



教材 动态全解

主编 / 王良全

初三数学

(上)

东北师范大学出版社

教材 动态全解

优异的学习成绩来自于

《教材动态全解》

使用《教材动态全解》

就意味着您成功的开始

丛书策划：第一编辑室

封面设计：魏晋文化 

ISBN 7-5602-3768-1



9 787560 237688 >

ISBN 7-5602-3768-1

G·2469 定价：14.50元



教材 动态全解

主 编 / 王良全

初三数学

(上)

东北师范大学出版社

.....
图书在版编目 (CIP) 数据

教材动态全解·初三数学. 上/王良全主编. —长春:
东北师范大学出版社, 2004. 4
ISBN 7 - 5602 - 3768 - 1

I. 教... II. 王... III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 023765 号
.....

责任编辑: 李 雁 封面设计: 魏国强
责任校对: 齐 虹 责任印制: 张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)
销售热线: 0431—5695744 5688470
传真: 0431—5695734
网址: <http://www.nenup.com>
电子函件: sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
沈阳新华印刷厂印装
沈阳市铁西区建设中路 30 号 (110021)
2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月第 1 次印刷
幅面尺寸: 148 mm×210 mm 印张: 11.5 字数: 340 千
印数: 00 001 — 10 000 册

定价: 14.50 元
如发现印装质量问题, 影响阅读, 可直接与承印厂联系调换



前 言

《教材动态全解》丛书是适应全国中高考命题形式多样化改革需要的初高中各年级同步课堂教学的配套用书。

《教材动态全解》丛书是针对目前国内各省市地区教材版本选择纷繁复杂的局面配备的教辅用书，囊括人教版、北师大版、华东师大版、语文版、苏版等国家教育部教材审定委员会审查通过的教材版本，覆盖初高中各个年级不同学科，且根据各版本教材各自的规律和特点编写。

《教材动态全解》丛书吸收欧美发达国家“活性动态”教辅版式的精髓，紧密结合我国现阶段课堂教学改革的国情，根据不同学科教材的特点和课堂改革的需要，是“教材动态”全解型和名师“课堂动态”实录型优秀图书。这套丛书具有以下突出特点：

一、全面丰富实用

全书知识点分布全面，不遗漏一个忽略点，不放弃一个疑似点，真正体现信息量大，内容丰富，题量充足。全书对教材中的重点、难点、疑点进行逐词、逐句、逐段透彻解读。精编例题，对每一个知识点、易错点、易忽略点、易混淆点、疑似点进行一对一剖析。点对点对应例题，题题揭示规律。

二、体例设置灵活

全书在大栏目统一的基础上，小栏目的设置由编者根据教材内容需要作动态变化。精选全国著名中学师生互动，突破疑难点的精彩课堂实录，突出教师教法的灵活性和学生学法的灵活性。

三、创设互动情境

全书体例版式独特新颖，教育理念前瞻性强，引导学生不断创设问题情境，激励学生注重参与教学过程。书中原创大量新颖的与生产生活实际相结合的探究性问题，培养学生在探究过程中发现知识，并运用知识解决实际问题的能力。

四、分析解读透彻

丛书对《课程标准》和现行《考试大纲》研究透彻，对名师的教法和优秀学生的学法研究透彻，对各年级学生的认知水平和储备不同学科知识研究透彻，对单元学习目标和章节训练习题难易度研究透彻，对重点、难点、疑点突破方法研究透彻，对各种题型及其同类变式的解题方法、技巧、规律、误区研究透彻，对培养学生能力升级的步骤和途径研究透彻。

五、适用对象全面

丛书在策划初始即考虑到全国各地教材版本使用复杂的现状，对目前国内各省市地区可能使用的教材版本均有所涉及，因此，丛书适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用，适用对象全面。

