# 自然数的组合积的和及其应用

赵建林
王慧敏 著

天津大学出版社

# 自然数的组合积的和及其应用

赵建林　　王慧敏　著

天津大学出版社

（津）新登字012号

自然数的组合积的和及其应用

赵建林 王慧敏 著

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米 $^{1}/_{32}$ 印张：$6^{1}/_{2}$ 字数：147千字

1992年12月第一版 1992年12月第一次印刷

印数：1—1000

ISBN 7-5618-0421-0

O·46

定价：3.90元

# 前　言

一切客观事物本来是相互联系的和具有内部规律的，人们的任务就是要在三大实践中去发现和认识客观事物的相互联系和内部规律，进而能动地使其服务于社会，造福于人类。

自然数可重复的组合积的和（用符号$\widehat{\sum}_n^p$表示且规定$\widehat{\sum}_n^0=1$，$\widehat{\sum}_0^0=1$，$\widehat{\sum}_0^p=0$，$\widehat{\sum}_1^p=1$，$\widehat{\sum}_n^{-p}=0$（$p\in N$））与自然数不重复的组合积的和（用符号$\sum_n^p$表示，且规定$\sum_n^0=1$，$\sum_0^0=1$，$\sum_n^{n+p}=0$，$\sum_n^{-p}=0$（$p\in N$）），这两个客观事物不但有着它们自身的变化规律和性质，而且它们之间以及它们与其他客观事物也有着相互联系。应用自然数可重复的组合积的和的变化规律及性质不但能推证出如

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^r C_n^i=(-1)^n n\widehat{\sum}_n^{r-n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^r C_n^i=\sum_{i=1}^{r}\widehat{\sum}_i^{r-i} i!\,C_n^i 2^{n-i};$$

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i i^r C_n^i=(-1)^p\sum_{i=1}^{r}\widehat{\sum}_i^{r-i} C_n^i C_{n-1-i}^{p-i};$$

$$\sum_{i=0}^{r}\widehat{\sum}_{1+i}^{r-i} i!\,C_n^i=(1+n)^r;$$

$$\sum_{i=1}^{r}\hat{\sum_{i}}^{r-i} i!\,C_n^i = n^r$$

等五十多个组合级数的求和公式，而且借助于$\sum_{i=1}^{r}\hat{\sum_{i}}^{r-i} i!\,C_n^i = n^r$推证出至今仍是一个一般人望而生畏，不少人争相探讨且尚未得出理想结论的$\sum_{k=1}^{n} k^r$的一个形式简单、规律性强、运算简捷、便于记忆的理想公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \sum_{i=1}^{r}\hat{\sum_{i}}^{r-i} i!\,C_{n+1}^{1+i}。$$

应用自然数不重复的组合积的和的发展规律和性质不但能推证调和级数的前$m$项和$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = \frac{\sum_{m}^{m-1}}{m!}$与相邻$m$个自然数的倒数和

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p+k} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1}(m-i)\sum_{n}^{i} p^{m-1-i}}{\prod_{i=1}^{m}(p+i)}$$

而且还能推证出覆盖面大、规律性强、形式简单、便于记忆的有趣的极限公式：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+p)(k+p+m)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{m-1}(m-i)\sum\limits_{m}^{i}p^{m-1-i}}{m\prod\limits_{i=1}^{m}(p+i)}$$

人们一旦认识了自然数可重复的组合积的和与自然数不重复的组合积的和的发展规律和性质，就会显示出它的实用价值。

由于我们的水平所限，缺点甚至错误难免。但愿拙著能起抛砖引玉作用，引起众多的有志之士对自然数的组合积的和的再认识，并深入探讨它们的更广泛的应用，以达到使它们服务于社会、造福于人类的目的。

赵建林

1990．5

# 目录

# 第一章　预备知识$\sum\limits_{k=1}^{n} k^r=?$

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^r=?$对研究自然数可重复的组合积的和起着极其重要的作用。

我们发现$\sum\limits_{k=1}^{n} k^r$的表达式是$n$和$r$的一个统一函数关系式，即

$$\sum_{k=1}^{n} k^r=\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\frac{1}{2}n^r+\sum_{j=2}^{r}\left[\frac{\prod\limits_{i=0}^{j-2}(r-i)D_j}{(j+1)!\,j!}n^{r-j+1}\right],$$

