高等学校教材

谢敬然　柯媛元

# 空间解析几何

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

谢敬然　柯媛元

# 空间解析几何

Kongjian Jiexi Jihe



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书分为六章，分别介绍了向量代数、空间中的平面和直线、空间中的曲面和曲线、$n$ 维空间、二次方程的化简以及二次曲线和二次曲面的一般理论等内容。在 $n$ 维空间一章中，通过对 $n$ 维向量空间、$n$ 维仿射空间和 $n$ 维欧氏空间的讨论，将前面介绍的几何空间中的形体推广到 $n$ 维空间当中。书中配备了大量富有启发性的例题和习题，希望学生从中可以领悟到数学的美妙。

本书可作为高等学校数学类专业本科生的教材或教学参考书，也可供理工科教师和学生参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

空间解析几何／谢敬然，柯媛元编. --北京：高等教育出版社，2013.5

ISBN 978-7-04-031417-5

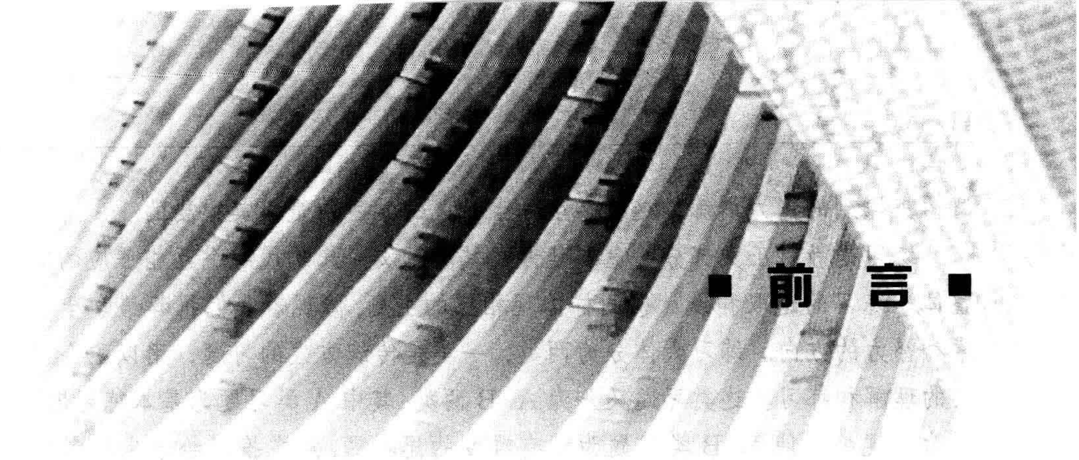
Ⅰ.①空…　Ⅱ.①谢…②柯…　Ⅲ.①立体几何－解析几何－高等学校－教材　Ⅳ.①O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 032403 号

策划编辑　兰莹莹　　责任编辑　贾翠萍　　封面设计　王凌波　　版式设计　于　婕
插图绘制　于　博　　责任校对　殷　然　　责任印制　毛斯璐

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
印　　刷　国防工业出版社印刷厂
开　　本　787mm × 960mm　1/16
印　　张　14.75
字　　数　240 千字
购书热线　010－58581118
咨询电话　400－810－0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2013 年 5 月第 1 版
印　　次　2013 年 5 月第 1 次印刷
定　　价　22.00 元


物 料 号　31417-00



# 前 言

面向社会，面对未来，我们的教育应该致力于帮助学生,在他们心中植入自强不息的内在动力，致力于培养和提高学生的素质和能力。

在大学的学习中，掌握系统的理论知识是重要的，但是学习知识的过程更为重要。经由这个过程，要学会学习。这样才会更有能力去理解和把握在未来将要面对的全新的事物和知识；经由这个过程，要努力去体悟和借鉴前辈们在发现问题、思考问题和解决问题时所展示出来的方法和创想；经由这个过程，要逐渐强化自己综合运用已有的知识或资源去面对和解决问题的能力，逐渐培养发现问题、拓展所得到的知识和创新性思考的能力；经由这个过程，也要学会了解自己、调节自己、把握自己，走向成熟。

