教材动态全解

主编／王良全

初三数学

（上）

东北师范大学出版社

教材
动态全解

优异的学习成绩来自于
《教材动态全解》
使用《教材动态全解》
就意味着您成功的开始

丛书策划：第一编辑室
封面设计：魏晋文化 WEIJINWENHUA

ISBN 7-5602-3768-1
9 787560 237688 >

ISBN 7-5602-3768-1
G·2469 定价:14.50元

教材动态全解

主 编／王良全

初三数学

（上）

东北师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

教材动态全解·初三数学．上/王良全主编．—长春：东北师范大学出版社，2004.4

ISBN 7-5602-3768-1

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第023765号

□责任编辑：李　雁　□封面设计：魏国强

□责任校对：齐　虹　□责任印制：张文霞

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街5268号（130024）

销售热线：0431—5695744　5688470

传真：0431—5695734

网址：http：//www.nenup.com

电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

沈阳新华印刷厂印装

沈阳市铁西区建设中路30号（110021）

2004年4月第1版　2004年4月第1次印刷

幅面尺寸：148 mm×210 mm　印张：11.5　字数：340千

印数：00 001 — 10 000册

定价：14.50元

前　言

《教材动态全解》丛书是适应全国中高考命题形式多样化改革需要的初高中各年级同步课堂教学的配套用书。

《教材动态全解》丛书是针对目前国内各省市地区教材版本选择纷繁复杂的局面配备的教辅用书，囊括人教版、北师大版、华东师大版、语文版、苏版等国家教育部教材审定委员会审查通过的教材版本，覆盖初高中各个年级不同学科，且根据各版本教材各自的规律和特点编写。

《教材动态全解》丛书吸收欧美发达国家“活性动态”教辅版式的精髓，紧密结合我国现阶段课堂教学改革的国情，根据不同学科教材的特点和课堂改革的需要，是“教材动态”全解型和名师“课堂动态”实录型优秀图书。这套丛书具有以下突出特点：

一、全面丰富实用

全书知识点分布全面，不遗漏一个忽略点，不放弃一个疑似点，真正体现信息量大，内容丰富，题量充足。全书对教材中的重点、难点、疑点进行逐词、逐句、逐段透彻解读。精编例题，对每一个知识点、易错点、易忽略点、易混淆点、疑似点进行一对一剖析。点点对应例题，题题揭示规律。

二、体例设置灵活

全书在大栏目统一的基础上，小栏目的设置由编者根据教材内容需要作动态变化。精选全国著名中学师生互动，突破疑难点的精彩课堂实录，突出教师教法的灵活性和学生学法的灵活性。

三、创设互动情境

全书体例版式独特新颖，教育理念前瞻性强，引导学生不断创设问题情境，激励学生注重参与教学过程。书中原创大量新颖的与生产生活实际相结合的探究性问题，培养学生在探究过程中发现知识，并运用知识解决实际问题的能力。

四、分析解读透彻

丛书对《课程标准》和现行《考试大纲》研究透彻，对名师的教法和优秀学生的学法研究透彻，对各年级学生的认知水平和储备不同学科知识研究透彻，对单元学习目标和章节训练习题难易度研究透彻，对重点、难点、疑点突破方法研究透彻，对各种题型及其同类变式的解题方法、技巧、规律、误区研究透彻，对培养学生能力升级的步骤和途径研究透彻。

五、适用对象全面

丛书在策划初始即考虑到全国各地区教材版本使用复杂的现状，对目前国内各省市地区可能使用的教材版本均有所涉及，因此，丛书适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用，适用对象全面。

本丛书虽然从策划到编写，再到出版，精心设计，认真操作，可谓尽心尽力，但疏漏之处在所难免，诚望广大读者批评指正。

第一编辑室

2004 年 5 月

目录

代数部分

第十二章 一元二次方程

一 用公式解一元二次方程

重点难点解读

一、一元二次方程的概念

1. 定义(重点)

只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫作一元二次方程.

一元二次方程应同时满足三点:①是整式方程;②只含有一个未知数;③未知数的最高次数是 2. 不满足其中任何一点的方程都不是一元二次方程.