本丛书虽然从策划到编写，再到出版，精心设计，认真操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

第一编辑室
2004年5月

目 录

代数部分

第 12 章 一元二次方程 1

12.1 用公式解一元二次方程 1

重点难点解读 1

一、一元二次方程的概念 1

二、一元二次方程的解法 2

潜能开发广角 6

基础能力训练 9

综合能力训练 10

标答与点拨 11

12.2 用因式分解法解一元二次方程 12

重点难点解读 12

一、因式分解法(重点) 12

二、用因式分解法解一元二次方程的一般步骤 12

潜能开发广角 15

基础能力训练 17

综合能力训练 18

标答与点拨 19

12.3 一元二次方程的根的判别式 21

重点难点解读 21

一、一元二次方程的根的判别式及定理 21

二、一元二次方程根的判别式的应用 22

潜能开发广角 24

基础能力训练 28

综合能力训练 30

标答与点拨 30

12.4 一元二次方程根与系数的关系 32

重点难点解读 32

一、一元二次方程的根与系数的关系(韦达定理) 32

二、根与系数的关系(韦达定理)的应用 35

潜能开发广角 40

基础能力训练 44

综合能力训练 46

标答与点拨 47

12.5 二次三项式的因式分解 49

重点难点解读 49

一、二次三项式的因式分解与解一元二次方程的关系(疑点) 49

二、二次三项式的因式分解公式及用公式法分解二次三项式的方法步骤(重点) 50

潜能开发广角 53

基础能力训练 54

综合能力训练 55

标答与点拨 56

12.6 一元二次方程的应用 57

重点难点解读 57

一、列方程解应用题的意義(重点) 57

二、列方程解应用题的一般步骤(重点、难点) 58

三、列一元二次方程解应用题的常见题

型分析(重点)	58	基础能力训练	101
潜能开发广角	61	综合能力训练	102
基础能力训练	64	标答与点拨	103
综合能力训练	65	单元总结与测评	105
标答与点拨	66	中考信息要求	105
12.7 可化为一元二次方程的分式 方程	68	一、中考中对本章知识考查的常见 题型	105
重点难点解读	68	二、根据近三年来中考试题的变化 趋势分析今后几年内中考试题 变化趋势	105
一、解分式方程的基本方 法(重点)	68	热点考题剖析	105
二、列分式方程解应用题(难点、 重点)	71	综合能力测评	109
潜能开发广角	74	标答与点拨	111
基础能力训练	78	第 13 章 函数及其图像	114
综合能力训练	80	13.1 平面直角坐标系	114
标答与点拨	81	重点难点解读	114
12.8 由一个二元一次方程和一个二 元二次方程组成的方程组	84	一、平面直角坐标系的有关 概念(重点)	114
重点难点解读	84	二、点的坐标的定义(重点)	114
一、二元二次方程及二元二次方 程组(重点)	84	潜能开发广角	117
二、由一个二元二次方程和一个二元 一次方程组成的二元二次方程 组的解法(重点、难点)	85	基础能力训练	120
潜能开发广角	89	综合能力训练	121
基础能力训练	92	标答与点拨	122
综合能力训练	94	13.2 函 数	123
标答与点拨	94	重点难点解读	123
12.9 由一个二元二次方程和一个可 分解为两个二元一次方程的方 程组成的方程组	97	一、常量与变量的概念(重点)	123
重点难点解读	97	二、函数的定义(重点、难点)	123
一、解“二·二”型方程组的基本 思路及策略(重点)	97	三、函数关系式及自变量的取值 范围(重点、难点)	124
二、“二·二”型方程组的解法	97	四、函数值的概念(重点)	128
潜能开发广角	100	潜能开发广角	129
		基础能力训练	132
		综合能力训练	134
		标答与点拨	134
		13.3 函数的图像	135
		重点难点解读	135

一、列表法(重点)	135	综合能力训练	187
二、函数的图像(重点、难点)	135	标答与点拨	188
潜能开发广角	138	6.2 正切和余切	190
基础能力训练	141	重点难点解读	190
综合能力训练	143	一、正切和余切的定义(重点)	190
标答与点拨	143	二、三角函数的概念(重点)	190
13.4 一次函数	145	三、特殊角度($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$)的三角函数值(重点)	191
重点难点解读	145	四、当角度在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间变化时,正切、余切的变化情况(重点)	193
一、一次函数的定义	145	潜能开发广角	194
二、正比例函数的定义	146	基础能力训练	197
潜能开发广角	147	综合能力训练	198
基础能力训练	149	标答与点拨	199
综合能力训练	150	6.3 用计算器求锐角三角函数值和由锐角三角函数值求锐角	
标答与点拨	150	6.4 解直角三角形	200
13.5 一次函数的图像和性质	152	重点难点解读	200
重点难点解读	152	一、解直角三角形的概念(重点)	200
一、一次函数的图像	152	二、直角三角形的元素间的关系(重点、难点)	200
二、一次函数的性质	155	三、不可解直角三角形的解法(重点)	203
潜能开发广角	156	潜能开发广角	204
基础能力训练	159	基础能力训练	207
综合能力训练	160	综合能力训练	209
标答与点拨	161	标答与点拨	210
单元总结与测评	163	6.5 应用举例	
中考信息要求	163	6.6 实习作业	212
热点考题剖析	164	重点难点解读	212
综合能力测评	171	一、仰角和俯角(重点)	212
标答与点拨	174	二、坡角与坡度(重点)	213
几何部分		三、方向角(难点)	215
第6章 解直角三角形	178	潜能开发广角	216
6.1 锐角三角函数	178	基础能力训练	220
重点难点解读	178		
一、正弦与余弦的定义(重点)	178		
二、特殊角度的正弦或余弦值(重点)	179		
潜能开发广角	181		
基础能力训练	186		