我们的教育应该是最大可能地为此提供建议、帮助和指导。我们要与学生合作,共同努力来达到这样的效果。从这个意义上来说，作为实施教育的重要工具之一的教材，不仅仅是正确无误地表述理论知识，更应该把培养和提高学生的素质和能力作为首选功能。

这是编写这本教材的目的，也是贯穿本书始终的指导原则。

一种想法是否有价值，在很大程度上是由其是否有具体的可操作的方式决定的。在这本教材中，我们尝试构建一种具体的方式，把传统知识内容的讲授与努力培养学生的能力这两方面有机地融合在一起。

作为大学第一个学期的课程教材，本书知识内容的安排与其他同类教材相比没有过多的变化。

本书有一些非传统方式的内容，提供一些在阅读、理解、思考等方面的示范和建议，供使用者参考。这些内容主要安排在例题和节后的练习中。

本书中例题的作用是非常重要的。大部分例题都是经过精心设计或挑选的，其中有些例题是在传统模式上加载了更多的含义，有些例题则是非传统模式。一方面，这样会使我们要向学生推荐的想法，因由具体实例展开得出而不至于苍白空洞；另一方面，通过具体的实例，从所经历的过程之中得到更多、

感悟更深刻的能力训练，这在学生一生长久的学习中是极其重要的。

练习是教材正文部分的重要延伸，其与正文一起构成一个互相呼应的有机整体。练习的选取和设计也同样体现相应的主题，体现着我们推荐给学生的思索和努力的方向。练习大体分为两类，一类是传统方式的习题，用以配合对正文的理解和练习。这类习题又分为 A, B 两类，其中 A 类习题为基本练习题，可作为常规练习使用，B 类习题为稍有难度的思考题，意在推荐给学生思考和努力的方向；另一类是非传统的，包含一些思考和尝试，旨在让学生进行一些有益的思考与尝试，并推荐一些有趣的想法。

书中带 * 号的内容，有些是对例题的展开讨论，有些则是对知识的延伸介绍，用小字给出，可作为选学内容。

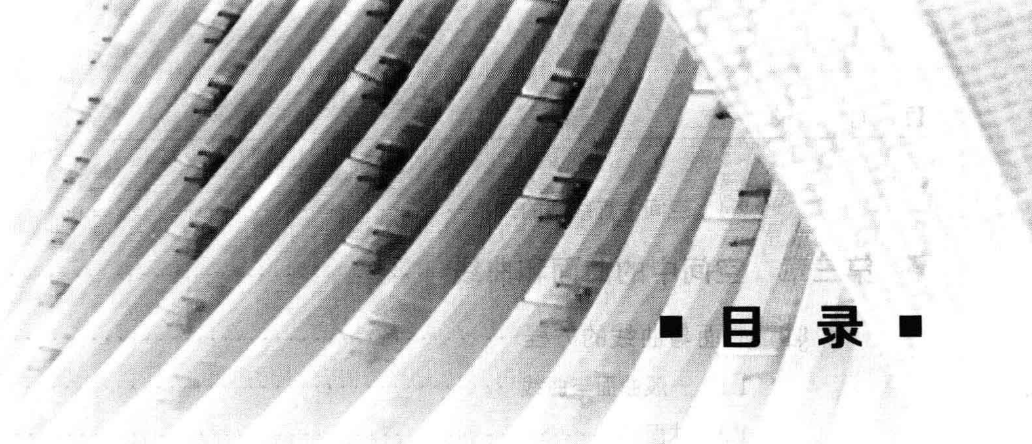
另外，空间解析几何与线性代数这两门课程的不同步，会产生一些混乱和重复。我们把相应的要使用的代数知识列在附录中，以备参考使用。

衷心感谢华南师范大学数学科学学院尹景学教授在本书的编著过程中给予的大力支持与帮助。感谢中国科学院王彦棡博士为本书的例题和习题编选所做的大量工作。特别感谢吉林大学数学学院雷娜教授、宫成春博士、李佳民博士、侯秉喆博士，他们认真阅读了本书初稿，并提出许多宝贵的修改意见。感谢高等教育出版社的王瑜、兰莹莹、贾翠萍、张晓丽等同志对本书出版的关注和为本书出版付出的辛劳。最后，感谢吉林大学数学学院和中国人民大学信息学院领导在本书的出版过程中给予的大力支持。