2. 一元二次方程的一般形式(重点、难点)

一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,其中 ax^2 叫作二次项,bx 叫作一次项,a 叫作二次项的系数,b 叫作一次项的系数,c 叫作常数项.

理解一元二次方程的一般形式应注意以下几点:

① $a\neq0$ 是一元二次方程一般形式的一个重要组成部分,因为方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,只有当 $a\neq0$ 时,才叫一元二次方程. 反过来,如果明确指出方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程,那么就隐含了 $a\neq0$ 这个条件.

② 任何一个一元二次方程都可以化为一般形式,并且只有将方程化成一般形式之后,才能确定它的二次项系数及二次项、一次项系数及一次项、常数项.

③ 判断一个方程是不是一元二次方程,不能只看表面形式,要将方程化成一般形式,再看它是否符合一元二次方程的三个条件.

例1 判定下列方程是不是一元二次方程(关于 x 的方程).

(1)$x^2+3x+\frac{2}{x}=0$；　　　　(2)$x^2+3x-2=x^2$；

(3)$ax^2+bx+c=0$；　　　　(4)$(m^2+3)x^2+\sqrt{3}x-2=0$.

思维过程　方程(1)因分母中含有未知数，所以不是整式，故也一定不是一元二次方程.(2)方程经整理变形后为 $3x-2=0$，未知数 x 的最高次数是 1，而不是 2，因而它不是一元二次方程.所谓关于 x 的方程，就是指方程中只有 x 是未知数，而其他字母都是字母系数，可看作已知数.根据一元二次方程的定义或一般形式分析，方程(3)不一定是一元二次方程，因为 $a=0$ 时它不是一元二次方程.方程(4)符合一元二次方程的一般形式特点，且二次项系数 $m^2+3\neq0$.

答案　方程(4)是一元二次方程，方程(1)(2)(3)都不是一元二次方程.

例2　把方程$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+(2x+1)^2=x-2$ 化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的一般形式，并写出它的二次项的系数 a，一次项的系数 b，常数项 c 各是多少.

思维过程　显然，问题中的方程不是一般形式，所以应先去括号，移项，合并同类项，将方程化为一般形式，然后作答.

答案　去括号得 $x^2-3+4x^2+4x+1=x-2$，

移项得 $x^2-3+4x^2+4x+1-x+2=0$，

合并同类项得 $5x^2+3x=0$，

这里二次项的系数 $a=5$，一次项的系数 $b=3$，常数项 $c=0$.

二、一元二次方程的解法

1. 直接开平方法(重点)

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的根的方法叫作直接开平方法.

(1)直接开平方法的理论依据是平方根的定义及其性质，直接开平方法适用于解：①形如 $x^2=a(a\geqslant0)$的方程；②形如$(x+a)^2=b(b\geqslant0)$的一元二次方程，根据平方根的定义可知 $x+a=\pm\sqrt{b}$，即 $x=-a\pm\sqrt{b}$，当 $b<0$ 时方程$(x+a)^2=b$ 没有实数根.

(2)对于一般形式下的一元二次方程，就不能直接应用开平方法求解.

例3　用直接开平方法解下列方程.

(1)$9x^2-25=0$；　(2)$4(x-2)^2-36=0$；　(3)$\frac{1}{2}(x+3)^2=4$.

思维过程 先将方程化成 $x^2=a(a\geqslant 0)$ 或 $(x+a)^2=b(b\geqslant 0)$ 的形式，再开平方.

答案 (1)移项得 $9x^2=25$，将两边除以 9 得 $x^2=\frac{25}{9}$，

由平方根的定义可知 x 是$\frac{25}{9}$的平方根，

$\therefore x=\pm\frac{5}{3}$，即 $x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=-\frac{5}{3}$.

(2)将原方程化为$(x-2)^2=9$，$\therefore x-2=\pm 3$，故 $x_1=5$，$x_2=-1$.