综合能力训练	223	7.4 圆心角、弧、弦、弦心距之间 的关系	265
标答与点拨	224	重点难点解读	265
单元总结与测评	226	一、圆的旋转不变性	265
中考信息要求	226	二、圆心角、弦心距的概念	266
一、锐角三角函数	226	三、定理	266
二、解直角三角形	226	四、圆心角的度数与它所对弧的 度数关系	267
热点考题剖析	226	潜能开发广角	268
综合能力测评	232	基础能力训练	269
标答与点拨	235	综合能力训练	270
第7章 圆	241	标答与点拨	271
7.1 圆	241	7.5 圆周角	273
重点难点解读	241	重点难点解读	273
一、圆的有关性质	241	一、圆周角的概念	273
二、和圆有关的概念	242	二、圆周角定理	273
三、点的轨迹	243	三、圆周角定理的推论	274
潜能开发广角	245	潜能开发广角	276
基础能力训练	247	基础能力训练	277
综合能力训练	248	综合能力训练	279
标答与点拨	248	标答与点拨	280
7.2 过三点的圆	249	7.6 圆的内接四边形	282
重点难点解读	249	重点难点解读	282
一、过三点的圆	249	一、定义	282
二、反证法	251	二、圆的内接四边形的性质定理	283
潜能开发广角	252	潜能开发广角	284
基础能力训练	253	基础能力训练	285
综合能力训练	255	综合能力训练	287
标答与点拨	256	标答与点拨	288
7.3 垂直于弦的直径	257	7.7 直线和圆的位置关系	290
重点难点解读	257	重点难点解读	290
一、圆的对称性	257	一、直线和圆的位置关系的定义及 有关概念	290
二、垂径定理	257	二、直线和圆的位置关系的性质和 判定	291
三、垂径定理的推论	259	潜能开发广角	293
潜能开发广角	261		
基础能力训练	261		
综合能力训练	263		
标答与点拨	264		

基础能力训练·····	294	7.11 弦切角·····	323
综合能力训练·····	295	重点难点解读·····	323
标答与点拨·····	296	一、弦切角的概念·····	323
7.8 切线的判定和性质·····	297	二、弦切角定理及推论·····	323
重点难点解读·····	297	潜能开发广角·····	324
一、切线的判定定理·····	297	基础能力训练·····	325
二、切线的性质·····	298	综合能力训练·····	328
潜能开发广角·····	300	标答与点拨·····	329
基础能力训练·····	301	7.12 和圆有关的比例线段·····	331
综合能力训练·····	303	重点难点解读·····	331
标答与点拨·····	305	一、相交弦定理及推论·····	331
7.9 三角形的内切圆·····	307	二、切割线定理及推论·····	332
重点难点解读·····	307	潜能开发广角·····	334
一、三角形内心等概念·····	307	基础能力训练·····	335
二、三角形内切圆的画法·····	307	综合能力训练·····	337
潜能开发广角·····	310	标答与点拨·····	338
基础能力训练·····	311	单元总结与测评·····	341
综合能力训练·····	312	研究性学习·····	341
标答与点拨·····	313	一、注重定理的基本图形及应用·····	341
7.10 切线长定理·····	314	二、注重教材中典型例题或习题	
重点难点解读·····	314	的应用与延伸·····	343
一、切线长的概念(重点)·····	314	中考信息要求·····	
二、切线长定理(重点)·····	314	一、中考考点考向分析·····	344
二、圆的外切四边形的两组对边		二、中考考题的数学思想和方法	
之和相等·····	315	考向分析·····	344
潜能开发广角·····	316	热点考题剖析·····	345
基础能力训练·····	319	综合能力测评·····	347
综合能力训练·····	320	标答与点拨·····	349
标答与点拨·····	321		

代数部分

第十二章

一元二次方程

一 用公式解一元二次方程



重点难点解决

一、一元二次方程的概念

1. 定义(重点)

只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的整式方程叫作一元二次方程.

