普通本科考研适用——考点·题型·精解

刘秀君 主编

考研高等数学选讲

清华大学出版社

刘秀君 主编

考研高等数学选讲

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书参照教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》、《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》及近十年以来的考研数学试题编写而成. 本书内容按专题分为 11 章，包括极限的概念和求法，导数与微分的概念和求法，积分的概念和求法，微积分的应用，对分段函数的讨论，利用对称性简化计算，关于不等式、等式及恒等式的证明方法，关于函数方程的有关问题，无穷级数，与中值有关的问题，综合题. 在每一章中又分为知识要点、方法综述、典型例题 3 个部分.

本书选择的知识点较为全面，内容丰富、新颖，解题方法简洁、典型，例题的难度适当，可供讲授“高等数学”课程的教师参考，也可以供教师开设选修课使用.建议学时为 30 学时.

图书在版编目(CIP)数据

考研高等数学选讲/刘秀君主编. --北京：清华大学出版社，2013

ISBN 978-7-302-34583-1

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①高等数学–研究生–入学考试–自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 283760 号

责任编辑：陈　明　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
　　社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市李旗庄少明印装厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　张**：8.5　　**字　数**：146 千字
版　　次：2013 年 12 月第 1 版　　**印　次**：2013 年 12 月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：16.00 元

产品编号：056684-01

前　　言

随着我国各行各业对人才需求的不断提高，大学生对考研的热情也不断增长，仅以河北科技大学为例，每年报考研究生的学生达到了 80%以上. 数学是大部分专业的必考课程，从大一开始，就受到广大师生的高度重视.

按照河北科技大学的本科教学计划，高等数学仅为 168 学时，线性代数仅为 32 学时，概率论与数理统计仅为 48 学时. 在这些学时内，完成教学基本要求已是非常紧张，对于考研的要求基本上无暇顾及. 因此，在进入考研数学复习阶段时，大部分的学生会感到困难较大. 为了给学生搭建一个较好的过渡平台，我们为大二的学生开设了考研高等数学选讲（30 学时），为大三的学生开设了考研线性代数选讲（30 学时）和考研概率统计选讲（30 学时），形成了一个考研数学选修课系列. 自这三门选修课开设以来，选课的学生超过了全校学生的一半以上，为提高学生的考研率起到了积极的作用.

本书参照教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》、《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》及近十年以来的考研数学试题编写而成. 针对考研试题中涉及的一些有关高等数学的知识点，在高等数学课程教学基本要求的基础上作了适当扩展，按专题分为 11 章，在每章中又分为知识要点、方法综述和典型例题三个部分.

在知识要点部分，对考研大纲的有关内容作了提纲挈领的总结，指出了前后知识点之间的联系，有助于开阔学生的思路，提高综合应用知识的能力，以达到融会贯通的目的.

在方法综述部分，对有关数学方法作了较为全面的讲解，使学生从整体上掌握相关的解法.

在典型例题部分，精选了近年来的部分考研真题，按照题型进行了分类，对各类题型的解法作了系统的总结，使学生能够很快找到解题思路.

本书选择扩展的知识点针对性强，例题的难度适当，适合本科和专科理工类大学生在学习高等数学课程时同步使用，可供讲授高等数学课程的教师参考，特别适合教师开设选修课使用.

本书由河北科技大学数学系组织编写，刘秀君教授担任主编，索秀云教授和郭彦平教授审阅了全书. 在编写的过程中，得到了数学系同事们的支持与帮助，在此一并致谢. 由于编者水平所限，书中难免不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 10 月

目　录

第 1 章　极限的概念和求法

1.1　知识要点

极限是微积分的理论基础，研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限，如连续、导数、积分和级数等. 反过来，也可以利用连续、导数、积分和级数等概念求极限. 要重点掌握极限的各种求法，应特别注意各种极限求法所需要的条件，如利用两个重要极限、导数的定义和定积分的定义求极限时，必须将所求极限化为相应的标准形式；利用等价代换求极限时，一般要做整体代换；利用洛必达法则求极限时，要注意验证条件，等等. 另外还要注意，在求极限时，应随时化简，避免极限形式的复杂化.

