

高等学校“十二五”规划教材
电子与信息工程系列

GUIDE TO LEARNING AND PROBLEM SOLVING IN SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统学习与解题指导

胡 航 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校“十二五”规划教材
电子与信息工程系列

GUIDE TO LEARNING AND PROBLEM SOLVING IN SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统学习与解题指导

胡 航 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是学习信号与系统课程的参考用书。全书共分8章:信号与系统分析的理论基础,连续时间系统的时域分析,连续时间信号与系统的频域分析,连续时间信号与系统的复频域分析,连续信号离散化及恢复,离散信号与系统的时域分析,离散信号与系统的z域分析,系统状态变量分析法。各章内容均包括概念与解题提要 and 例题分析与解答等两部分,对各例题均给出了详尽的分析与解答。

本书可供高等学校有关专业的学生和教师使用,也可作为本门课程的自学参考书。

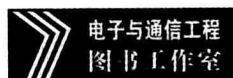
图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习与解题指导/胡航编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.9

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3944 - 3

I. ①信… II. ①胡… III. ①信号系统—高等学校—教学参考资料 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 001338 号



责任编辑 许雅莹

封面设计 刘长友

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 19 字数 462 千字

版 次 2013年9月第1版 2013年9月第1次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3944 - 3

定 价 35.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

“十二五”国家重点图书

电子与信息工程系列

编 审 委 员 会

顾 问 张乃通

主 任 顾学迈

副 主 任 张 晔

秘 书 长 赵雅琴

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 钢 邓维波 任广辉 沙学军

张钧萍 吴芝路 吴 群 谷延锋

孟维晓 赵洪林 赵雅琴 姜义成

郭 庆 宿富林 谢俊好 冀振元

序

FOREWORD

教材建设是高校教学建设和教学改革的主要内容之一。针对目前高校电子与信息工程教材存在的基础课教材偏重数学理论,而数学模型和物理模型脱节,专业课教材对最新知识增长点和研究成果跟踪较少等问题,及创新型人才的培养目标和各学科、专业课程建设的需求,哈尔滨工业大学出版社与哈尔滨工业大学电子与信息工程学院共同策划出版了电子与信息工程系列精品教材。

该系列教材是以“寓军于民,军民并举”为需求前提,以信息与通信工程学科发展为背景,以电子线路和信号处理知识为平台,以培养基础理论扎实、实践动手能力强的创新型人才为主线,将基础理论、电信技术实际发展趋势、相关科研开发的实际经验密切结合,注重理论联系实际,将学科前沿技术渗透其中,反映电子信息领域最新知识增长点和研究成果,因材施教,重点加强学生的理论基础水平及分析问题、解决问题的能力。

本系列教材具有以下特色:

(1) **强调平台化完整的知识体系。**该系列教材涵盖电子与信息工程专业理论基础课程,对现有课程及教学体系不断优化,形成以电子线路、信号处理、电波传播为平台课程,与专业应用课程的四个知识脉络有机结合,构成了一个通识教育和专业教育的完整教学课程体系。

(2) **物理模型和数学模型有机结合。**该系列教材侧重在经典理论与技术的基础上,将实际工程实践中的物理系统模型和算法理论模型紧密结合,加强物理概念和物理模型的建立、分析、应用,在此基础上总结牵引出相应的数学模型,以加强学生对算法理论的理解,提高实践应用能力。

(3) **宽口径培养需求与专业特色兼备。**结合多年来有关科研项目的科研经验及丰硕成果,以及紧缺专业教学中的丰富经验,在专业课教材编写过程中,在兼顾电子与信息工程毕业生宽口径培养需求的基础上,突出军民兼用特色,在满足一般重点院校相关专业理论技术需求的基础上,也满足军民并举特色的要求。