一元二次方程应同时满足三点:①是整式方程;②只含有一个未知数;③未知数的最高次数是2.不满足其中任何一点的方程都不是一元二次方程.

2. 一元二次方程的一般形式(重点、难点)

一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$, 其中 ax^2 叫作二次项, bx 叫作一次项, a 叫作二次项的系数, b 叫作一次项的系数, c 叫作常数项.

理解一元二次方程的一般形式应注意以下几点:

① $a \neq 0$ 是一元二次方程一般形式的一个重要组成部分, 因为方程 $ax^2+bx+c=0$ 中, 只有当 $a \neq 0$ 时, 才叫一元二次方程. 反过来, 如果明确指出方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程, 那么就隐含了 $a \neq 0$ 这个条件.

② 任何一个一元二次方程都可以化为一般形式, 并且只有将方程化成一般形式之后, 才能确定它的二次项系数及二次项、一次项系数及一次项、常数项.

③ 判断一个方程是不是一元二次方程, 不能只看表面形式, 要将方程化成一般形式, 再看它是否符合一元二次方程的三个条件.

例1 判定下列方程是不是一元二次方程(关于 x 的方程).

(1) $x^2 + 3x + \frac{2}{x} = 0$;

(2) $x^2 + 3x - 2 = x^2$;

(3) $ax^2 + bx + c = 0$;

(4) $(m^2 + 3)x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$.

思维过程 方程(1)因分母中含有未知数,所以不是整式,故也一定不是一元二次方程.(2)方程经整理变形后为 $3x - 2 = 0$,未知数 x 的最高次数是1,而不是2,因而它不是一元二次方程.所谓关于 x 的方程,就是指方程中只有 x 是未知数,而其他字母都是字母系数,可看作已知数.根据一元二次方程的定义或一般形式分析,方程(3)不一定是一元二次方程,因为 $a=0$ 时它不是一元二次方程.方程(4)符合一元二次方程的一般形式特点,且二次项系数 $m^2 + 3 \neq 0$.

答案 方程(4)是一元二次方程,方程(1)(2)(3)都不是一元二次方程.

例2 把方程 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) + (2x + 1)^2 = x - 2$ 化为 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的一般形式,并写出它的二次项的系数 a ,一次项的系数 b ,常数项 c 各是多少.

思维过程 显然,问题中的方程不是一般形式,所以应先去括号,移项,合并同类项,将方程化为一般形式,然后作答.

答案 去括号得 $x^2 - 3 + 4x^2 + 4x + 1 = x - 2$,

移项得 $x^2 - 3 + 4x^2 + 4x + 1 - x + 2 = 0$,

合并同类项得 $5x^2 + 3x = 0$,

这里二次项的系数 $a=5$,一次项的系数 $b=3$,常数项 $c=0$.

二、一元二次方程的解法

1. 直接开平方法(重点)

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的根的方法叫作直接开平方法.

(1)直接开平方法的理论依据是平方根的定义及其性质,直接开平方法适用于解:①形如 $x^2 = a$ ($a \geq 0$) 的方程;②形如 $(x+a)^2 = b$ ($b \geq 0$) 的一元二次方程,根据平方根的定义可知 $x+a = \pm\sqrt{b}$,即 $x = -a \pm\sqrt{b}$,当 $b < 0$ 时方程 $(x+a)^2 = b$ 没有实数根.

(2)对于一般形式下的一元二次方程,就不能直接应用开平方法求解.

例3 用直接开平方法解下列方程.

(1) $9x^2 - 25 = 0$; (2) $4(x-2)^2 - 36 = 0$; (3) $\frac{1}{2}(x+3)^2 = 4$.

