概率论与数理统计学习指导书

山西省工科院校数学教材编写组

山西高校联合出版社

概率论与数理统计
学习指导书

山西省工科院校数学教材编写组

山西高校联合出版社

（晋）新登字8号

概率论与数理统计学习指导书

山西省工科院校数学教材编写组

*

山西高校联合出版社出版发行（太原南内环街31号）

山西省万荣县国营印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：14.5 字数：315.7千字

1992年3月第1版 1992年3月山西第1次印刷

印数：1—9000册

*

ISBN 7—81032—125—0

O·14 定价：4.80元

出版说明

在山西省教育委员会的指导下，为适应教育改革的需求，山西省工科院校联合编写了线性代数、线性代数学习指导书、概率论与数理统计、概率论与数理统计学习指导书、高等数学习题课讲义等五本教材与学习指导书。本书是这套书中的一本。

本书是依据国家教委颁发的高等工业学校《概率论与数理统计课程教学基本要求》，配合张鸿秀、张宝玉主编的《概率论与数理统计》一书而编写的。全书的章节基本与教材一致，唯有随机变量分为一维随机变量、二维随机变量两章，共十二章。每章包括总框图、基本要求、重点难点分析、举例、思考题与练习题等部分。书末给出了绝大部分思考题与练习题的答案。另外，书末还附了几份自测题，以便于读者学完本课程后自我检查。本书中的部分理论总结、例题及练习题比教材的要求略有提高。

本书是与《概率论与数理统计》一书相配合的学习指导书，但具有相对的独立性，所以它可供高等工科院校学习本课程的学生选用，也可作为理科有关专业及各类成人高等教育同类专业的学生选用；同时，还可作为数学教师、工程技术人员等的参考书。

本书由张宝玉、张鸿秀主编，第一、五、七章由戴维纪编写，第二、三、四章由刘青藏编写，第六、八、九章由陈家骥

编写，第十、十一、十二章由董守先编写，张宝玉改写了其中的部分节目。全书的图形由单志辅绘制。

西安交通大学研究生院副院长张文修教授为本书写了序言；太原工业大学李庆士副教授审阅了全书，提了许多宝贵意见；白国红同志帮助绘制了大部分草图。在此向他们表示深切的谢意！对于在出版过程中给本书以支持的各位领导、同仁、山西高校联合出版社表示谢意！

由于编者水平有限，时间仓促，书中缺点、错误必定不少，敬请读者批评指正。

编　　者

1991年8月于太原工业大学

序　言

概率论与数理统计是从数量上研究随机现象规律性的学科，它在自然科学、技术科学、管理科学以及社会科学中都有着广泛而重要的应用。目前，大学本科的绝大部分专业和大多数中等专业技术学校已将这门课程作为必修课程之一。但是，由于《概率论与数理统计》这门学科的特殊性，无论是教师还是学生，都感到这门课程教学困难比较大，概念难于掌握，习题难于解答，出版一本《概率论与数理统计学习指导书》是非常重要的。

张宝玉和张鸿秀二位副教授主持编写的《概率论与数理统计学习指导书》，从内容、结构、形式、方法上都有独到之处。突出了学习方法的指导，侧重各章节之间的内在联系，对重点与难点进行了比较透彻地分析，注意从理论与实践的结合上分析概念产生的背景与意义。同时所选的例题恰当，并着重解题思路分析，思考题与例题配套，以便于学生巩固学习内容和解题方法。本书论述严谨、深入浅出、简明易懂、富于启发，对于广大学生学好这门课程，理解它的内容，掌握它的方法是非常有意义的。另外对于参加研究生入学应考者也是一本很好的参考书。

从数学发展史上，概率论与数理统计已有三百多年的历史，是比微积分稍晚一些时期发展起来的一门数学学科。微积分把研究常量数学的初等数学推进到研究变量数学的高等

数学，概率论与数理统计则是把研究因果关系的确定性数学推进到研究随机现象的随机数学。它是数学发展史上的第三个发展阶段。如果从数学分类来讲，初等数学、高等数学、随机数学也可看作三大类学科。正像拉普拉斯所指出的“概率论这门起源于机会游戏的学科，终将成为人类知识中最重要的组成部分。”下面就我自己的体会谈谈学好《概率论与数理统计》课程应注意的几个问题。