其中$D_j$（$j$是大于或等于 2 的自然数）是$j$阶行列式，行列式的元素是一些“0”和形如杨辉三角的排列（如图 1）缺一个边和两个小角再按逆时针旋转90°组成的（如图2）。

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & & 1\\
 & & & & 1 & \boxed{1}\\
 & & & 1 & 2 & 1\\
 & & 1 & 3 & 3 & 1\\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1\\
1 & \boxed{5} & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

图 1

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1\\
2 & 3 & 4 & 5\\
0 & 3 & 6 & 10\\
0 & 0 & 4 & 10
\end{vmatrix}$$

图 2

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 6\end{vmatrix},$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\0&3&6&10\\0&0&4&10\end{vmatrix},\quad D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&4&5&6\\0&3&6&10&15\\0&0&4&10&20\\0&0&0&5&15\end{vmatrix},$$

……………………………………

**证** 设$\sum\limits_{k=0}^{n}k^r=A_0n^{r+1}+A_1n^r+A_2n^{r-1}+\cdots\cdots+A_rn$，则

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^r=A_0(n-1)^{r+1}+A_1(n-1)^r+A_2(n-1)^{r-1}+\cdots+A_r(n-1)$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^r-\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^r=n^r$是恒等式，即

$$A_0C_{r+1}^1n^r+(-A_0C_{r+1}^2+A_1C_r^1)n^{r-1}+(A_0C_{r+1}^3-A_1C_r^2+A_2C_{r-1}^1)n^{r-2}$$
$$+(-A_0C_{r+1}^4+A_1C_r^3-A_2C_{r-1}^2+A_3C_{r-2}^1)n^{r-3}+\cdots$$
$$+[(-1)^rA_0+(-1)^{r-1}A_1+\cdots+A_r]=n^r\text{是恒等式}$$

所以由恒等式的性质可得方程组

$$\begin{cases}A_0C_{r+1}^1=1\\-A_0C_{r+1}^2+A_1C_r^1=0\\A_0C_{r+1}^3-A_1C_r^2+A_2C_{r-1}^1=0\\-A_0C_{r+1}^4+A_1C_r^3-A_2C_{r-1}^2+A_3C_{r-2}^1=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(-1)^rA_0+(-1)^{r-1}A_1+(-1)^{r-2}A_2+\cdots+A_r=0\end{cases}$$

解这个方程组得

$$A_0=\frac{1}{r+1},$$

$$A_1=\frac{1}{2},$$

$$A_2=\frac{\begin{vmatrix} C^2_{r+1} & C^3_{r+1} \\ C^1_r & C^2_r \end{vmatrix}}{C^1_{r+1}\cdot C^1_r\cdot C^1_{r-1}}=\frac{\prod\limits_{i=0}^{0}(r-i)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{3!\,2!}$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=0}^{2-2}(r-i)D_2}{3!\,2!},$$

$$A_3=\frac{\begin{vmatrix} C^2_{r+1} & C^3_{r+1} & C^4_{r+1} \\ C^1_r & C^2_r & C^3_r \\ 0 & C^1_{r-1} & C^2_{r-1} \end{vmatrix}}{C^1_{r+1}\cdot C^1_r\cdot C^1_{r-1}\cdot C^1_{r-2}}=\frac{\prod\limits_{i=0}^{1}(r-i)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{4!\,3!}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=0}^{3-2}(r-i)D_3}{4!\,3!},$$

$$A_4=\frac{\begin{vmatrix} C^2_{r+1} & C^3_{r+1} & C^4_{r+1} & C^5_{r+1} \\ C^1_r & C^2_r & C^3_r & C^4_r \\ 0 & C^1_{r-1} & C^2_{r-1} & C^3_{r-1} \\ 0 & 0 & C^1_{r-2} & C^2_{r-2} \end{vmatrix}}{C^1_{r+1}\cdot C^1_r\cdot C^1_{r-1}\cdot C^1_{r-2}\cdot C^1_{r-3}}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=0}^{2}(r-i)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{vmatrix}}{5!\,4!}=\frac{\prod\limits_{i=0}^{4-2}(r-i)D_4}{5!\,4!}$$