1.2　方法综述

1.2.1　极限存在的两个准则

准则Ⅰ(单调有界准则)　若数列 $\{x_n\}$ 单调、有界，则 $\{x_n\}$ 必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

准则Ⅱ(夹逼准则)

(1) 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n\ (n \geqslant N)$；② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

(2) 若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足：① $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)\ \ (x \in \mathring{U}(x_0))$；② $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

1.2.2　两个重要极限及其推广

(1) 两个重要极限　① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$；② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

(2) 两个重要极限的推广　① $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$；② $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \mathrm{e}$.

1.2.3　极限存在与左、右极限的关系

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 的充要条件是 } \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

注　分段函数在分段点处的极限存在与否，必须用左、右极限讨论.

1.2.4 求积、商的极限时等价无穷小代换定理

设当 $x\to\square$时，$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，$\beta(x)\sim\beta'(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$存在，则

$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)\delta(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{\alpha'(x)\gamma(x)}{\beta'(x)\delta(x)}.$$

注 使用等价无穷小代换时，可以在整个式子的积、商运算中进行等价无穷小因子的代换，其他运算一般情况下不能使用.

1.2.5 洛必达法则

若 (1) $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$ (或∞)，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=0$ (或∞)；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内（或当 $|x|>X$ 时）可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或$\infty$），

则
$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.2.6 利用定积分定义求极限

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right),\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left[a+\frac{(b-a)i}{n}\right].$$

1.2.7 求极限时常用的泰勒公式（皮亚诺型余项）

(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$；

(2) $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$；

(3) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$；

(4) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$；

(5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$；

(6) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+o(x^n)$.

1.3　典型例题

题型 1　利用有理运算求极限

例 1　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^4(x-1)^6-5x(x^8+x)}{(x+2)^{10}}$.

解　$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^4(x-1)^6-5x(x^8+x)}{(x+2)^{10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^6-\dfrac{5}{x}\left(1+\dfrac{1}{x^7}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{10}}=16.$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$.

解　$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}=\frac{-2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

例 3　求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\sqrt{4n^2+1}\pi$.

解　因为 $\sin\sqrt{4n^2+1}\pi=\sin\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)\pi=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\sqrt{4n^2+1}\pi=\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=\frac{\pi}{4}.$$

题型 2　利用两个重要极限求极限

例 4　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\left[\ln(1+x)-x\right]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{\pi}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\left[1+\left(\cos\sqrt{x}-1\right)\right]^{\frac{\pi}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0+0}\left[1+\left(\cos\sqrt{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\left(\cos\sqrt{x}-1\right)\pi}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

题型 3 利用等价代换求极限

常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1,$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad a^x-1\sim x\ln a.$$

注 等价无穷小代换一般用在乘、除运算关系中，而在加、减关系中要慎用.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\arctan 5x}{\ln(1+2x)\cdot\arcsin x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$, $\arctan 5x\sim 5x$, $\ln\left(1+2x\right)\sim 2x$, $\arcsin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\arctan 5x}{\ln(1+2x)\cdot\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 5x}{2x\cdot x}=\frac{15}{2}.$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right)\sin x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+x^3}-1\sim\dfrac{1}{3}x^3$, $\sin x\sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{(4/3)x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 2x}{(4/3)x^3}=\frac{3}{2}.$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)(a>0)$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$a^x-1\sim x\ln a$，所以

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2a^{\frac{1}{x+1}}\left(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left[a^{\frac{1}{x(x+1)}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\ln a}{x(x+1)}=\ln a.$$

注　本题也可以利用拉格朗日中值定理求解.