（1）概率论与数理统计是描述随机现象规律性的学科，与确定性数学比较起来，它描述的对象不同。

在确定性数学中所描述的现象，在一定条件下，它一定发生，或一定不发生，二者必居其一，二者也仅居其一。比如在重力作用下，空中的苹果一定会落在地面上等。但是在随机数学中所描述的现象，是一种随机现象，在一定的条件下，它可能发生，也可能不发生。比如早上7点至8点期间在某公共汽车站候车的人数，在某时间间隔内某电话交换台的呼唤次数，分子运动路径，测量误差、信号干扰等都属于这类随机现象。人们在事先无法确定此类事件是否发生，但可以确定它有多大可能性发生。因此，概率论问题的提法是“究竟有多大可能性发生”这是和确定性数学根本不同的。概率论中也有必然性，这种必然性不是通过一次试验确定的，而是通过大量试验确定的。在一次试验中，无法确定它是否发生，但是通过大量试验，可以断定它以多大可能性发生。这是一种统计规律性，而不是一种绝对必然性。掌握概率论研究内容与确定性数学研究内容的区别，就会掌握方法上的区别。

（2）概率论与数理统计也是一门数学学科，它同样使

用经典的推证逻辑。

概率论与数理统计是从实际问题中产生的。但是自从1933年，哥尔莫柯洛夫建立了公理化体系以后，它已经是一门严密的数学学科。它是描述随机现象的数学学科，绝不是一门随心所欲的数学。它仍然要按照公理、定义、定理以及逻辑的规律进行研究。比如概率是从频率产生的，但不能应用频率进行推证。又如随机变量 $X(\omega)$ 不能只作为 Ω 到实数的函数，还必须使 $\{\omega;\ X(\omega)<x\}$ 构成事件。分布函数定义为 $F(x)=P\{\omega;\ X(\omega)<x\}$，必须按此定义研究分布函数的性质。$A\cap B=\Phi$ 称 A 与 B 是不相容的，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ 称 A，B 事件为相互独立的，这些都是基本定义，不能混淆。直觉与经验是概率论产生的历史背景，但一旦被提炼加工成概念与定义以后，就是推理与思维的出发点。因此，在概率论的推理过程中不能只凭经验，而必须利用定义与概念进行严格的逻辑推理。比如两个事件不相容就不能理解为两个事件是相互独立的，反过来也不能把独立事件理解为不相容事件。数学这门学科的基本特点，就是要有严格的定义，并根据定义与公理进行严格的推理。直观是思维的基础，但绝不能做为推理的基础。

（3）概率论与数理统计有着强烈的实际背景，学习概率论与数理统计必须注意理论联系实际。

17世纪概率论已有广泛应用。像贝努利研究平均寿命问题，普哇松研究打靶问题，欧拉研究人口统计问题，都是使用了概率论的基本概念。概率论公理化后极其抽象的概念隐藏着丰富的实际内容。像普哇松分布，负指数分布，只有与电话台呼唤次数、机械故障与寿命联系起来，才能真正理解

这些分布的意义。并通过对这些实际问题的应用才能更加深刻理解概率与分布的真实含义。随机事件、概率、随机变量、分布、数字特征，这些概念只有通过实际应用才会理解得更加深刻。

反映偶然性的随机性，同确定性与必然性一样，也是一个客观存在。但由于确定性数学的影响，往往使人们难于接受随机数学的概念。因为概率总是给人们以可能性，不确定性的量度。但一旦人们理解它所反映的随机现象同样是用确定的逻辑进行思维，就会感到它同样是容易掌握与理解的。

借本书的出版，写以上几点体会，不一定完全正确，仅供大家参考。

张文修

1991．5

目　录

第一章　随机事件及其概率

第一章讨论随机事件及其概率，其中抽象概念多，关系错综复杂，思想方法独特，初学者往往会有一定的困难。但这一章的内容是全课程的基础，是学好全课程的关键，所以必须努力把它学好。

一　总框图　（见插页）

二　基本要求

1　理解随机事件、样本空间的概念，以及随机事件和样本空间的关系。熟练掌握随机事件之间的关系与基本运算。注意两个事件互斥与两个事件对立的区别和联系。

2　理解事件频率的概念，了解随机现象的统计规律性。

3　理解古典概率的定义。了解概率的几何定义和统计定义。知道概率的公理化定义。掌握计算古典概率的一般方法步骤，会计算较简单的古典概率。注意运用乘法原理、加法原理分析古典概率问题。