电子与信息工程系列教材是哈尔滨工业大学多年来从事教学科研工作的各位教授、专家集体智慧的结晶,也是他们长期教学经验、工作成果的总结与展示。同时该系列教材的出版也得到了兄弟院校的支持,提出了许多建设性的意见。

我相信:这套教材的出版,对于推动电子与信息工程领域的教学改革、提高人才培养质量必将起到重要推动作用。

哈尔滨工业大学教授 张乃通
中国工程院院士



2010年11月于哈工大

前 言

PREFACE

信号与系统是电子与信息科学的理论基础。课程涉及内容广泛,系统性与理论性强,涉及很多物理概念;用到较多的电路分析等先修课知识;应用大量数学工具,如高等数学、线性代数、复变函数等;因而课程内容与解题方法较难理解与掌握。

本书内容包括两部分:概念与解题提要,例题分析与解答。其中概念与解题提要部分,对课程重点难点,易于混淆与难以理解的概念和内容,解题中涉及的共性问题及解题技巧进行了详尽分析,以提高对本课程概念、理论、方法与应用的理解与认识水平。例题分析与解答部分力求提供分析与处理问题的方法,而不是单纯的习题解答。这部分选取有代表性、具有较强灵活性、系统性与综合性的例题,给出详尽分析与解题思路;对题中涉及的概念、原理、解题方法及解题中易出现的问题及错误,也进行了深入分析与阐述。一些题目给出了多种解答途径与处理方法。分析与解答过程中,注重课程各部分内容间的相互关联与结合,如信号分析与系统分析部分,连续部分与离散部分,时域分析与变换域分析部分。

应指出,对本课程内容的理解与习题解答的水平与能力很大程度取决于对相关数学工具的掌握与熟练程度,良好的数学能力是学好本课程的前提与基础。

作者力求将多年教学经验与体会归纳总结到本书中;并力求将从从事阵列信号处理、相控阵雷达、电子侦察与对抗、语音信号处理等领域研究中所积累与提炼的对本课程相关概念、理论、方法、应用及对学科发展水平的理解、体会与认识,也反映到本书中。

本书可作为高等学校学生和有关人员学习信号与系统课程的参考书,并可作为《信号与系统》(张晔,哈尔滨工业大学出版社,2013年)的配套参考书。

感谢张晔教授对本书编写工作的指导,张钧萍、张腊梅、陈静老师提供了帮助,研究生金玉宝、栾学鹏、张广磊完成一些辅助性工作,在此一并致谢。

由于编写时间仓促,受作者水平等多方面因素限制,书中可能存在一些问题与不足,敬请批评指正。

作 者

2013年6月

目 录

CONTENTS

第 1 章 信号与系统分析的理论基础	1
概念与解题提要	1
例题分析与解答	1
第 2 章 连续时间系统的时域分析	21
概念与解题提要	21
例题分析与解答	25
第 3 章 连续时间信号与系统的频域分析	42
概念与解题提要	42
例题分析与解答	47
第 4 章 连续时间信号与系统的复频域分析	90
概念与解题提要	90
例题分析与解答	96
第 5 章 连续信号离散化及恢复	150
概念与解题提要	150
例题分析与解答	152
第 6 章 离散信号与系统的时域分析	177
概念与解题提要	177
例题分析与解答	178
第 7 章 离散信号与系统的 z 域分析	194
概念与解题提要	194
例题分析与解答	207

第 8 章 系统状态变量分析法	248
概念与解题提要.....	248
例题分析与解答.....	251
哈尔滨工业大学硕士研究生入学考试试题	280
2010 年试题	280
2010 年试题分析	281
2011 年试题	286
2011 年试题分析	288
参考文献	291

第 1 章

信号与系统分析的理论基础

概念与解题提要

本章是本门课程的基础,包括正交函数,冲激函数取样性质,信号波形变换,系统线性、时不变及因果性的判断及卷积等内容。

卷积计算是本章难点,包括卷积积分(对于连续信号)及卷积和(对于离散信号)两种形式。卷积积分与卷积和的解析计算是连续信号积分或离散序列求和的过程,较为复杂(需要说明,无需记信号的卷积结果表达式)。计算卷积的图解法更为复杂,但其物理意义明确,易于确定卷积积分或求和的上下限及积分结果的存在时间,利于理解卷积的过程。