思维过程 先将方程化成 $x^2 = a (a \geq 0)$ 或 $(x+a)^2 = b (b \geq 0)$ 的形式, 再开平方.

答案 (1) 移项得 $9x^2 = 25$, 将两边除以 9 得 $x^2 = \frac{25}{9}$,

由平方根的定义可知 x 是 $\frac{25}{9}$ 的平方根,

$$\therefore x = \pm \frac{5}{3}, \text{ 即 } x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{5}{3}.$$

(2) 将原方程化为 $(x-2)^2 = 9$, $\therefore x-2 = \pm 3$, 故 $x_1 = 5, x_2 = -1$.

(3) 将原方程化为 $(x+3)^2 = 8$, $\therefore x+3 = \pm 2\sqrt{2}$,

故 $x_1 = -3 + 2\sqrt{2}, x_2 = -3 - 2\sqrt{2}$.

2. 配方法(难点)

(1) 通过配方法使方程的左边是一个完全平方式, 右边是一个非负数, 再利用直接开平方法求出一元二次方程的解的方法叫作配方法.

配方法的理论根据是完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, 把公式中的 a 看作未知数 x , 并用 x 代替, 则有 $x^2 \pm 2bx + b^2 = (x \pm b)^2$.

注意上式中: 等式的左边是关于 x 的二次三项式, 二次项的系数为 1, 常数项等于一次项系数一半的平方, 即 $b^2 = \left(\frac{\pm 2b}{2}\right)^2$.

(2) 用配方法解一元二次方程的一般步骤:

- ① 方程两边同除以二次项的系数, 将二次项的系数化为 1;
- ② 移项, 使方程的左边为二次项、一次项, 右边为常数项;
- ③ 配方, 方程两边都加上一次项系数一半的平方, 把原方程化为 $(x+m)^2 = n (n \geq 0)$ 的形式;
- ④ 如果方程右边是非负数, 用直接开平方法解变形后的方程.

例4 用配方法解下列方程.

$$(1) x^2 - 4x - 3 = 0; \quad (2) 2x^2 + 3 = 7x.$$

思维过程 方程(1)的二次项的系数为 1, 可以直接运用配方法求解. 方程(2)应先化为一般形式, 这个方程的二次项系数为 2, 为了便于配方, 可把二次项的系数先化为 1, 即把方程的各项都除以 2.

答案 (1) 移项得 $x^2 - 4x = 3$,

$$\text{配方得 } x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2, \text{ 即 } (x-2)^2 = 7,$$

解这个方程得 $x-2=\pm\sqrt{7}$, 即 $x_1=2+\sqrt{7}, x_2=2-\sqrt{7}$.

(2) 移项得 $2x^2-7x=-3$,

把方程的两边都除以 2 得 $x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$,

配方得 $x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{7}{4}\right)^2$, 即 $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$,

解这个方程得 $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$, 即 $x_1=3, x_2=\frac{1}{2}$.

3. 公式法(重点)

公式法是用求根公式求出一元二次方程的根的方法,它是解一元二次方程的一般方法.

(1) 一元二次方程的求根公式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根是由系数 a, b, c 确定的. 因此,在解一元二次方程时,先把方程化为一般形式,在 $b^2-4ac\geq 0$ 的前提下,把各项系数代入公式:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (b^2-4ac\geq 0). \quad (*)$$

就可以求出方程的根. 我们把(*)式子叫作一元二次方程的求根公式.

释疑解难

生问:在推导求根公式的过程中有这样的步骤:

$$\text{第一步: } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

$$\text{第二步: 当 } b^2-4ac\geq 0 \text{ 时, } x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

$$\text{第三步: } x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

这里的第二步为什么要规定 $b^2-4ac\geq 0$? 第三步中“ \pm ”号是第二步中的“ \pm ”号的延续吗?

师答:(1) 因为被开方数必须是非负数,否则 $\sqrt{b^2-4ac}$ 没有意义.

(2) 在 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$ 这一步中, $\sqrt{4a^2}$ 应等于 $\pm 2|a|$, 但因为

式子前有双重符号“ \pm ”, 所以无论 $a>0$, 还是 $a<0$, 最终结果都是 $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

由于分情况详细讨论,书写过程比较麻烦,所以这里就省略了讨论过程,因此第三步中“ \pm ”号不是第二步“ \pm ”号的简单延续.