4　掌握概率的基本性质。

非负性　对任一随机事件A，有$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

规范性　$P(\Omega)=1$；

可加性　设事件A_1，A_2，$\cdots A_n$互斥，

则 $P(A_1+A_2+\cdots A_n)$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

会应用概率的加法定理计算概率，会应用$P(A)=1-P(\overline{A})$简化概率$P(A)$的计算。

5 理解条件概率的概念，会用不同方法计算条件概率。掌握乘法定理，理解并记住全概率公式与贝叶斯公式的条件结论，会应用它们计算应用问题。

6 理解事件的独立性概念，并能应用独立性计算概率。

7 了解贝努里概型的概念，掌握贝努里概型的判定和二项概率的计算方法。

三、重点、难点分析

学习第一章，需要比较广泛的预备知识，主要有加法原理与乘法原理、排列与组合、集合论的有关知识等。现在先对这些知识作一简要复习（熟悉的读者，可略去不读），然后我们对第一章随机事件及其概率中的重点、难点作一些较深入地讨论。

1 预备知识

（1）加法原理与乘法原理

〔加法原理〕

设完成一件事共有k种方式，其中第i种方式有n_i种方法（$i=1, 2, \cdots, k$），且全部 $n_1+n_2+\cdots+n_i+\cdots n_k=\sum_{i=1}^{k} n_i$种方法都是不同的，则完成此事共有$\sum_{i=1}^{k} n_i$种方法。

〔乘法原理〕

设完成一件事有k个步骤，其中第i步有n_i种方法（或选择），且各步骤中任意一种方法都可互相搭配，从而构成整个 过程的某一个(分k步)完成方法，则完成这件事共有

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_i \cdot \cdots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \text{种方法。}$$

加法原理强调完成一件事的方法是可以分种类的，并且在各种方式中各种方法是互斥的，选择其中一种方法就可完成这件事。因此，完成这件事的方法总数是各种方法的个数之和。

乘法原理强调依次逐步完成每一步骤，才算完成这件事，不同步骤之间是相依的，同一步骤内的各个方法是互斥的。因此完成这件事的方法总数是将各步的方法数乘起来（各步不同方法“搭配”起来）的积。

应用两个原理分析问题时，应分别根据问题具有“分类”或“分步”的特点选择运用它们。

（2）排列

〔选排列〕从n个不同的元素中，任意取出r个不同的元素（$0 \leqslant r \leqslant n$），按照一定的顺序排成一列，叫做$n$个不同元素中取出$r$个元素的一种选排列，简称排列。所有不同排列的种数记作P_n^r。

从n个不同的元素中，一个一个地取出元素，依次往r个位置上排，共有r个步骤。第一步，从n个元素中取出一个元素排在第一个位置上，有n种不同的选择。第二步，从

剩下的（$n-1$）个元素中任取一个元素排在第二个位置上，有（$n-1$）种选择，或者说有（$n-2+1$）种选择。一般地，第i步有（$n-i+1$）种选择，直到第r步，有（$n-r+1$）种选择。由乘法原理知，$n_1=n$，$n_2=n-1$，…，$n_i=n-i+1$，…，$n_r=n-r+1$。因此，从n个元素中取出r个元素排在r个位置上这件事，共有

$$\prod_{i=1}^{r} n_i = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$$

$$=\frac{n(-1)\cdot\cdots(n-r+1)(n-r)\cdot\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)\cdot\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$ 种排法，

即从n个不同的元素中取出r个元素的排列种数是

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

这里$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$记作$n!$，称为$n$的阶乘。如 $4!=4\times 3\times 2\times 1=24$，还规定 $0!=1$。

〔全排列〕

n个不同的元素在n个不同位置上的排列称为全排列，不同全排列的种数用P_n表示，

$$P_n=P_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

〔可重复排列〕

从n个不同元素中任取r个排成一列，每个元素可重复取用。这样的一列有序元素称为一个可重复排列。根据乘法原理，不同排列种数为$n\cdot n\cdot\cdots\cdot n=n^r$