卷积是本门课程的核心内容,占有最重要的位置。其不只是信号间的一种运算,更重要的是线性时不变系统分析的主要工具,即求解系统响应的主要形式。

在后面学习变换域分析法后,包括第 4 章的拉普拉斯变换法及第 7 章的 z 变换法,可利用拉普拉斯变换法计算卷积积分,用 z 变换方法计算卷积和,可使卷积计算过程大大简化。建议将本章中所有与卷积有关的问题用变换域方法求解,再与时域解法的结果进行比较。

例题分析与解答

1-1 绘出下列信号的波形。

1. $tu(t)$

2. $(t-1)u(t)$

3. $tu(t-1)$

4. $(t-1)u(t-1)$

5. $(2-e^{-t})u(t)$

6. $e^{-t}\cos 10\pi t[u(t-1)-u(t-2)]$

【分析与解答】

为便于分析信号波形特点,可将其分解为两个分量的乘积:第 1 个分量为时间 t 的函数,决定了信号幅度随时间变化的规律;第 2 个分量为阶跃信号项,决定信号存在时间范围。因而可将这两个分量的波形分别画出,再相乘。

1. $tu(t)$

信号第 1 个分量为 t ,其幅度随时间线性变化,波形为通过原点且斜率为 1 的直线,如图 1-1.1(a);第 2 个分量为 $u(t)$,如图 1-1.1(b),其决定存在时间范围为 $t \geq 0$,因而信号波形为通过原点、斜率为 1,且位于 $t \geq 0$ 的直线,如图 1-1.1(c)。

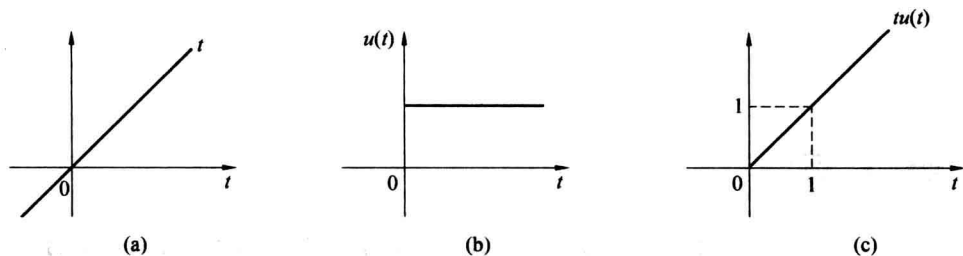


图 1-1.1

2. $(t-1)u(t)$

第 1 个分量为 $t-1$, 波形为通过原点且斜率为 1 的直线减 1, 即第 1 小题的波形沿横轴向下平移 1 个单位; 第 2 个分量表明存在时间为 $t \geq 0$, 因而信号波形如图 1-1.2(a)。

3. $tu(t-1)$

第 1 个分量, 即波形随时间变化关系与第 1 题中相同; 由第 2 个分量知存在时间为 $t \geq 1$, 因而信号波形如图 1-1.2(b)。

4. $(t-1)u(t-1)$

由表达式知, 该信号将 $tu(t)$ 表达式中所有 t 变量代换为 $t-1$, 因而波形为其延时 1 个时间单位, 如图 1-1.2(c)。需要说明, $(t-1)u(t)$ 与 $tu(t-1)$ 均不是 $tu(t)$ 延时 1 个单位的结果。

