

普通本科考研适用——考点·题型·精解



刘秀君 主编

考研高等数学选讲

清华大学出版社

刘秀君 主编

考研高等数学选讲

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书参照教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》、《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》及近十年以来的考研数学试题编写而成. 本书内容按专题分为 11 章, 包括极限的概念和求法, 导数与微分的概念和求法, 积分的概念和求法, 微积分的应用, 对分段函数的讨论, 利用对称性简化计算, 关于不等式、等式及恒等式的证明方法, 关于函数方程的有关问题, 无穷级数, 与中值有关的问题, 综合题. 在每一章中又分为知识要点、方法综述、典型例题 3 个部分.

本书选择的知识点较为全面, 内容丰富、新颖, 解题方法简洁、典型, 例题的难度适当, 可供讲授“高等数学”课程的教师参考, 也可以供教师开设选修课使用. 建议学时为 30 学时.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

考研高等数学选讲/刘秀君主编. --北京: 清华大学出版社, 2013

ISBN 978-7-302-34583-1

I. ①考… II. ①刘… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 283760 号

责任编辑: 陈 明 赵从棉

封面设计: 傅瑞学

责任校对: 王淑云

责任印制: 宋 林

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 三河市李旗庄少明印装厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 170mm×230mm 印 张: 8.5 字 数: 146 千字

版 次: 2013 年 12 月第 1 版 印 次: 2013 年 12 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 16.00 元

产品编号: 056684-01

前 言

随着我国各行各业对人才需求的不断提高,大学生对考研的热情也不断增长,仅以河北科技大学为例,每年报考研究生的学生达到了80%以上.数学是大部分专业的必考课程,从大一开始,就受到广大师生的高度重视.

按照河北科技大学的本科教学计划,高等数学仅为168学时,线性代数仅为32学时,概率论与数理统计仅为48学时.在这些学时内,完成教学基本要求已是非常紧张,对于考研的要求基本上无暇顾及.因此,在进入考研数学复习阶段时,大部分的学生会感到困难较大.为了给学生搭建一个较好的过渡平台,我们为大二的学生开设了考研高等数学选讲(30学时),为大三的学生开设了考研线性代数选讲(30学时)和考研概率统计选讲(30学时),形成了一个考研数学选修课系列.自这三门选修课开设以来,选课的学生超过了全校学生的一半以上,为提高学生的考研率起到了积极的作用.

本书参照教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》、《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》及近十年以来的考研数学试题编写而成.针对考研试题中涉及的一些有关高等数学的知识点,在高等数学课程教学基本要求的基础上作了适当扩展,按专题分为11章,在每章中又分为知识要点、方法综述和典型例题三个部分.

在知识要点部分,对考研大纲的有关内容作了提纲挈领的总结,指出了前后知识点之间的联系,有助于开阔学生的思路,提高综合应用知识的能力,以达到融会贯通的目的.

在方法综述部分,对有关数学方法作了较为全面的讲解,使学生从整体上掌握相关的解法.

在典型例题部分,精选了近年来的部分考研真题,按照题型进行了分类,对各类题型的解法作了系统的总结,使学生能够很快找到解题思路.

本书选择扩展的知识点针对性强,例题的难度适当,适合本科和专科理工类大学生在学习高等数学课程时同步使用,可供讲授高等数学课程的教师参考,特别适合教师开设选修课使用.

本书由河北科技大学数学系组织编写,刘秀君教授担任主编,索秀云教授和郭彦平教授审阅了全书.在编写的过程中,得到了数学系同事们的支持与帮助,在此一并致谢.由于编者水平所限,书中难免不当之处,敬请读者批评指正.

编 者

2013年10月

目 录

第 1 章 极限的概念和求法	1
1.1 知识要点	1
1.2 方法综述	1
1.3 典型例题	3
题型 1 利用有理运算求极限	3
题型 2 利用两个重要极限求极限	3
题型 3 利用等价代换求极限	4
题型 4 利用导数的定义求极限	5
题型 5 利用洛必达法则求极限	6
题型 6 利用极限存在的准则求极限	8
题型 7 利用定积分的定义求极限	9
题型 8 利用泰勒公式求极限	11
题型 9 利用级数求极限	11
第 2 章 导数与微分的概念和求法	13
2.1 知识要点	13
2.2 方法综述	13
2.3 典型例题	15
题型 1 关于函数可导性的讨论	15
题型 2 利用定义和性质求函数的导数和微分	16
题型 3 复合函数的导数	18
题型 4 变限积分函数的求导法	18
题型 5 隐函数的导数	19
题型 6 由参数方程所确定函数的导数	21
题型 7 对数求导法	22
第 3 章 积分的概念和求法	23
3.1 知识要点	23
3.2 方法综述	23
3.3 典型例题	26

