, 精度越高。应指出的是, 在一定的观测条件下,  $\Delta$  具有确定不变的分布, 故方差  $\sigma^2$  或中误差  $\sigma$  均为定值。但在实际工作中, 观测个数  $n$  总是有限的, 因此根据式(1.16)、式(1.17)求得的方差和中误差的估值, 记为  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\sigma}$ , 公式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{[\Delta\Delta]}{n} \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

估值  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\sigma}$  将随着  $n$  的多少及测量中取值的随机性而波动, 所以是随机量。但当  $n$  逐渐增大时, 估值  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\sigma}$  将越来越接近于其理论值  $\sigma^2$ 、 $\sigma$ 。

### 3. 平均误差

衡量精度还可采用平均误差作为指标, 其定义为: 在一定的观测条件下, 一组独立的偶然误差绝对值的数学期望, 称为平均误差, 以  $\theta$  表示, 即

$$\left. \begin{aligned} \theta &= E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta \\ \text{或} \\ \theta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|\Delta|]}{n} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

因为

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta = 2 \int_0^{\infty} \Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) d\Delta = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0.798\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \approx 1.253\theta \approx \frac{5}{4}\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

式(1.20)反映了平均误差  $\theta$  和中误差  $\sigma$  之间的理论关系。由式(1.20)可以看出, 不同大小的  $\theta$ , 对应着不同的  $\sigma$ , 也就对应着不同的误差分布。因此, 可以用平均误差  $\theta$  作为衡量精度的一个指标。当观测个数  $n$  有限时, 平均误差的估值计算公式为

$$\hat{\theta} = \frac{[|\Delta|]}{n} \quad (1.21)$$

当中误差的估值  $\hat{\sigma}$  为已知时, 也可用式(1.20)计算  $\hat{\theta}$ , 即,  $\hat{\theta} = 0.798\hat{\sigma}$ 。

### 4. 或然误差

或然误差也是衡量精度的一种指标, 其定义为: 观测误差落入  $(-\rho, +\rho)$  之间的概率恰好等于  $1/2$ , 则  $\rho$  称为或然误差, 即

$$P(-\rho < \Delta < +\rho) = \int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

同样, 将  $\Delta$  的概率密度函数  $f(\Delta)$  代入式(1.22), 并作变换, 令  $t = \Delta/\sigma$ , 即有  $\Delta = \sigma t$ ,  $d\Delta = \sigma dt$ , 则有

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = 2 \int_0^{\rho/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \quad (1.23)$$

由概率积分表可查得, 当概率为  $1/2$  时, 积分限为  $0.6745$ , 故

$$\left. \begin{aligned} \rho &\approx 0.6745\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \\ \sigma &\approx 1.4826\rho \approx \frac{3}{2}\rho \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

式(1.24)是或然误差与中误差之间的理论关系式。由此也可以看出,不同的 $\rho$ 也对应着不同的误差分布曲线,因此或然误差 $\rho$ 也可作为衡量精度的指标。

实际上,因为观测个数 $n$ 是有限的,所以可将相同观测条件下得到的一组误差,按其绝对值大小排列,取其位于中间的一个误差( $n$ 为奇数)或中间两个误差的平均值( $n$ 为偶数)作为或然误差的估值 $\hat{\rho}$ 。当中误差的估值 $\hat{\sigma}$ 为已知时,也可用式(1.24)计算 $\hat{\rho}$ ,即 $\hat{\rho} \approx 0.6745\hat{\sigma}$ 。

**例 1.1** 为了比较两台经纬仪的观测精度,分别对同一角度各进行 30 次观测,其观测结果列于表 1.2 中。该角度已预先用精密经纬仪测定,其值为 $76^{\circ}42'18.0''$ 。由于此值的精度远远高于上述两台经纬仪的观测精度,故可将它看成该角度的真值。试计算这两台经纬仪的方差、平均误差和或然误差。