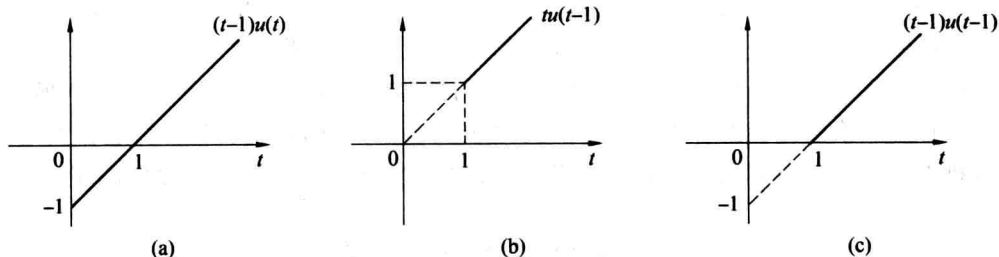


图 1-1.2

5. $(2 - e^{-t})u(t)$

为便于分析, 将信号分解, 看作两个分量 2 与 $-e^{-t}$ 的叠加。 e^{-t} 是基本的信号形式, $-e^{-t}$ 是 e^{-t} 沿横轴翻转; $2 - e^{-t}$ 是 $-e^{-t}$ 向上平移两个单位。如图 1-1.3。

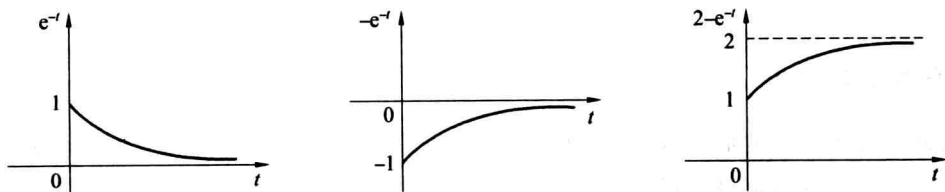


图 1-1.3

6. $e^{-t} \cos 10\pi t [u(t-1) - u(t-2)]$

信号幅度随时间变化的关系为 $e^{-t} \cos 10\pi t$, 即余弦振荡的幅度受衰减指数信号 e^{-t} 控制, 即为教材第 3 章中的调幅信号(见“3.9 已调信号的频谱”)。振荡角频率 $\omega_0 = 10\pi$, 因而



振荡周期 $T = 2\pi/10\pi = 1/5$ 。由于信号存在时间范围 $1 \leq t \leq 2$ ，因而有 5 次振荡。如图 1-1.4。图中， e^{-t} 为余弦振荡的包络(虚线)，反映信号幅度随 t 的变化趋势；实际中不存在，是人为画出。

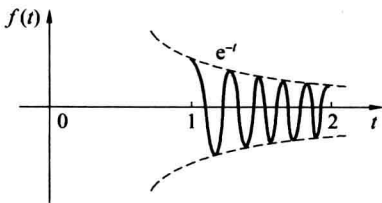


图 1-1.4

1-2 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} (3t^2 + t - 5)\delta(2t - 3)dt$ 。

【分析与解答】

根据 $\delta(t)$ 的抽样性，其与任一连续时间函数乘积的积分，等于该函数在冲激作用处的值：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (1-2.1)$$

即将冲激作用处的函数值抽取出来，故称为抽样性。需要说明，积分区间不一定在整个时间范围： $-\infty < t < \infty$ ，只要包括冲激作用时刻，该结论就成立。如

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t+2)\delta(t)dt = \int_{-3}^4 (t+2)\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} (t+2)\delta(t)dt = (t+2)|_{t=0} = 2$$

上式中，各积分的积分区间不同，但结果相同。其中， 0^- 和 0^+ 是极限的时间概念，下限 0^- 表示无限接近于 0 时刻的那个时刻，即 0 时刻之前的瞬时时刻；上限 0^+ 表示 0 时刻之后的瞬时时刻(0^- 与 0^+ 的概念在后面学习系统分析及响应求解时经常用到)。