例　从0，1，2，……，9这十个数码中任取六个作可重复排列，就得到太原市的电话号码，因此太原市共可安装10^6台电话总机。

特别，n个不同元素全部取出作可重复排列，则不同排列的种数是n^n。

例　一枚硬币连掷两次，观察正面与反面向上的情况。若把硬币的“正面”和“反面”看作两个不同的元素。掷完两次后，得到的每一种结果都是这两个元素的某种可重复排列。其种数是$2^2=4$，即：（正正），（正反），（反正），（反反）。

（3）组合

从n个不同元素中任取r个（$0\leqslant r\leqslant n$）不同元素，这r个元素称为一个组合。不同组合的种数用记号　C_n^r或$\binom{n}{r}$表示。

从n个不同的元素中任取r个（$0\leqslant r\leqslant n$）不同元素的排列与组合的区别在于组合中的元素是无序的，排列中的元素是有序的。因此，从n个元素中取出r个元素，就得到一个组合，这r个元素的不同排列种数是$r!$

从n个不同元素中取出r个元素排成一列这件事，可以分两步完成。第一步，从n个元素中任取r个，有C_n^r种取法；第二步，把取出的r个元素排成一列，有$r!$种不同的排法，按照乘法原理，从n个不同元素中取出r个元素的不同排列种数$P_n^r=C_n^r\cdot r!=r!\ C_n^r$，由此得出：

从不同的n个元素中任取r个的组合种数

$$C_n^r=\frac{1}{r!}P_n^r=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}.$$

组合数的常用性质：$C_n^r=C_n^{n-r}$

（4）举例

下面，通过几个例题，说明两个原理以及排列组合知识在应用中需要注意的问题。

例1　一台机器需要3位工人操纵，要求三人中至少有两位是操作熟练的老工人。小组内有四位老工人和三位新工人，从这七位工人中选派三位去操纵这台机器。问不同的选派方法共有多少种？

解　按照要求，选派的3个人的组成分为两类

第一类　选派两位老工人，一位新工人，按照乘法原理，共有$C_4^2\cdot C_3^1=18$种选法；

第二类　选派三位老工人，有$C_4^3=C_4^1=4$种选法；

按加法原理，不同选派方法共有

$$C_4^2\cdot C_3^1+C_4^3=22\text{（种）}.$$

例2　五名战士排成一列纵队巡逻，其中一名是入伍不久的新战士，他既不当排头，也不当排尾。求符合这些要求的排法种数。

解法一　新战士可选择中间三个位置中的任一个位置，有C_3^1种选法；四名老战士可在其余四个位置上任意排列，共有$P_4=4!$种排列。

按乘法原理，符合要求的排法，有

$C_3^1 \cdot P_4 = 3 \times 24 = 72$（种）。

解法二 五名战士排成一列纵队的任意排法有F_5种，其中不符合要求的排法(即新战士在排头或在排尾)有 $P_2^1 \cdot P_4$ 种，因此符合要求的排法有 $P_5 - C_2^1 \cdot P_4 = 120 - 48 = 72$（种）。

这样分析问题，是运用加法原理的一种形式。这种形式常常使较复杂的问题转化为较简单的问题。它是概率简化计算公式$P(A) = 1 - P(\overline{A})$的基础。

由例 2，还应注意到，用乘法原理分步考虑问题时，应首先考虑特殊元素和特殊位置的要求。例 2 中，新战士是特殊元素，排头排尾是特殊位置。剩下的元素和位置往往只是简单的排列组合问题了。

分析问题时，应努力做到无重复无遗漏，周到细致。下面再看两个例题。

例 3 在 0，1，2，…，9 这十个数码中任取四个，可以摆成多少个是偶数的四位数？

先介绍一个错误的分析，请想想错在哪里？

按乘法原理，并且先考虑特殊要求：千位数字不能取 0，个位数字只能从 0，2，4，6，8 中选择。于是按先排千位、个位，后排百位、十位两个步骤，得到：

千位 ⋮ 百位 十位 ⋮ 个位

P_9^1 ⋮ P_8^2 ⋮ P_5^1

结论：可以排成的是偶数的四位数个数是

$$P_9^1 \cdot P_8^2 \cdot P_5^1 = 2520$$