**解:**根据表 1.2 的数据(表中的 $L$ 只给出了秒的观测值),可以算得

$$\begin{aligned}\sum |\Delta_1| &= 43.9, & \sum |\Delta_1|^2 &= 74.65 \\ \sum |\Delta_2| &= 24.4, & \sum |\Delta_2|^2 &= 25.86\end{aligned}$$

所以

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{74.65}{30} = 2.49(")^2, \quad \hat{\sigma}_1 = \sqrt{\hat{\sigma}_1^2} = 1.58''$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{25.86}{30} = 0.86(")^2, \quad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\hat{\sigma}_2^2} = 0.93''$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{43.9}{30} = 1.46'', \quad \hat{\theta}_2 = \frac{24.4}{30} = 0.81''$$

$$\hat{\rho}_1 \approx 0.6745\hat{\sigma}_1 = 1.07'', \quad \hat{\rho}_2 \approx 0.6745\hat{\sigma}_2 = 0.63''$$

计算时,对精度指标值,通常取 2~3 个有效数字。从计算结果可知,第二台经纬仪的测角精度高于第一台经纬仪的测角精度。

表 1.2 两台经纬仪的观测值与观测误差

| 编号 | 第一台经纬仪               |                       |                          | 第二台经纬仪               |                       |                          | 编号 | 第一台经纬仪               |                       |                          | 第二台经纬仪               |                       |                          |
|----|----------------------|-----------------------|--------------------------|----------------------|-----------------------|--------------------------|----|----------------------|-----------------------|--------------------------|----------------------|-----------------------|--------------------------|
|    | 观测值 $L$<br>/ $(''$ ) | $\Delta$<br>/ $(''$ ) | $\Delta^2$<br>/ $(''^2)$ | 观测值 $L$<br>/ $(''$ ) | $\Delta$<br>/ $(''$ ) | $\Delta^2$<br>/ $(''^2)$ |    | 观测值 $L$<br>/ $(''$ ) | $\Delta$<br>/ $(''$ ) | $\Delta^2$<br>/ $(''^2)$ | 观测值 $L$<br>/ $(''$ ) | $\Delta$<br>/ $(''$ ) | $\Delta^2$<br>/ $(''^2)$ |
| 1  | 17.2                 | +0.8                  | 0.64                     | 19.5                 | -1.5                  | 2.25                     | 16 | 16.7                 | +1.3                  | 1.69                     | 17.7                 | +0.3                  | 0.09                     |
| 2  | 19.5                 | -1.5                  | 2.25                     | 19.0                 | -1.0                  | 1.00                     | 17 | 16.0                 | +2.0                  | 4.00                     | 18.6                 | -0.6                  | 0.36                     |
| 3  | 19.2                 | -1.2                  | 1.44                     | 18.8                 | -0.8                  | 0.64                     | 18 | 15.5                 | +2.5                  | 6.25                     | 18.8                 | -0.8                  | 0.64                     |
| 4  | 16.5                 | +1.5                  | 2.25                     | 16.9                 | +1.1                  | 1.21                     | 19 | 19.1                 | -1.1                  | 1.21                     | 17.7                 | +0.3                  | 0.09                     |
| 5  | 19.6                 | -1.6                  | 2.56                     | 18.6                 | -0.6                  | 0.36                     | 20 | 18.8                 | -0.8                  | 0.64                     | 17.1                 | +0.9                  | 0.81                     |
| 6  | 16.4                 | +1.6                  | 2.56                     | 19.1                 | -1.1                  | 1.21                     | 21 | 18.7                 | -0.7                  | 0.49                     | 16.9                 | +1.1                  | 1.21                     |
| 7  | 15.5                 | +2.5                  | 6.25                     | 18.2                 | -0.2                  | 0.04                     | 22 | 19.2                 | -1.2                  | 1.44                     | 17.6                 | +0.4                  | 0.16                     |
| 8  | 19.9                 | -1.9                  | 3.61                     | 17.7                 | +0.3                  | 0.09                     | 23 | 17.5                 | +0.5                  | 0.25                     | 17.0                 | +1.0                  | 1.00                     |
| 9  | 19.2                 | -1.2                  | 1.44                     | 17.5                 | +0.5                  | 0.25                     | 24 | 16.7                 | +1.3                  | 1.69                     | 17.5                 | +0.5                  | 0.25                     |
| 10 | 16.8                 | +1.2                  | 1.44                     | 18.6                 | -0.6                  | 0.36                     | 25 | 19.0                 | -1.0                  | 1.00                     | 18.2                 | -0.2                  | 0.04                     |
| 11 | 15.0                 | +3.0                  | 9.00                     | 16.0                 | +2.0                  | 4.00                     | 26 | 16.8                 | +1.2                  | 1.44                     | 18.3                 | -0.3                  | 0.09                     |
| 12 | 16.9                 | +1.1                  | 1.21                     | 17.3                 | +0.7                  | 0.49                     | 27 | 19.3                 | -1.3                  | 1.69                     | 19.8                 | -1.8                  | 3.24                     |
| 13 | 16.6                 | +1.4                  | 1.96                     | 17.2                 | +0.8                  | 0.64                     | 28 | 20.0                 | -2.0                  | 4.00                     | 18.6                 | -0.6                  | 0.36                     |
| 14 | 20.4                 | -2.4                  | 5.76                     | 16.8                 | +1.2                  | 1.44                     | 29 | 17.4                 | +0.6                  | 0.36                     | 16.9                 | +1.1                  | 1.21                     |
| 15 | 16.3                 | +1.7                  | 2.89                     | 18.8                 | -0.8                  | 0.64                     | 30 | 16.2                 | +1.8                  | 3.24                     | 16.7                 | +1.3                  | 1.69                     |