本题中，冲激作用时刻为 $t = 3/2$ ，但如下计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} (3t^2 + t - 5)\delta(2t - 3)dt = (3t^2 + t - 5)|_{t=3/2} = \frac{13}{4}$$

是不正确的。此时不能直接应用 $\delta(t)$ 的抽样性质式(1-2.1)；因为 $\delta(2t - 3)$ 不是 $\delta(t - t_0)$ 形式，其时间变量相对于 t 已进行变量代换，即已压缩 2 倍。

解法一 应用 $\delta(t)$ 的时间尺度变换特性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

其物理意义： $\delta(t)$ 时间压缩($a > 1$)即冲激强度减小，时间压缩几倍即冲激强度减小几倍；反之，时间展宽($a < 1$)几倍，则冲激强度增大几倍。原因：根据 $\delta(t)$ 的定义，其冲激强度不是冲激作用处的信号值，而是 $\delta(t)$ 与时间轴包围的面积。 $a > 1$ 时， $\delta(t)$ 波形压缩，与时间轴包围的面积减小，因而冲激强度减小； $a < 1$ 时， $\delta(t)$ 波形展宽，与时间轴包围的面积增大，因而冲激强度增大。由此得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (3t^2 + t - 5)\delta(2t - 3)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} (3t^2 + t - 5) \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta(2t - 3)dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3t^2 + t - 5) \Big|_{t=3/2} = \frac{13}{8} \end{aligned}$$



解法二 直接对原式中的 t 变量代换:

令 $2t - 3 = t'$, 则 $t = \frac{t' + 3}{2}$ 。因此有

$$\int_{-\infty}^{\infty} (3t^2 + t - 5)\delta(2t - 3)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[3 \left(\frac{t' + 3}{2} \right)^2 + \frac{t' + 3}{2} - 5 \right] \delta(t') \cdot \frac{1}{2} dt' =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t')^2 + 8t' + 13}{4} \delta(t') dt' = \frac{1}{8} [(t')^2 + 8t' + 13] \Big|_{t'=0} = \frac{13}{8}$$

结果与解法一相同。

1-3 $f(t)$ 波形如图 1-3.1, 试画出 $-f(2t-3)$ 的波形。

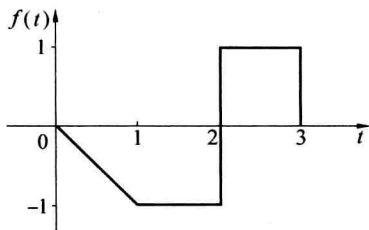


图 1-3.1

【分析与解答】

由表达式知, $-f(2t-3)$ 由 $f(t)$ 压缩、延时及沿横轴翻转等 3 种波形变换后得到。

为得到 $-f(2t-3)$, 可采用不同变换次序, 如

$$f(t) \rightarrow f(t-3) \rightarrow f(2t-3) \rightarrow -f(2t-3)$$

变换次序为: $f(t)$ 延时 3 个单位, 再压缩 2 倍, 最后沿横轴翻转, 如图 1-3.2。

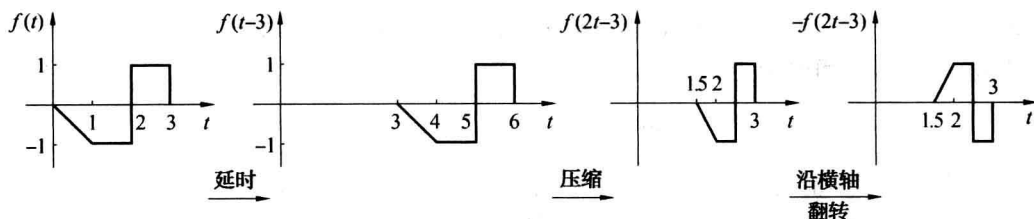


图 1-3.2

需要说明, 波形压缩或平移, 对应于信号表达式的变化只对 t 而言, 如 $f(t-3)$ 波形压缩 2 倍是 $f(2t-3)$, 而不是 $f(2t-6)$ 。