题型 1 不定积分的求法	26
题型 2 定积分的求法	29
题型 3 二重积分的求法	33
题型 4 三重积分的求法	35
题型 5 对弧长的曲线积分	36
题型 6 对坐标的曲线积分	36
题型 7 对面积的曲面积分	38
题型 8 对坐标的曲面积分	38
第 4 章 微积分的应用	40
4.1 知识要点	40
4.2 方法综述	40
4.3 典型例题	42
题型 1 求曲线的切线和法平面	42
题型 2 求曲面的切平面与法线	43
题型 3 求函数的极值与最值	44
题型 4 讨论函数的单调性与极值, 凹凸性与拐点, 求曲线的渐近线	46
题型 5 求平面图形的面积与曲线的弧长, 旋转体的侧面积与空间立体的体积	48
题型 6 求变力作的功、水压力及引力	49
题型 7 求物体的质心、转动惯量	51
第 5 章 对分段函数的讨论	53
5.1 知识要点	53
5.2 方法综述	53
5.3 典型例题	53
题型 1 分段函数的极限	53
题型 2 分段函数的连续性	54
题型 3 分段函数的导数	55
题型 4 分段函数的极值与最值	57
题型 5 分段函数的积分	58
第 6 章 利用对称性简化计算	60
6.1 知识要点	60

6.2 方法综述	60
6.3 典型例题	62
题型 1 利用对称性计算偏导数	62
题型 2 利用对称性求函数的极值	63
题型 3 利用对称性讨论方程根的个数	65
题型 4 利用对称性计算定积分	65
题型 5 利用对称性计算重积分	65
题型 6 利用对称性计算曲线积分	66
题型 7 利用对称性计算曲面积分	67
 第 7 章 关于不等式、等式及恒等式的证明方法	68
7.1 知识要点	68
7.2 方法综述	68
7.3 典型例题	69
题型 1 利用单调性证明不等式	69
题型 2 利用凹凸性证明不等式	71
题型 3 利用极值与最值证明不等式	72
题型 4 利用微分中值定理证明不等式	73
题型 5 利用积分中值定理证明积分不等式	75
题型 6 利用介值定理证明等式	77
题型 7 利用微分中值定理证明等式	78
题型 8 利用积分中值定理证明等式	81
题型 9 利用拉格朗日中值定理的推论证明恒等式	81
 第 8 章 关于函数方程的有关问题	84
8.1 知识要点	84
8.2 方法综述	84
8.3 典型例题	84
题型 1 方程根的存在性证明	84
题型 2 方程根的个数问题	85
题型 3 与极限有关的函数方程	89
题型 4 解微分方程	90
题型 5 解积分方程	90

第 9 章 无穷级数	92
9.1 知识要点	92
9.2 方法综述	92
9.3 典型例题	93
题型 1 常数项级数及其收敛性的概念和性质	93
题型 2 正项级数收敛性的判定	95
题型 3 任意项级数收敛性的判定	96
题型 4 幂级数收敛域的求法	99
题型 5 求幂级数的和函数及数项级数的和	101
题型 6 将函数展为幂级数	103
题型 7 将函数展为傅里叶级数	104
第 10 章 与中值有关的问题	106
10.1 知识要点	106
10.2 方法综述	106
10.3 典型例题	106
题型 1 利用连续函数的介值定理证明中值等式	106
题型 2 利用微分中值定理证明中值等式	108
题型 3 利用单调性证明中值等式 (根的存在唯一性)	110
题型 4 利用积分中值定理证明中值等式	110
题型 5 利用微分中值定理证明中值不等式	110
题型 6 利用微分中值定理和积分中值定理求极限	111
第 11 章 综合题	112
11.1 知识要点	112
11.2 典型例题	112
参考文献	126

第1章 极限的概念和求法

1.1 知识要点

极限是微积分的理论基础,研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限,如连续、导数、积分和级数等.反过来,也可以利用连续、导数、积分和级数等概念求极限.要重点掌握极限的各种求法,应特别注意各种极限求法所需要的条件,如利用两个重要极限、导数的定义和定积分的定义求极限时,必须将所求极限化为相应的标准形式;利用等价代换求极限时,一般要做整体代换;利用洛必达法则求极限时,要注意验证条件,等等.另外还要注意,在求极限时,应随时化简,避免极限形式的复杂化.