### 5. 极限误差

偶然误差第一特性表明,在一定的观测条件下,误差的绝对值不会超过某一限值。在测量实际工作中,应用这一限值作为测量误差的极限值。如果测量误差超过该极限值,可能是测量条件变化,也可能是观测中出现了粗差。为此,须予以返工重测或舍去不用。我国各类测量规范都明确规定了不同等级的测量极限误差值,供作业中遵照执行。

在测量中,规定极限误差的依据是:小概率事件在一次测量中可以认为是不可能事件。偶然误差是服从正态分布的,即  $\Delta \sim N(0, \sigma^2)$ ,为了查表需要,将  $\Delta$  标准化。设  $\Delta' = \Delta/\sigma$ ,则  $\Delta'$  服从标准正态分布,即  $\Delta' \sim N(0, 1)$ ,可知  $\Delta'$  落在  $(-1, +1)$ 、 $(-2, +2)$ 、 $(-3, +3)$  区间内的概率分别为

$$\left. \begin{aligned} P(-1 < \Delta' < +1) &= P(-\sigma < \Delta < +\sigma) = \Phi(+1) - \Phi(-1) = 0.683 \\ P(-2 < \Delta' < +2) &= P(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) = \Phi(+2) - \Phi(-2) = 0.955 \\ P(-3 < \Delta' < +3) &= P(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) = \Phi(+3) - \Phi(-3) = 0.997 \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

由式(1.25)可知,大于3倍中误差的观测误差出现的概率只有0.3%,是小概率事件,在一次测量中可以认为小概率事件是不可能事件。因此,通常将3倍中误差作为极限误差,即  $\Delta_{\text{限}} = 3\sigma$ ,某些情况下,也可规定2倍中误差作为极限误差,即  $\Delta_{\text{限}} = 2\sigma$ 。

式(1.25)最右端的概率,称为置信概率,这个概率表达式表示在一定的置信概率下,中误差和真误差的关系式。在实际观测中,任何平差结果或观测值的真误差是未知的,但式(1.25)给出了由中误差估计其真误差的概率区间,如置信概率为99.7%时,真误差  $\Delta$  将在区间  $(-3\sigma, 3\sigma)$  内。在实际工程中,通常我们也要计算某量的中误差,用来对其真误差在一定置信概率下做出区间估计,这是保证工程质量的一个重要定量信息。因此可以看出,中误差既可以表示误差分布的离散程度,又可以对其真误差做出区间估计,这是精度指标中误差完整的统计意义。