或应用另一种次序

$$f(t) \rightarrow f(2t) \rightarrow f(2t-3) \rightarrow -f(2t-3)$$

$f(t)$ 波形压缩 2 倍, 再延时 $3/2$ 个时间单位, 最后沿横轴翻转, 如图 1-3.3。这里, $f(2t-3)$ 是 $f(2t)$ 延时 $3/2$ 个单位得到, 而不是 3 个单位, 即 $f(2t-3) = f(2(t-3/2))$ 。

可见不同变换次序得到的结果相同。

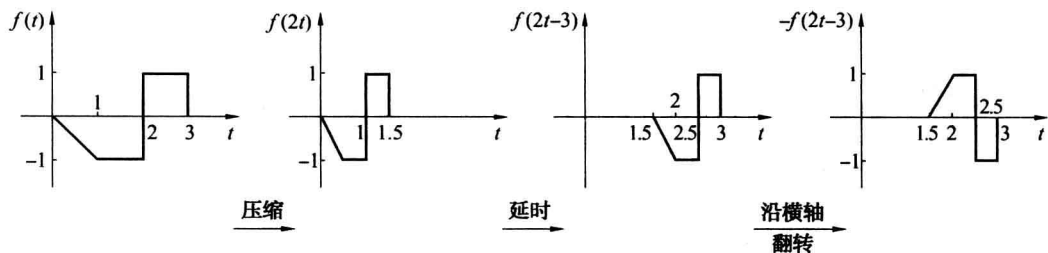


图 1-3.3

1-4 已知 $f(t)$ 波形如图 1-4.1, 试画出下列信号的波形。

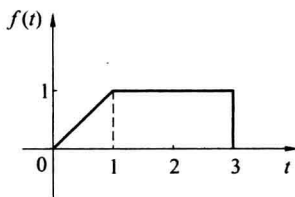


图 1-4.1

1. $f\left(\frac{t}{3}\right)u(3-t)$ 2. $\frac{df(t)}{dt}$ 3. $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$

【分析与解答】

1. 信号幅度随时间的关系为 $f(t)$ 展宽 3 倍, 存在时间为 $t \leq 3$, 因而波形为 $f(t)$ 展宽 3 倍且位于 $t \leq 3$ 的部分。如图 1-4.2。

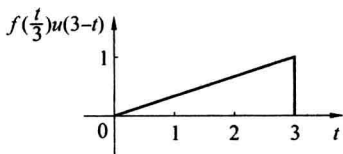


图 1-4.2

2. 根据 $f(t)$ 波形可大致判断 $\frac{df(t)}{dt}$ 波形的特点:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 1 \text{ 时, } f(t) \text{ 为 } t \text{ 的线性函数, } \frac{df(t)}{dt} = 1; \\ 1 \leq t \leq 3 \text{ 时, } f(t) \text{ 为常数, } \frac{df(t)}{dt} = 0; \\ t < 0 \text{ 及 } t > 3 \text{ 时, } f(t) \text{ 为 } 0, \frac{df(t)}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

由 $f(t)$ 波形, $t=3$ 时信号幅度不连续, 在瞬时时刻由 1 跳变到 0, 因而其微分为 $-1/0 \rightarrow -\infty$, 所以 $\frac{df(t)}{dt}$ 的幅度为负的冲激信号。即信号波形不连续时, 其微分中包含冲激函数。

为准确画出 $\frac{df(t)}{dt}$ 波形首先应写出其表达式, 由波形得



$$f(t) = t[u(t) - u(t-1)] + [u(t-1) - u(t-3)]$$

则

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= [u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)] + [\delta(t-1) - \delta(t-3)] = \\ & [u(t) - u(t-1)] + (t|_{t=0}) \cdot \delta(t) - (t|_{t=1}) \cdot \delta(t-1) + \\ & [\delta(t-1) - \delta(t-3)] = \\ & [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-3) \end{aligned}$$