(2) 运用求根公式解一元二次方程的步骤

① 把方程化为一般形式, 确定 a, b, c .

② 求出 $b^2 - 4ac$ 的值.

③ 若 $b^2 - 4ac \geq 0$, 把 a, b, c 及 $b^2 - 4ac$ 的值代入一元二次方程的求根公式, 求出方程的根; 若 $b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根.

例5 用公式法解下列方程.

$$(1) x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0; \quad (2) \sqrt{3}x = \sqrt{2}(x+1)(x-1).$$

思维过程 方程(1)是一般形式, 确定 a, b, c 后代入求根公式即可求根. 方程(2)不是一般形式, 应先化为一般形式, 再求根.

答案 (1) $\because a=1, b=-2\sqrt{2}, c=2,$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore x_1 = x_2 = \sqrt{2}.$$

(2) 将原方程化为一般形式得 $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$.

$$\therefore a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{3}, c = -\sqrt{2},$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = 11 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} \pm \sqrt{11})}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{22}}{4}, x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{22}}{4}.$$

同类变式 解方程: $3\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - 5\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 = 0$.

思维过程 因为 $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, 若设 $x - \frac{1}{2} = y$, 则原方程可化为 $3y^2 - 5y - 2 = 0$, 解此方程求得 y 值, 再代回原设 $\left(x - \frac{1}{2} = y\right)$, 即可求出 x 的值. 也可以直接把 $x - \frac{1}{2}$ 看作一个整体, 先求出 $x - \frac{1}{2}$ 的值, 再求 x .

答案 解法 1: 设 $x - \frac{1}{2} = y$, 原方程化为 $3y^2 - 5y - 2 = 0$.

$$\therefore a=3, b=-5, c=-2, b^2 - 4ac = 49,$$

特别提示

(1) 此求根公式专指一元二次方程的求根公式, 只有当确认方程是一元二次方程时, 才可使用它.

(2) 对于本例方程(1), 不要认为只有一个实数根, 此时应将方程的根表述成 $x_1 = x_2 = \dots$ 的形式.

$$\therefore y = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm 7}{6}, \therefore y_1 = 2, y_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{当 } y = -\frac{1}{3} \text{ 时, } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{1}{6}.$$

$$\text{当 } y = 2 \text{ 时, } x - \frac{1}{2} = 2, \text{ 解得 } x = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore \text{原方程的解为 } x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{解法 2: 原方程化为 } 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 = 0.$$

$$\text{将 } x - \frac{1}{2} \text{ 看作一个整体, } \therefore a = 3, b = -5, c = -2,$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 49,$$

$$\therefore x - \frac{1}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

$$\therefore x - \frac{1}{2} = \frac{12}{6} \text{ 或 } x - \frac{1}{2} = \frac{-2}{6}, \therefore x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{5}{2}.$$

解题技巧

把一个数学式子或者其中的一部分看作一个整体,用中间变量去代换,从而简化式子的结构,使问题易于解决,这种解题的方法是换元法,解法1应用换元法,把关于 x 的方程化为关于 y 的方程,从而达到简化方程的目的.解法2实际上也是应用了换元思想.

**潜能开发广角****综合方法****根“回娘家”——运用定义解题**

数学概念是数学的基础与出发点,当面临条件甚少的问题时,记住著名的数学家玻利亚的话“回到定义中去”,这就是所说的利用数学概念解题.如: x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根,则有 $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ 和 $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ 等.在中考中,一元二次方程的定义都有上佳的“表演”.

例6 已知 α 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根,试求 $\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 5\alpha + 1}{\alpha^2 + 1}$ 的值.

思维过程 由于 α 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根,可得 $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$,再由求代数式的值的技巧可以求出所求代数式的值.

答案 $\because \alpha$ 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根,

$$\therefore \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0, \text{ 即有 } \alpha^2 = 3\alpha - 1,$$

解题技巧

一元二次方程常见的变形方法有:
①把 $ax^2 + bx + c = 0$ 变形为 $ax^2 = -bx - c$;
②把 $ax^2 + bx + c = 0$ 变形为 $ax^2 + bx = -c$;
③把 $ax^2 + bx + c = 0$ 变形为 $ax + \frac{c}{x} = -b$.其中①②体现了“降次”代换的思想.利用“降次”的思想将高次化为低次的变形技巧是解本题的关键.