### 6. 相对误差

真误差、中误差、极限误差等指标,对于某些观测结果而言,有时还不能完全表达其结果的好坏。例如,分别丈量1000 m和100 m两段距离,设丈量中的中误差均为2 cm,两者的中误差虽然相同,但就单位长度而言,它们的精度是不相同的,前者显然要比后者的精度高。因此,需采用另一种指标来衡量,即用相对中误差来表征边长的观测精度。相对中误差的定义是:中误差与观测值之比。相对中误差是一个无量纲量,为方便计算,通常将分子化为1,如

$$\frac{\sigma_L}{L} = \frac{1}{N} \quad (1.26)$$

式中, $L$ 为观测值, $\sigma_L$ 为观测中误差(标准差)。

同样,对于观测真误差、极限误差也分别有相对真误差和相对极限误差,即  $\Delta_L/L$  和  $\Delta_{L\text{限}}/L$ 。例如,经纬仪导线测量中,规定量距的相对闭合差不能超过1/2000,这就是规范要求的相对极限误差。

**例 1.2** 现有两段边长,其观测值分别为  $s_1 = 400$  m 和  $s_2 = 300$  m,其中误差分别为  $\sigma_1 = 4$  cm 和  $\sigma_2 = 2$  cm。试求两段边长观测值的相对中误差。

**解:**按相对中误差定义式(1.26),计算得

$$\sigma_1/s_1 = 4/40000 = 1/10000, \quad \sigma_2/s_2 = 2/30000 = 1/15000$$

由此可知,第二条边长的观测精度高于第一条边长的观测精度。

### 1.3.3 权与协因数

#### 1. 权

方差、中误差、或然误差、极限误差等作为衡量精度的指标,是一种绝对指标,而在实际测量平差中,仅用绝对指标来衡量精度往往还是不够的。例如,有一组观测值是等精度的,那么在平差时,应该将它们同等对待,而对于一组不等精度的观测值,在平差时就不能同等处理。容易理解,精度高的观测值在平差结果中理应占较大的比重,反之,精度低的观测值理应占较小的比重。因此,在实际数据处理过程中,为便于平差计算,我们需要在方差的基础上再引入一个新的衡量精度的指标,来相对地衡量不同精度观测值的精度,这个新的精度指标——权,是表征观测值之间相对精度的指标。

权与方差成反比,通常用  $P$  表示,定义为

$$P = c / \sigma^2 \quad (1.27)$$

由定义可以看出,方差越小,权越大,精度越高;反之,方差越大,权越小,精度越低。

由于比例常数  $c$  的任意性,虽然某个量的方差唯一,但其权随  $c$  取值的变化而变化,故权不唯一。但对研究同一问题,以权表征精度时,为使权有相对比较的意义, $c$  应取一定值。例如,有观测值  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , 其方差为  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ , 则对应的权可写为

$$P_1 = \frac{c}{\sigma_1^2}, P_2 = \frac{c}{\sigma_2^2}, \dots, P_n = \frac{c}{\sigma_n^2}$$

根据上式,可求出任意两个观测值之间的权比例关系式,即

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2} \quad (1.28)$$

为进一步阐述  $c$  的含义,比较式(1.27)和式(1.28),并令  $c = \sigma_0^2$ , 则有

$$\frac{P_i}{1} = \frac{c}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

可见, $c$  是单位权(权为 1)观测值的方差,记为  $\sigma_0^2$ , 我们将其称为单位权方差或方差因子,将  $\sigma_0$  称为单位权中误差。即凡是方差等于  $\sigma_0^2$  的观测值,其权必等于 1; 反之,权为 1 的观测值的方差即为单位权方差,且称该观测值为单位权观测值。

在实际的平差问题中观测值的方差在平差前往往是无法确定的,但为了确定各个观测值在平差中所占的比重,可首先确定各观测值的权。将观测值加权参与平差,从而得出合理的平差结果,这是我们引入权这个概念的关键所在。