为矩形脉冲及位于 $t=3$ 的负的冲激信号,与前面分析结果一致。

上式用到 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$,即任意信号与冲激信号相乘仍为冲激信号,而冲激强度变为该信号在冲激作用处的值。该性质源于冲激信号特殊的波形特点:信号只在冲激作用处存在,其他时间均为 0。

波形如图 1-4.3。

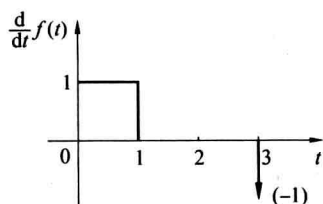


图 1-4.3

3. 信号积分求解过程较复杂,为便于求解,将 $f(t)$ 表示为分段函数

$$f(t) = tu(t) + (1-t)u(t-1) - u(t-3)$$

则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [\tau u(\tau) + (1-\tau)u(\tau-1) - u(\tau-3)] d\tau$$

以第 1 项积分为例:被积函数 $\tau u(\tau)$ 在 $\tau \geq 0$ 时存在,积分下限应为 0;积分结果在被积函数存在之后产生,其存在时间应用 $u(t)$ 表示。因而

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &= \left(\int_0^t \tau d\tau \right) u(t) + \left(\int_1^t (1-\tau) d\tau \right) u(t-1) - \left(\int_3^t d\tau \right) u(t-3) = \\ & \left(\frac{\tau^2}{2} \Big|_0^t \right) u(t) + \left[\left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Big|_1^t \right] u(t-1) - \left(\tau \Big|_3^t \right) u(t-3) = \\ & \frac{t^2}{2} u(t) + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \right) u(t-1) - (t-3) u(t-3) \end{aligned}$$

其为存在于不同时间内的信号叠加,难以确定波形特点,为此写为分段函数

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \leq t \leq 1) \\ \frac{t^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \right) = t - \frac{1}{2} & (1 \leq t \leq 3) \\ \frac{t^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{1}{2} \right) - (t-3) = \frac{5}{2} & (t \geq 3) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

由分段函数表达式画出波形,如图 1-4.4。

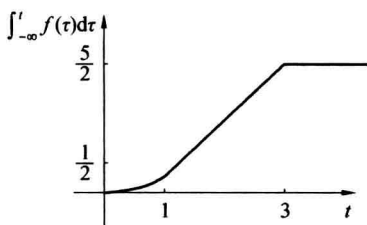


图 1-4.4

1-5 判断序列 $x(n)$ 的周期性,并确定其周期。

$$1. x(n) = A \cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right) \quad 2. x(n) = e^{j\left(\frac{n}{8} - \pi\right)}$$

【分析与解答】

连续正弦或余弦信号 $\sin \omega_0 t$ 或 $\cos \omega_0 t$ 为周期信号,且周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$;离散正弦或余弦序列 $\sin \omega_0 n$ 或 $\cos \omega_0 n$ 不一定是周期信号,周期性取决于离散角频率 ω_0 。

1. 信号 $\omega_0 = \frac{3\pi}{7}$, 初始相位 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{8}$ 。

设 $x(n)$ 为周期序列,且周期为 N ,则应有整数 N 满足 $x(n) = x(n+N)$,即

$$A \cos\left(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{8}\right) = A \cos\left[\frac{3}{7}\pi(n+N) - \frac{\pi}{8}\right] \quad (1-5.1)$$

得 $\frac{3}{7}\pi N = 2k\pi, k$ 为整数。

即
$$N = \frac{14}{3}k$$

序列周期为整数,因而 k 应为 3 的倍数。 $k=3$,即 $N=14$ 为满足式(1-5.1)的最小整数,因而假设成立。 $x(n)$ 为周期序列,且周期为 14。