………………

$$A_j=\frac{\begin{vmatrix} C_{r+1}^{2} & C_{r+1}^{3} & C_{r+1}^{4} & \cdots & C_{r+1}^{j-1} & C_{r+1}^{j} & C_{r+1}^{j+1} \\ C_{r}^{1} & C_{r}^{2} & C_{r}^{3} & \cdots & C_{r}^{j-2} & C_{r}^{j-1} & C_{r}^{j} \\ 0 & C_{r-1}^{1} & C_{r-1}^{2} & \cdots & C_{r-1}^{j-3} & C_{r-1}^{j-2} & C_{r-1}^{j-1} \\ 0 & 0 & C_{r-2}^{1} & \cdots & C_{r-2}^{j-4} & C_{r-2}^{j-3} & C_{r-2}^{j-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{r-j+2}^{1} & C_{r-j+2}^{2} \end{vmatrix}}{C_{r+1}^{1}\cdot C_{r}^{1}\cdot C_{r-1}^{1}\cdots C_{r-j+2}^{1}\cdot C_{r-j+1}^{1}}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=0}^{j-2}(r-i)\begin{vmatrix} C_{2}^{0} & C_{3}^{0} & C_{4}^{0} & \cdots & C_{j-1}^{0} & C_{j}^{0} & C_{j+1}^{0} \\ C_{2}^{1} & C_{3}^{1} & C_{4}^{1} & \cdots & C_{j-1}^{1} & C_{j}^{1} & C_{j+1}^{1} \\ 0 & C_{3}^{2} & C_{4}^{2} & \cdots & C_{j-1}^{2} & C_{j}^{2} & C_{j+1}^{2} \\ 0 & 0 & C_{4}^{3} & \cdots & C_{j-1}^{3} & C_{j}^{3} & C_{j+1}^{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{j}^{j-1} & C_{j+1}^{j-1} \end{vmatrix}}{(j+1)!\,j!}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=0}^{j-2}(r-i)D_j}{(j+1)!\cdot j!}\quad (j\geqslant 2)$$

$\because\quad A_0=\dfrac{1}{r+1},\qquad A_1=\dfrac{1}{2}$

$$A_j=\frac{\prod\limits_{i=0}^{j-2}(r-i)D_j}{(j+1)!\,j!}\quad (j=2,\ 3,\cdots,\ r)$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k^r=\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\frac{1}{2}n^r+\sum_{j=2}^{r}\left[\frac{\prod\limits_{i=0}^{j-2}(r-i)Dj}{(j+1)!\,j!}n^{r-(j-1)}\right]$$

其中$D_j$的值与$r$、$n$的取值无关，而是独立存在的，即不论$r$和$n$为何自然数值时，总有

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1;\qquad D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 6\end{vmatrix}=0;$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 6 & 10\\ 0 & 0 & 4 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 10\end{vmatrix}=-4.$$

同样，有

$$D_5=0;\qquad D_6=120;\qquad D_7=0;$$

$$D_8=-\frac{3}{10}\cdot 8!;\qquad D_9=0;\qquad D_{10}=\frac{5}{6}\cdot 10!;$$

$$D_{11}=0;\qquad D_{12}=-\frac{691}{7\cdot 6\cdot 5}\cdot 12!;\qquad D_{13}=0;$$

$$D_{14}=\frac{15}{2}\cdot 14!;\qquad D_{15}=0;\qquad D_{16}=-\frac{3617}{6\cdot 5}\cdot 16!;$$

$$D_{17}=0;\qquad D_{18}=\frac{43867}{7\cdot 6}\cdot 18!;\qquad D_{19}=0;$$

$$D_{20}=-\frac{7\cdot 174611}{11\cdot 10}\cdot 20!;\qquad D_{21}=0;\qquad D_{22}=\frac{854513}{6}\cdot 22!;$$

$D_{23}=0;$ ……………

把$D_j$的值代入公式可得$r$是某定值时的公式。

例 1 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4=?$

解：把$r=4$，$D_2=1$，$D_3=0$，$D_4=-4$代入公式中整理得