Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学

学习辅导与习题解答

（农林类·第二版）

⊙吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

Math

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学

学习辅导与习题解答

（农林类·第二版）

◎ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

《高等数学》学习辅导与习题解答（农林类·第二版）/吴赣昌主编．—北京：中国人民大学出版社，2012.11
21世纪数学教育信息化精品教材．大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-16187-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第257873号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
《高等数学》学习辅导与习题解答
（农林类·第二版）
吴赣昌　主编
Gaodeng Shuxue Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32开本	**版　　次**	2012年12月第1版
印　　张	17.625	**印　　次**	2012年12月第1次印刷
字　　数	662 000	**定　　价**	29.00元

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所大专院校广泛采用。

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已。事实上，在大学生涯中，就提高学习基础、提升学习能力、培养科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程。

为方便同学们使用“21世纪数学教育信息化精品教材”学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书籍均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的**主要知识归纳**、**典型例题分析**与**习题解答**等内容，而每一章的设计中包括了该章的**教学基本要求**、**知识点网络图**、**题型分析**与**总习题解答**，上述设计有助于学生在课后自主研读时通过这些教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要反复、认真地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队通过数苑网（www.math168.com或者www.sciyard.com）为本系列教材与教辅的用户提供丰富的资源性与交互性的网络学习服务，其中与该系列教辅书籍最为直接相关的是在大学课程教学空间的“大学数学”栏目中，专门建

设了**“大学公共数学教学空间”**。该教学空间的建设旨在为全国大学数学相关课程的教学双方提供一个基于网络进行学习辅导与交流讨论的平台，**其最大的特色**在于该网络教学空间集成了数苑自主研发且国际领先的公式编辑与计算软件 Sciyard MathPlay 以及图形编辑与计算软件 Sciyard GraphPlay，使其支持文字、公式与图形的在线编辑、发布、复制、粘贴与修改，从而全面支持用户基于网络进行数学等科学知识的在线交流与讨论。在该教学空间中，用户不仅可用跟帖方式对各类教学要点、例题与习题进行交流讨论，还可用主动发帖方式将自己学习中遇到的困惑、问题或者获得的经验、心得发布到论坛上进行交流讨论。大学公共数学同步学习论坛的建设有利于汇聚广大师生的智慧，从而对课程教育与学习相关的各类问题进行深入的讨论，而空间中建设与积累的丰富教学资源又能进一步为参与交流讨论的师生创造良好的教学环境。

与“21 世纪数学教育信息化精品教材”配套建设的教辅书籍包含了面向普通本科理工类、经管类、农林类、医药类、医学类与纯文科类的 14 套共 16 本，面向各类三本院校理工类与经管类的 6 套共 7 本，面向高职高专院校的理工类、经管类与综合类的 7 套共 7 本，总计 27 套 30 本。此外，该系列教辅书籍的内容建设与编排具有相对的独立性，它们还可以作为相应大学数学课程教学双方的参考书。

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”（www. math168. com 或者 www. sciyard. com)，你将会获得意想不到的收获。在那里，你不仅能进一步拓展自己的学习空间，下载优秀的学习交流软件，寻找到更多教材教辅之外的学习资源，而且还能与来自全国各地的良师益友建立联系。

吴赣昌

2012 年 4 月 18 日

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

本章教学基本要求：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法.
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.
3. 掌握函数关系的建立.
4. 理解隐函数、分段函数、反函数和复合函数的概念.
5. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念及应用.
6. 会建立简单应用问题的函数关系.
7. 了解数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念.
8. 了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
9. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，熟练掌握极限的四则运算法则，熟练掌握两个重要极限的应用.
10. 理解函数连续性的概念（包括左、右连续）与函数间断的概念，掌握间断点的分类.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质（最大最小值定理、有界性定理和介值定理）及其简单应用.

§1.1　函　数

一、主要知识归纳

表 1—1—1　　**函数的概念**

定义	设 D 是一非空数集，如果 $\forall x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为： $y=f(x),\quad x\in D,$ 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，也记为 D_f. 函数值的全体 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

续前表

表示法	(1) 表格法；(2) 图像法；(3) 解析法：根据函数的解析表达式的不同，函数又分为显函数、隐函数和分段函数.
图形	平面点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形. 函数 $y=f(x)$ 的图形一般为平面上的一条曲线.

表 1—1—2　　函数的特性

名称	定义	几何直观
有界性	若存在 $M>0$，使得 $\forall x\in D$，恒有 $$\|f(x)\|\leqslant M,$$ 则称 $f(x)$ 在 D 上有界.	图形介于两直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.
单调性	设 x_1，x_2 为区间 I 上的任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加（单调减少）.	从左往右看去，单调增加（单调减少）函数的图形上升（下降）.
奇偶性	设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果 $\forall x\in D$，恒有 $$f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x)),$$ 则称 $f(x)$ 为偶函数（奇函数）.	偶函数（奇函数）的图形关于 y 轴对称（关于原点对称）.
周期性	如果存在常数 $T>0$，使得 $\forall x\in D$，恒有 $(x\pm T)\in D$，且 $$f(x+T)=f(x),$$ 则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.	每隔一个周期的图形形状相同.