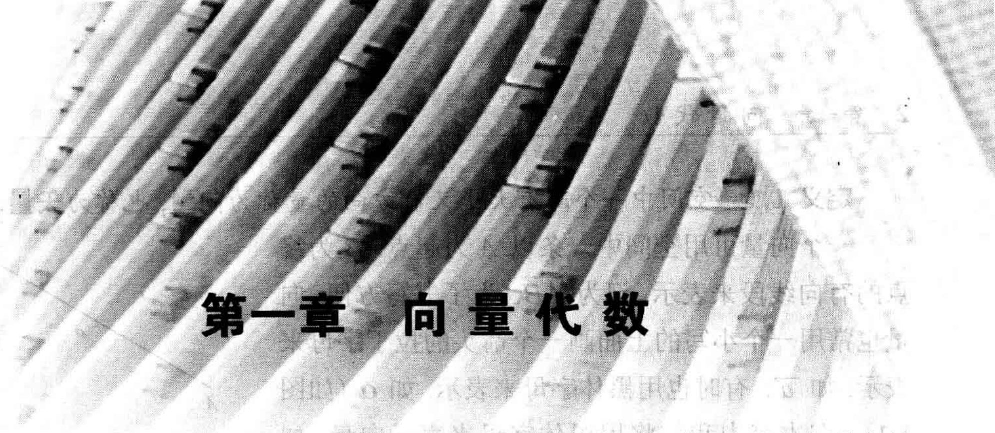
真正有价值的工作应该是能够切实地为社会、为民众带来益处的工作。期待着我们的构想和努力在实践中得到检验和完善。

**编者**

**二零一二年盛夏**



# 目 录



# 第一章 向量代数

从天体运行的轨迹到大海的波涛, 从工艺设计的精巧、规则到生命形态的纷繁、华美, 环绕我们的世界是一个充满了几何图案和几何形体的世界.

几何一直是数学中最富有活力的领域之一. 17 世纪, 坐标的引进, 使得对几何的研究产生了革命性的变化. “数”与“形”经由坐标的引进得到了统合与互相转化, 这种结合使得我们能够使用强有力的代数工具来描述几何形体的属性和相互之间的关系. 同时几何也给予抽象的代数结果以丰富的形象含义, 并为代数研究提出新的问题.

当引进坐标系这个定位系统之后, 一个形体可转由方程来显现. 由多项式方程所表述的几何形体是相对简单的, 对这类形体的讨论称为代数几何, 其中对更为简单的一次和二次多项式方程表述的几何的研究称为解析几何.

平面解析几何是我们在中学就熟悉的. 这里主要是介绍空间以及更抽象的 $n$ 维空间中的解析几何.

在中学的物理和数学学习中, 我们已经对向量、向量的运算及其实际背景与应用有了很多的了解和掌握. 现在我们将从新的角度来介绍向量及其运算, 并用本章中得出的向量运算体系来完成在空间中建立坐标系的工作. 同时, 也为在后面把空间的概念向更广的范围拓展作具体形象化的准备.

## §1 向量及其线性运算

### 1.1 向量的概念

用一个数值来对事物的某一种属性进行量化描述是我们常用的方法, 例如用一个数来标定一个物体的质量. 但是如果我们要量度的属性不能用一个数值来完成, 如描述力时不仅需要说明其大小, 还要标明其作用的方向, 这时便需要引入新的量. 向量就是一种这样的量.

**定义 1.1** 空间中一个既有大小又有方向的量称为**向量**, 也称为**矢量**.

一个向量可用空间中一条以 $A$ 为起点, $B$ 为终点的有向线段来表示, 记为 $\overrightarrow{AB}$. 为了书写方便, 向量也常用一个小写的上面画一个箭头的拉丁字母来表示, 如 $\overrightarrow{a}$. 有时也用黑体字母来表示, 如 $\boldsymbol{a}$ (如图 1.1). 在本书中我们将用黑体字母来表示向量, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

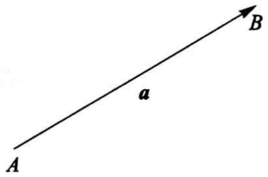


图 1.1

有向线段的长度表示向量的大小, 称为向量的**模**或**长度**, 记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 有向线段的方向表示向量的方向. 由于向量的决定要素是其大小和方向, 所以 $\overrightarrow{AB}$ 在空间平行移动后得到的 $\overrightarrow{A'B'}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 是同一个向量 (如图 1.2), 即向量的有向线段表示不是唯一的.