2. 设 $x(n)$ 为周期序列,且周期为 N ,则

$$e^{j\left(\frac{n}{8} - \pi\right)} = e^{j\left(\frac{n+N}{8} - \pi\right)} \quad (1-5.2)$$

为此,应有 $\frac{N}{8} = 2k\pi, k$ 为整数,即

$$N = 16k\pi \quad (1-5.3)$$

π 为无理数,因而无法找到整数 k ,使得能有一个整数 N 满足上式,因而 $x(n)$ 为非周期序列。或者说,只有 k 取整数 ∞ ,式(1-5.3)才成立;此时 N 也为 ∞ ,表明序列重复周期为无穷大,即为非周期序列。

1-6 试判断函数集 $\{\cos t, \cos 2t, \dots, \cos nt\}$ (n 为整数) 在下列区间内是否正交。

1. $(0, 2\pi)$ 2. $(0, \pi/2)$

【分析与解答】

函数间是否正交与所在时间区间有关,函数集的正交性以确定的时间区间为前提。

1. 令 i, j 为正整数,且 $i \neq j$,有



$$\int_0^{2\pi} \cos it \cos jt dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos (i+j)t + \cos (i-j)t] dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\sin (i+j)t}{i+j} + \frac{\sin (i-j)t}{i-j} \right] \Big|_0^{2\pi} = 0$$

且
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 it dt = \pi$$

因在 $(0, 2\pi)$ 内, 该函数集中任两个函数间均正交, 因而为正交函数集。

2. 判断正交条件时, 被积函数和原函数与第 1 题相同, 只是积分限不同。

$$\int_0^{\pi/2} \cos it \cos jt dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (i+j)t}{i+j} + \frac{\sin (i-j)t}{i-j} \right] \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\begin{cases} = 0 & (i, j \text{ 同时为偶数或奇数}) \\ \neq 0 & (i, j \text{ 不同时为偶数或奇数}) \end{cases}$$

因而在 $(0, \pi/2)$ 内不满足正交条件, 不是正交函数集。

1-7 计算 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

1. $f_1(t) = f_2(t) = u(t) - u(t-1)$ 2. $f_1(t) = e^{-\alpha} u(t), f_2(t) = \sin tu(t)$

【分析与解答】

1. $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 存在时间均为 $0 \leq t \leq 1$ 。根据卷积图解过程: 变量代换 \rightarrow 翻转 \rightarrow 平移 \rightarrow 相乘 \rightarrow 叠加, 可判断卷积结果存在时间为 $0 \leq t \leq 2$ 。

可用解析法求解

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= [u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-1)] = \\ &= u(t) * u(t) - 2u(t) * u(t-1) + u(t-1) * u(t-1) = \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] u(t) - 2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u(t-\tau-1) d\tau \right] u(t-1) + \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-1) u(t-\tau-1) d\tau \right] u(t-2) = \\ &= \left(\int_0^t d\tau \right) u(t) - 2 \left(\int_0^{t-1} d\tau \right) u(t-1) + \left(\int_1^{t-1} d\tau \right) u(t-2) = \\ &= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

与例 1-4.3 类似, 为直观反映信号的波形特点, 可写为分段函数

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0 \text{ 或 } t \geq 2) \\ t & (0 \leq t \leq 1) \\ 2-t & (1 \leq t < 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2. e^{-\alpha} u(t) * \sin tu(t) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau) \sin \tau u(\tau) d\tau \right] u(t) = \\ &= e^{-\alpha t} \left[\int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \tau d\tau \right] u(t) \end{aligned} \quad (1-7)$$

应先求 $\int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \tau d\tau$, 其被积函数形式复杂, 且包含指数函数, 应采用分部积分

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} \sin \tau d\tau = \int_0^t \left(\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha} \right)' \sin \tau d\tau = \frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha} \sin \tau \Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha} \cos \tau d\tau$$

右侧第 2 项再采用分步积分, 得