1.2 方法综述

1.2.1 极限存在的两个准则

准则 I (单调有界准则) 若数列 $\{x_n\}$ 单调、有界, 则 $\{x_n\}$ 必有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

准则 II (夹逼准则)

(1) 若数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足: ① $y_n \leq x_n \leq z_n$ ($n \geq N$); ② $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

(2) 若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足: ① $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ($x \in \dot{U}(x_0)$); ② $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

1.2.2 两个重要极限及其推广

(1) 两个重要极限 ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; ② $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

(2) 两个重要极限的推广 ① $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$; ② $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = e$.

1.2.3 极限存在与左、右极限的关系

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

注 分段函数在分段点处的极限存在与否, 必须用左、右极限讨论.

1.2.4 求积、商的极限时等价无穷小代换定理

设当 $x \rightarrow \square$ 时, $\alpha(x) \sim \alpha'(x)$, $\beta(x) \sim \beta'(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)\delta(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha'(x)\gamma(x)}{\beta'(x)\delta(x)}.$$

注 使用等价无穷小代换时, 可以在整个式子的积、商运算中进行等价无穷小因子的代换, 其他运算一般情况下不能使用.

1.2.5 洛必达法则

若 (1) $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$ (或 ∞), $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0$ (或 ∞);

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内 (或当 $|x| > X$ 时) 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或 ∞),

则

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.2.6 利用定积分定义求极限

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right), \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left[a + \frac{(b-a)i}{n}\right].$$

1.2.7 求极限时常用的泰勒公式 (皮亚诺余项)

$$(1) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n);$$

$$(2) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$(3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1});$$

$$(4) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$(5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(6) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + o(x^n).$$

1.3 典型例题

题型1 利用有理运算求极限

例1 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^4(x-1)^6 - 5x(x^8+x)}{(x+2)^{10}}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^4(x-1)^6 - 5x(x^8+x)}{(x+2)^{10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^4 \left(1-\frac{1}{x}\right)^6 - \frac{5}{x} \left(1+\frac{1}{x^7}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}} = 16.$$

例2 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right) \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \sqrt{4n^2+1} \pi$.

解 因为 $\sin \sqrt{4n^2+1} \pi = \sin (\sqrt{4n^2+1} - 2n) \pi = \sin \frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1} + 2n}$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \sqrt{4n^2+1} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1} + 2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{\sqrt{4n^2+1} + 2n} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

题型2 利用两个重要极限求极限

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x [\ln(1+x) - x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0+0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left[1 + (\cos \sqrt{x} - 1) \right]^{\frac{\pi}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \left[1 + (\cos \sqrt{x} - 1) \right]^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{(\cos \sqrt{x} - 1)\pi}{x}} = e^{\frac{\pi}{2}}.
 \end{aligned}$$

题型 3 利用等价代换求极限

常用的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a.$$

注 等价无穷小代换一般用在乘、除运算关系中, 而在加、减关系中要慎用.

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \arctan 5x}{\ln(1+2x) \cdot \arcsin x}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x \sim 3x$, $\arctan 5x \sim 5x$, $\ln(1+2x) \sim 2x$, $\arcsin x \sim x$,

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \arctan 5x}{\ln(1+2x) \cdot \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot 5x}{2x \cdot x} = \frac{15}{2}.$$

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) \sin x}$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x^3} - 1 \sim \frac{1}{3}x^3$, $\sin x \sim x$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}-1\right) \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\frac{1}{3} x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x}{(4/3)x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 2x}{(4/3)x^3} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) (a > 0)$.

解 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $a^x - 1 \sim x \ln a$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 a^{\frac{1}{x+1}} \left(a^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[a^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \ln a}{x(x+1)} = \ln a. \end{aligned}$$

注 本题也可以利用拉格朗日中值定理求解.