例 9　设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+f(x)\cdot\sin 5x\right]}{2^x-1}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+f(x)\cdot\sin 5x\right]}{2^x-1}=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}(2^x-1)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[1+f(x)\cdot\sin 5x\right]=0,$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot\sin 5x=0$，因此当 $x\to 0$ 时，

$$\ln\left[1+f(x)\cdot\sin 5x\right]\sim f(x)\cdot\sin 5x,\quad 2^x-1\sim x\ln 2,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot\sin 5x}{x\ln 2}=1,\quad 5\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln 2}=1,\quad \lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\ln 2}{5}.$$

题型 4　利用导数的定义求极限

例 10　设 $f'(x_0)$ 存在，a,b 为非零实数，求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\cdot\Delta x)-f(x_0-b\cdot\Delta x)}{\Delta x}.$$

解　由导数的定义得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+a\cdot\Delta x)-f(x_0-b\cdot\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}a\cdot\frac{f(x_0+a\cdot\Delta x)-f(x_0)}{a\cdot\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-b\cdot\Delta x)-f(x_0)}{-b\cdot\Delta x}(-b)$$

$$=af'(x_0)+bf'(x_0)=(a+b)f'(x_0).$$

题型 5 利用洛必达法则求极限

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 12 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解法一 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\arcsin x-x}{x}\right)}{(1/2)x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{(1/2)x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1/\sqrt{1-x^2}-1}{(3/2)x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1/2)x^2}{x^2}=\frac{1}{3},$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\arcsin x/x)}{1-\cos x}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

解法二 因为
$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\left(1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{(1/2)x^3}=\frac{1}{3},$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

注 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$, 则
$$\lim_{x\to 0}[f(x)+1]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}g(x)\ln[f(x)+1]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}g(x)f(x)}.$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\ (a\neq k\pi)$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)\cdot\dfrac{1}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{\sin a}\cdot\dfrac{1}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}=\cot a,$$

所以
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\mathrm{e}^{\cot a}.$$

例 14　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$，为了求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$，考虑极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}.$$

例 15　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]$.

解　令 $\frac{1}{x}=t$，则当 $x\to+\infty$ 时，$t\to 0+0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{(1+1/x)^x}-\frac{x}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]}{\mathrm{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}=\frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to 0+0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}$$

$$=\frac{-1}{\mathrm{e}^2}\lim_{t\to 0+0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}}-\mathrm{e}}{t}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}}-1}{t}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim_{t\to 0+0}\frac{\frac{-t}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

注　当 $t\to 0+0$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}}-1\sim\frac{\ln(1+t)-t}{t}$.

题型 6　利用极限存在的准则求极限

例 16　设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定等于零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

解　令 $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{x^2}, g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}, f(x)=1$. 显然 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$，故(A)和(C)不正确.

若令 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x^2}, f(x)=x, g(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$, 那么 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$（不存在），从而(B)不正确，故选(D)正确.

例 17　设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散

(B) 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

(D) 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

解　用排除法.

若取 $x_n=n, y_n=\dfrac{1}{n^2}$，则(A)不正确.

若取 $x_n=\begin{cases} n, n\text{为偶数}, \\ 0, n\text{为奇数}, \end{cases} y_n=\begin{cases} n, n\text{为奇数}, \\ 0, n\text{为偶数}, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$ 且 $\{x_n\}$ 无界，但 $\{y_n\}$ 也无界，于是(B)不正确.

若取 $x_n=\dfrac{1}{n^2}, y_n=n$，显然(C)不正确，故应选(D).

例 18　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是 (　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

解　由于 $f(x)$ 单调有界，所以当 $\{x_n\}$ 单调时，数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界，从而 $\{f(x_n)\}$ 收敛，故选(B)正确.

例 19　设 $a>b>c>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=$______.

解　应填 a.

由 $a^n\leqslant a^n+b^n+c^n\leqslant 3a^n$ 得 $a\leqslant(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 3^{\frac{1}{n}}a$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}a=a$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=a$.

例 20　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　由于 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 21　设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_1)}\ (n=1,2,3,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

证明　$0<x_1<3, 0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x_1}\right)^2+\left(\sqrt{3-x_1}\right)^2\right]=\dfrac{3}{2}$,

假设 $0<x_n<\dfrac{3}{2}$, 则

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x_n}\right)^2+\left(\sqrt{3-x_n}\right)^2\right]=\frac{3}{2},$$

即 $\{x_n\}$ 有上界. 而

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{x_n(3-x_n)-x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增，从而数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

在等式 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_1)}$ 两端取极限得　$a=\sqrt{a(3-a)}$，解得 $a=\dfrac{3}{2}$ 或 $a=0$ (舍去)，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

题型 7　利用定积分的定义求极限

例 22　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.