长度为 0 的向量称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$. 零向量的起点与终点重合, 所以它表示一个点. 与非零向量不同, 零向量的方向是任意的. 长度为 1 的向量称为**单位向量**. 与 $\boldsymbol{a}$ 长度相同、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记为 $-\boldsymbol{a}$.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 把它们的起点放在一起, 便得到 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的**夹角**, 记为 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ (如图 1.3). 我们约定 $0 \leqslant \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \leqslant \pi$.

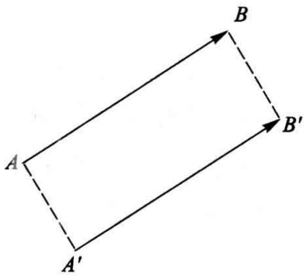


图 1.2

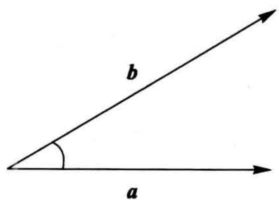


图 1.3

平行于同一平面的一组向量称为**共面的向量**, 平行于同一直线的一组向量称为**共线的向量**.

## 1.2 向量的加法

**定义 1.2** 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量. 将 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}$ 的终点, 然后连接 $\boldsymbol{a}$ 的起点与 $\boldsymbol{b}$ 的终点, 得到向量 $\boldsymbol{c}$(如图 1.4). 称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 构成了一个三角形, 故将此方法称为“三角形法则”.

向量的加法运算有下面的性质:

**命题 1.1** 对于任意的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 有

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

注意到关于向量加法的定义和性质的证明是借助向量的有向线段表示进行的, 而向量的有向线段表示不唯一, 这就需要我们说明所得的结果与有向线段的选择无关才行. 利用平行四边形的性质很容易处理这个问题.

这里只给出性质 2) 的证明, 其余证明留作练习.

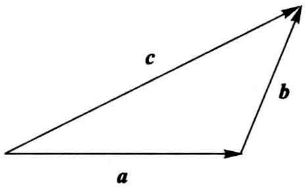



图 1.4

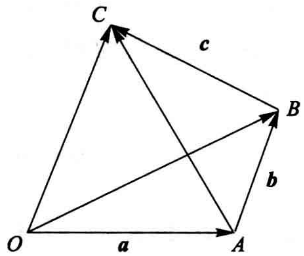



图 1.5

**证明** 2) 取 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的有向线段表示 (如图 1.5), 使得 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$, 则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

故

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

因此有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

□

向量加法的这些性质, 使得我们在考虑 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 之和时可以不考虑其位置顺序和优先处理次序, 简单将它们的和写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

用归纳的方法, 容易得到任意有限多个向量 $\boldsymbol{a}_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的和与位置顺序及优先处理次序无关, 可以记为

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i.$$

实际上, 对多个向量求和时, 不必逐次求两个向量的和, 可利用如下的一般法则立即求出: 如求向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 的和, 可将向量 $\boldsymbol{a}_2$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点, 再将向量 $\boldsymbol{a}_3$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}_2$ 的终点, 以此类推至 $\boldsymbol{a}_n$ 为止, 于是以向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点为起点, 以向量 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{a}$ 即为这 $n$ 个向量之和:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

如用 $O$ 表示向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点, 用 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$ 分别表示向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ 的终点 (如图 1.6), 则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

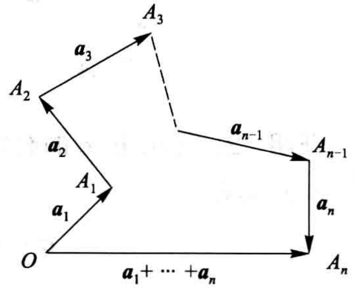



图 1.6

对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

显然有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

## 1.3 数乘向量

**定义 1.3** 实数 $k$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $k\boldsymbol{a}$ 是一个向量. 当 $k>0$ 时, $k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向; 当 $k<0$ 时, $k\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 同向; 当 $k=0$ 时, $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. $k\boldsymbol{a}$ 的长度为

$$|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|.$$

由定义很容易得到 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ 以及 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量的数乘运算有下述性质:

**命题 1.2** 对任意的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和实数 $k$, $m$, 有

1) $k(m\boldsymbol{a})=(km)\boldsymbol{a}$;

2) $(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$;

3) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

**证明** 1) 当 $km=0$ 时, 显然成立. 对于 $km\neq 0$, 可以得出 $k(m\boldsymbol{a})$ 与 $(km)\boldsymbol{a}$ 有相同的方向, 并且

$$|k(m\boldsymbol{a})|=|k||m\boldsymbol{a}|=|k||m||\boldsymbol{a}|=|km||\boldsymbol{a}|=|(km)\boldsymbol{a}|,$$

所以等式成立.

2) 若 $km(k+m)=0$, 容易证明 $(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$.

如果 $km>0$, 则 $(k+m)\boldsymbol{a}$, $k\boldsymbol{a}$, $m\boldsymbol{a}$ 与 $k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}$ 都是同向的, 并且

$$|(k+m)\boldsymbol{a}|=|k+m||\boldsymbol{a}|=(|k|+|m|)|\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|+|m||\boldsymbol{a}|=|k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}.$$

如果 $km<0$, 且 $k+m\neq 0$, 则不妨设 $k+m$ 与 $k$ 同号. 这样 $k+m$, $k$, $-m$ 同号. 由前面的证明, 有

$$(k+m)\boldsymbol{a}+(-m)\boldsymbol{a}=(k+m-m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a},$$

所以

$$(k+m)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{a}.$$

3) 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 结论显然成立.

现设 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线, 则当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向时, 取 $m=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$; 而当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向时, 取 $m=-\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$. 于是可得 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$. 所以有

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=&k(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=k[(m+1)\boldsymbol{b}]\\=&(km+k)\boldsymbol{b}=k(m\boldsymbol{b})+k\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线. 当 $k>0$ 时, 则可取点 $O$, $A$, $B$, $A'$ 和 $B'$ (如图 1.7), 使得 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OA'}=k\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{A'B'}=k\boldsymbol{b}$. 于是 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OB'}=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 另一方面, 由相似三角形的性质可得

$$k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

若 $k<0$, 则 $-k>0$, 有

$$-k\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=-k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

同样可得所求. □

**例 1.1** 设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 为正六边形 (如图 1.8), $O$ 为其中心. 则

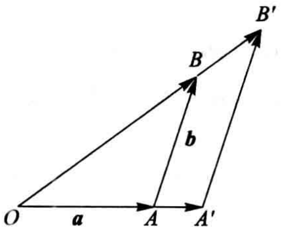



图 1.7

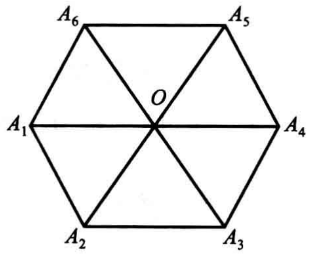



图 1.8

$$\sum_{i=2}^{6}\overrightarrow{A_1A_i}=6\overrightarrow{A_1O}.$$

**解** 由于 $\overrightarrow{A_1A_i}=\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_i}$, 所以

$$\sum_{i=2}^{6}\overrightarrow{A_1A_i}=5\overrightarrow{A_1O}+\sum_{i=2}^{6}\overrightarrow{OA_i}=6\overrightarrow{A_1O}+\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{OA_i}.$$

显然有 $\sum\limits_{i=1}^{6}\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0}$, 可得到

$$\sum_{i=2}^{6}\overrightarrow{A_1A_i}=6\overrightarrow{A_1O}.$$

□

* (一) 题后的思考.

1) $A_1$ 很特别吗?

其实可以把结果写成更整齐的形式

$$\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{A_1A_i}=6\overrightarrow{A_1O}.$$

容易验证把 $A_1$ 换成任意一点 $P$, 同样可得

$$\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{PA_i}=6\overrightarrow{PO}.$$

2) 所得的结果和使用的方法可以一般化吗?

很容易得出, 这个结论对偶数条边的正多边形都有类似的结果. 边数为奇数的正多边形的情况会如何?