(3)将原方程化为$(x+3)^2=8$，$\therefore x+3=\pm 2\sqrt{2}$，

故 $x_1=-3+2\sqrt{2}$，$x_2=-3-2\sqrt{2}$.

2. 配方法(难点)

(1)通过配方使方程的左边是一个完全平方式，右边是一个非负数，再利用直接开平方法求出一元二次方程的解的方法叫作配方法.

配方法的理论根据是完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，把公式中的 a 看作未知数 x，并用 x 代替，则有 $x^2\pm 2bx+b^2=(x\pm b)^2$.

注意上式中：等式的左边是关于 x 的二次三项式，二次项的系数为 1，常数项等于一次项系数一半的平方，即 $b^2=\left(\frac{\pm 2b}{2}\right)^2$.

(2)用配方法解一元二次方程的一般步骤：

① 方程两边同除以二次项的系数，将二次项的系数化为 1；

② 移项，使方程的左边为二次项、一次项，右边为常数项；

③ 配方，方程两边都加上一次项系数一半的平方，把原方程化为$(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$的形式；

④ 如果方程右边是非负数，用直接开平方法解变形后的方程.

例4 用配方法解下列方程.

(1)$x^2-4x-3=0$； (2)$2x^2+3=7x$.

思维过程 方程(1)的二次项的系数为 1，可以直接运用配方法求解. 方程(2)应先化为一般形式，这个方程的二次项系数为 2，为了便于配方，可把二次项的系数先化为 1，即把方程的各项都除以 2.

答案 (1)移项得 $x^2-4x=3$，

配方得 $x^2-4x+\left(\frac{-4}{2}\right)^2=3+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$，即$(x-2)^2=7$，

解这个方程得 $x-2=\pm\sqrt{7}$,即 $x_1=2+\sqrt{7}$,$x_2=2-\sqrt{7}$.

(2)移项得 $2x^2-7x=-3$,

把方程的两边都除以 2 得 $x^2-\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}$,

配方得 $x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{4}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{7}{4}\right)^2$,即 $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$,

解这个方程得 $x-\frac{7}{4}=\pm\frac{5}{4}$,即 $x_1=3$,$x_2=\frac{1}{2}$.

3. 公式法(重点)

公式法是用求根公式求出一元二次方程的根的方法,它是解一元二次方程的一般方法.

(1)一元二次方程的求根公式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根是由系数 a,b,c 确定的.因此,在解一元二次方程时,先把方程化为一般形式,在 $b^2-4ac\geqslant0$ 的前提下,把各项系数代入公式:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant0).\quad (※)$$

就可以求出方程的根.我们把(※)式子叫作一元二次方程的求根公式.

释疑解难

生问:在推导求根公式的过程中有这样的步骤:

第一步:$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

第二步:当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时,$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

第三步:$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

这里的第二步为什么要规定 $b^2-4ac\geqslant0$?第三步中“±”号是第二步中的“±”号的延续吗?

师答:(1)因为被开方数必须是非负数,否则 $\sqrt{b^2-4ac}$没有意义.

(2)在 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$这步中,$\sqrt{4a^2}$应等于$\pm2|a|$,但因为式子前有双重符号“±”,所以无论 $a>0$,还是 $a<0$,最终结果都是 $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.由于分情况详细讨论,书写过程比较麻烦,所以这里就省略了讨论过程,因此第三步中“±”号不是第二步“±”号的简单延续.

(2)运用求根公式解一元二次方程的步骤

① 把方程化为一般形式,确定 a,b,c.

② 求出 b^2-4ac 的值.

③ 若 $b^2-4ac\geqslant 0$,把 a,b,c 及 b^2-4ac 的值代入一元二次方程的求根公式,求出方程的根;若 $b^2-4ac<0$,则方程没有实数根.

例5 用公式法解下列方程.

(1)$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$;　　(2)$\sqrt{3}x=\sqrt{2}(x+1)(x-1)$.

思维过程 方程(1)是一般形式,确定 a,b,c 后代入求根公式即可求根.方程(2)不是一般形式,应先化为一般形式,再求根.