**例 1.3** 在三角测量中,Ⅲ等三角网测角中误差为  $1.8''$ , Ⅳ等三角网测角中误差为  $2.5''$ , 试确定它们的权。

**解:** 设  $\sigma_0 = 5''$ , 则

$$P_{\text{Ⅲ}} = \sigma_0^2 / \sigma_{\text{Ⅲ}}^2 = 5^2 / 1.8^2 = 7.72, \quad P_{\text{Ⅳ}} = \sigma_0^2 / \sigma_{\text{Ⅳ}}^2 = 5^2 / 2.5^2 = 4$$

两者权的比例为

$$P_{\text{Ⅲ}} / P_{\text{Ⅳ}} = 1.93$$

同理,设  $\sigma_0 = \sigma_{\text{Ⅳ}} = 2.5''$ , 则

$$P_{\text{Ⅲ}} = \sigma_0^2 / \sigma_{\text{Ⅲ}}^2 = 1.93, \quad P_{\text{Ⅳ}} = \sigma_0^2 / \sigma_{\text{Ⅳ}}^2 = 1$$

两者权的比例为



$$P_{\text{III}}/P_{\text{IV}}=1.93$$

可见,无论  $\sigma_0$  的取值如何,两观测值权的比例是不变的。

例 1.4 在边角网中,已知测角中误差为  $1.0''$ ,测边中误差为  $2.0\text{ cm}$ ,试确定它们的权。

解:设  $\sigma_0 = \sigma_\beta = 1.0''$ ,则得

$$P_\beta = \sigma_0^2 / \sigma_\beta^2 = 1 (\text{无量纲}), \quad P_s = \sigma_0^2 / \sigma_s^2 = 0.25 (\text{''})^2 / \text{cm}^2$$

由上述两个例子可以看出:观测值的权值将随单位权中误差  $\sigma_0$  取值的不同而异,但观测值之间权的比例保持不变。在测量平差中权值的绝对大小是没有意义的,观测量之间权的比例才是我们需要的信息,在不同类的观测值中(如边角网)权为具有量纲的值。

## 2. 协因数

现将权的定义式改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_0^2 / P_i \\ \text{或} \\ \sigma_i &= \sigma_0 / \sqrt{P_i} \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

令

$$Q_{ii} = 1/P_i = \sigma_i^2 / \sigma_0^2$$

式中,  $Q_{ii}$  称为协因数或权倒数,所以

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_0^2 Q_{ii} \\ \text{或} \\ \sigma_i &= \sigma_0 \sqrt{Q_{ii}} \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

式(1.30)表明,任一观测值(或任一随机变量)的方差总是等于单位权方差与该观测值协因数(权倒数)的乘积。

## 3. 方差-协方差矩阵、协因数矩阵与权矩阵

对于单个观测量的精度衡量,可以用其方差来描述。但在测量中,通常碰到的是  $n$  个观测量  $L_i (i=1, 2, \dots, n)$  所组成的  $n$  维观测向量  $\mathbf{L}$ , 为了描述多维观测向量的精度,则需引进方差-协方差矩阵(简称协方差矩阵),以及协因数矩阵和权矩阵等概念。

一维随机变量  $\mathbf{X}$  的方差定义为

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}} = \sigma_{\mathbf{X}}^2 = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^2] = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T] \quad (1.31)$$

也可写为

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}} = \sigma_{\mathbf{X}}^2 = E(\Delta_{\mathbf{X}} \Delta_{\mathbf{X}}^T) = E(\Delta_{\mathbf{X}}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta_{\mathbf{X}}^2]}{n}$$

式中,  $\Delta_{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - E(\mathbf{X})$ 。对于多维随机向量  $\mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_i]^T$ , 描述其精度的协方差矩阵定义为

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \dots & \sigma_{x_1 x_i} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & \sigma_{x_2 x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_i x_1} & \sigma_{x_i x_2} & \dots & \sigma_{x_i}^2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

式中,  $\sigma_{x_i}^2 = E[(X_i - E(X_i))(X_i - E(X_i))]$  为  $\mathbf{X}$  向量中第  $i$  个随机变量  $X_i$  的方差,而