猜测: 对平面上的以 $O$ 为中心的正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$, $P$ 为空间中任意一点, 总有

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}=n\overrightarrow{PO}.$$

特别地, 当 $P$ 与 $O$ 重合时, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}=\mathbf{0}.$$

该结论的证明留作练习.

3) 变换一个角度考虑. 对于正多边形来说, 中心 $O$ 是很特别的. 那么对于一般的多边形会怎样? 是否对空间中任意多边形 $A_1A_2\cdots A_n$, 总有空间中的一点 $O$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\mathbf{0},$$

即 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{OA_n}$ 也构成一个多边形. 事实上, 若取定空间中的一点 $P$, 再选取 $O$, 使得 $\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}=\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_i})=n\overrightarrow{OP}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{PA_i}=\mathbf{0}.$$

可见, 这样的点 $O$ 存在并且是唯一的. 从某种意义上来说, $O$ 是这个多边形的“重心”.

(二) 问题的变化.

我们来考虑两个多边形具有相同的"重心"的情况.

设有两个四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$, $C_i$, $D_i$ $(i=1,2,3,4)$ 分别是相应各边的中点 (如图 1.9). 证明: 如果 $C_1C_3$, $C_2C_4$, $D_1D_3$, $D_2D_4$ 四线共点, 则线段 $A_iB_i$ 经过平移后能构成一个四边形.

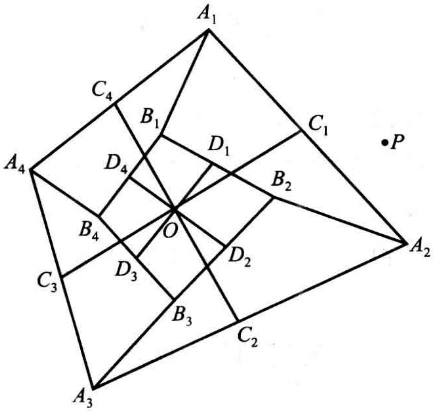



图 1.9

**证明** 设 $P$ 为任意一点. 由题设有

$$\overrightarrow{PC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}),$$

$$\overrightarrow{PC_3}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_4}).$$

$C_1C_3$, $C_2C_4$ 是平行四边形 $C_1C_2C_3C_4$ 的两条对角线, 对其交点 $O$ 有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{PC_3})\\&=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_4}),\end{aligned}$$

且 $O$ 也为 $C_1C_3$, $C_2C_4$, $D_1D_3$, $D_2D_4$ 四线所共的点, 即有

$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_4})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PB_2}+\overrightarrow{PB_3}+\overrightarrow{PB_4}),$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{A_iB_i}=\mathbf{0}.$$

□

进一步思考, 若线段 $A_iB_i$ 经过平移后能构成一个四边形, 是否有 $C_1C_3$, $C_2C_4$, $D_1D_3$, $D_2D_4$ 四线共点, 即上题结论是一个等价的条件吗?

## 1.4 线性表示

引入了向量的加法和数乘的运算之后, 空间中的全体向量构成一个运算系统——**向量空间**.

**定义 1.4** 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 为 $s$ 个向量, 若有数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{a}_s,$$

则称 $\boldsymbol{a}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ **线性表示**.

**命题 1.3** 若向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 共线, 则其中之一可以表示为另一个向量的倍数.

**证明** 设 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 是共线的向量. 若 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$, 则有 $\boldsymbol{a}_1 = 0\boldsymbol{a}_2$. 若 $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$, 则当 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 同向时, 有

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1.$$

当 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 反向时, 有

$$\boldsymbol{a}_2 = -\frac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1.$$

□

由数乘向量的定义及命题 1.3, 我们得到一个更整齐的表述:

**推论 1.1** 向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 共线, 当且仅当存在不全为 0 的实数 $k_1$ 和 $k_2$, 使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}.$$

对于共面的向量, 我们有

**命题 1.4** 向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 共面, 当且仅当存在不全为 0 的实数 $k_1$, $k_2$ 和 $k_3$, 使得

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$

**证明** 设 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 是共面向量. 若 $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 共线, 则由推论 1.1 知有不全为 0 的 $k_2$ 和 $k_3$, 使得

$$0\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$