答案 (1)$\because a=1,b=-2\sqrt{2},c=2$,

$\therefore b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 1\times 2=0$,

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$\therefore x_1=x_2=\sqrt{2}$.

(2)将原方程化为一般形式得 $\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$.

$\because a=\sqrt{2},b=-\sqrt{3},c=-\sqrt{2}$,

$\therefore b^2-4ac=(-\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=11>0$,

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}\pm\sqrt{11})}{4}$,

$\therefore x_1=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{22}}{4},x_2=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{22}}{4}$.

特别提示

(1)此求根公式专指一元二次方程的求根公式,只有当确认方程是一元二次方程时,才可使用它.

(2)对于本例方程(1),不要认为只有一个实数根,此时应将方程的根表述成 $x_1=x_2=\cdots$ 的形式.

同类变式 解方程:$3\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2-5\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-2=0$.

思维过程 因为 $\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$,若设 $x-\dfrac{1}{2}=y$,则原方程可化为 $3y^2-5y-2=0$,解此方程求得 y 值,再代回原设 $\left(x-\dfrac{1}{2}=y\right)$,即可求出 x 的值.也可以直接把 $x-\dfrac{1}{2}$ 看作一个整体,先求出 $x-\dfrac{1}{2}$ 的值,再求 x.

答案 解法1: 设 $x-\dfrac{1}{2}=y$,原方程化为 $3y^2-5y-2=0$.

$\because a=3,b=-5,c=-2,b^2-4ac=49$,

$\therefore y=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times 3}=\dfrac{5\pm 7}{6}$，$\therefore y_1=2, y_2=-\dfrac{1}{3}$.

当 $y=-\dfrac{1}{3}$ 时，$x-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$，解得 $x=\dfrac{1}{6}$.

当 $y=2$ 时，$x-\dfrac{1}{2}=2$，解得 $x=\dfrac{5}{2}$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\dfrac{1}{6}, x_2=\dfrac{5}{2}$.

解法 2：原方程化为 $3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-5\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-2=0$.

将 $x-\dfrac{1}{2}$ 看作一个整体，$\because a=3, b=-5, c=-2$，

$\therefore b^2-4ac=49$，

$\therefore x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times 3}=\dfrac{5\pm 7}{6}$，

$\therefore x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{12}{6}$ 或 $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{6}$，$\therefore x_1=\dfrac{1}{6}, x_2=\dfrac{5}{2}$.

解题技巧

把一个数学式子或者其中的一部分看作一个整体，用中间变量去代换，从而简化式子的结构，使问题易于解决，这种解题的方法是换元法. 解法 1 应用换元法，把关于 x 的方程化为关于 y 的方程，从而达到简化方程的目的. 解法 2 实际上也是应用了换元思想.

潜能开发广角

综合方法

根“回娘家”——运用定义解题

数学概念是数学的基础与出发点，当面临条件甚少的问题时，记住著名的数学家玻利亚的话“回到定义中去”，这就是所说的利用数学概念解题. 如：x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根，则有 $ax_1^2+bx_1+c=0$ 和 $ax_2^2+bx_2+c=0$ 等. 在中考中，一元二次方程的定义都有上佳的“表演”.

例6　已知 α 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，试求 $\dfrac{\alpha^3-2\alpha^2-5\alpha+1}{\alpha^2+1}$ 的值.

思维过程　由于 α 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，可得 $\alpha^2-3\alpha+1=0$，再由求代数式的值的技巧可以求出所求代数式的值.

答案　$\because \alpha$ 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的根，

$\therefore \alpha^2-3\alpha+1=0$，即有 $\alpha^2=3\alpha-1$，

解题技巧

一元二次方程常见的变形方法有：①把 $ax^2+bx+c=0$ 变形为 $ax^2=-bx-c$；②把 $ax^2+bx+c=0$ 变形为 $ax^2+bx=-c$；③把 $ax^2+bx+c=0$ 变形为 $ax+\dfrac{c}{x}=-b$. 其中①②体现了“降次”代换的思想. 利用“降次”的思想将高次化为低次的变形技巧是解本题的关键.