例 9 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+f(x) \cdot \sin 5x]}{2^x - 1} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+f(x) \cdot \sin 5x]}{2^x - 1} = 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln[1+f(x) \cdot \sin 5x] = 0,$$

于是 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot \sin 5x = 0$, 因此当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\ln[1+f(x) \cdot \sin 5x] \sim f(x) \cdot \sin 5x, \quad 2^x - 1 \sim x \ln 2,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \sin 5x}{x \ln 2} = 1, \quad 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln 2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\ln 2}{5}.$

题型 4 利用导数的定义求极限

例 10 设 $f'(x_0)$ 存在, a, b 为非零实数, 求极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a \cdot \Delta x) - f(x_0 - b \cdot \Delta x)}{\Delta x}.$$

解 由导数的定义得

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a \cdot \Delta x) - f(x_0 - b \cdot \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \cdot \frac{f(x_0 + a \cdot \Delta x) - f(x_0)}{a \cdot \Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - b \cdot \Delta x) - f(x_0)}{-b \cdot \Delta x} (-b) \\ &= af'(x_0) + bf'(x_0) = (a+b)f'(x_0). \end{aligned}$$

题型 5 利用洛必达法则求极限

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right]$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 12 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解法一} \quad \text{由于} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)}{1-\cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right)}{(1/2)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{(1/2)x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\sqrt{1-x^2} - 1}{(3/2)x^2} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)x^2}{x^2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\arcsin x / x)}{1-\cos x}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{解法二} \quad \text{因为} \quad \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left(1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}},$$

$$\text{而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{(1/2)x^3} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

注 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + 1]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \ln [f(x) + 1]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) f(x)}.$$

例 13 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} (a \neq k\pi)$.

$$\text{解} \quad \text{由于} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right) \cdot \frac{1}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\sin a} \cdot \frac{1}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\sin a} \cdot \frac{1}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin a} = \cot a,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\cot a}.$$

例 14 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^{n^2}$, 为了求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$, 考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}.$$

例 15 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right]$.

解 令 $\frac{1}{x} = t$, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0+0$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{(1+1/x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]}{e \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} \\ &= \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} \\ &= \frac{-1}{e^2} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e}{t} = -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}} - 1}{t} = -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \\ &= -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} = -\frac{1}{e} \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{-t}{2t} = \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

注 当 $t \rightarrow 0+0$ 时, $e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t}} - 1 \sim \frac{\ln(1+t) - t}{t}$.

题型 6 利用极限存在的准则求极限

例 16 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().

(A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定等于零

(C) 一定不存在 (D) 不一定存在

解 令 $\varphi(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 1$. 显然 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, 故(A)和(C)不正确.

若令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}$, $f(x) = x$, $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$, 那么 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (不存在), 从而(B)不正确, 故选(D)正确.

例 17 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列结论正确的是 ().

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散

(B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

(D) 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

解 用排除法.

若取 $x_n = n$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, 则(A)不正确.

若取 $x_n = \begin{cases} n, n \text{ 为偶数}, \\ 0, n \text{ 为奇数}, \end{cases} y_n = \begin{cases} n, n \text{ 为奇数}, \\ 0, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 且 $\{x_n\}$ 无界, 但 $\{y_n\}$

也无界, 于是(B)不正确.

若取 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$, 显然(C)不正确, 故应选(D).

例 18 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 ().

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛 (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

解 由于 $f(x)$ 单调有界, 所以当 $\{x_n\}$ 单调时, 数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 从而 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故选(B)正确.

例 19 设 $a > b > c > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 应填 a .

由 $a^n \leq a^n + b^n + c^n \leq 3a^n$ 得 $a \leq (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}} a$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} a = a$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = a$.

例 20 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解 由于 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

例 21 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

证明 $0 < x_1 < 3, 0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2} \left[(\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{3-x_1})^2 \right] = \frac{3}{2},$

假设 $0 < x_n < \frac{3}{2}$, 则

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \leq \frac{1}{2} \left[(\sqrt{x_n})^2 + (\sqrt{3-x_n})^2 \right] = \frac{3}{2},$$

即 $\{x_n\}$ 有上界. 而

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \frac{x_n(3-x_n) - x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} = \frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)} + x_n} \geq 0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增, 从而数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

在等式 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两端取极限得 $a = \sqrt{a(3-a)}$, 解得 $a = \frac{3}{2}$ 或 $a = 0$

(舍去), 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

题型 7 利用定积分的定义求极限

例 22 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$.