表 1—1—3　　数学建模

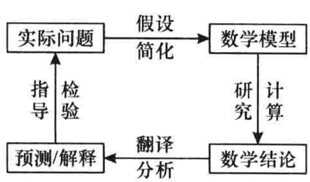
概念	在应用数学解决实际应用问题时，首先要将该问题量化，分析哪些是常量，哪些是变量，然后确定选取哪个量作为自变量，哪个量作为因变量，最后要把实际问题中变量之间的函数关系正确地抽象出来，依题意建立起它们之间的数学模型，建立数学模型的过程称为数学建模.
意义	数学模型的建立有助于我们利用已知的数学工具来探索隐藏于其中的内在规律，帮助我们把握现状、预测和规划未来，从这个意义上说，我们可以把数学建模设想为旨在研究人们感兴趣的特定的系统或行为的一种数学构想.
流程图	

表 1—1—4　**回归分析**

概念	在许多实际问题中，往往只能通过观测或试验获取反映变量特征的部分经验数据，而实际问题要求我们从这些数据出发来探求隐藏于其中的某种模式或趋势．如果这种模式确实存在，而我们又能找到近似表达这种趋势的曲线 $y=f(x)$，那么我们一方面可以用这个表达式来概括这些数据，另一方面能够以此预测其它 x 处的 y 值．求这样一条拟合数据的特殊曲线的过程称为回归分析，该曲线称为回归曲线．
步骤	(1) 将实际问题量化，确定自变量和因变量； (2) 根据已知数据作散点图，大致确定拟合数据的函数类型； (3) 通过软件（如 Excel 等）计算，得到函数关系模型； (4) 利用回归分析建立的近似函数关系来预测指定点 x 处的 y 值．

二、典型例题分析

例 1　判断下面各组中的两个函数是否相同，并说明理由．

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$ 与 $g(x)=1-x$．

解　(1) 虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 与对应法则均相同，所以这两个函数相同．

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$，所以当 $x>1$ 时 $f(x)\neq g(x)$，即这两个函数的对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数．

小结： 函数的定义域与对应法则称为函数的两大要素．判断两个函数是否相同只需比较它们的定义域和对应法则是否相同，而与它们的表现形式没有必然的联系．

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域．

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，自变量 x 显然要满足：

$$\begin{cases}3-x>0\\ \sin x\neq 0\\ 5+4x-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x\neq k\pi\\ -1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z}).$$

所以，函数 $f(x)$ 的定义域

$$D_f=\{x\mid -1\leqslant x<3,\ x\neq 0\}=[-1, 0)\cup(0, 3).$$

小结： 求函数的定义域，即求使函数有意义的变量的范围，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集．解题过程中，请熟记下列常用初等函数的定义域，如表 1—1—5 所示．

表 1—1—5

函数	定义域	零点
$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$x=0$
$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$	
$y=\ln x$	$x>0$	$x=1$
$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$x=n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$
$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}$
$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}$	$x=n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$
$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$x=0$
$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$x=1$
$y=\arctan x$	$(-\infty,\ +\infty)$	$x=0$

例 3　证明 $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内是无界函数.

证　显然，对任意给定的正数 M，都存在一个自然数 k，使

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}>M.$$

取 $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M\in(0,\ +\infty)$，则有

$$|f(x_k)|=\left|2k\pi+\frac{\pi}{2}\right|>M.$$

所以，$f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内是无界函数.

小结：根据函数有界性定义，欲证某函数无界，即要证：$\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使得

$$|f(x_0)|>M,$$

而证明的关键在于找到使 $|f(x_0)|>M$ 的点 x_0.

例 4　讨论函数 $y=x+\ln x$ 在指定区间 $(0,\ +\infty)$ 内的单调性.

解　任取 x_1，$x_2\in(0,\ +\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=x+\ln x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加.

小结：判断函数单调性的方法一般有：(1) 利用单调性定义判定；(2) 利用函数的导数来判断（参见教材第 3 章的有关内容）.

例 5　判断函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\left[-\ln\frac{1+x}{1-x}\right]=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),$$

所以，由定义知 $f(x)$ 是偶函数.

小结：判断函数奇偶性时一般先算出 $f(-x)$ 的解析式，然后运用已知条件和计算技巧尽量把 $f(-x)$ 化成与解析式相仿的形式，最后根据定义做出判断. 另外一种有效方法是做和 $f(x)+f(-x)$ 或做差 $f(x)-f(-x)$，前者等于零，表明 $f(x)$ 是奇函数；后者等于零，表明 $f(x)$ 是偶函数.

例 6　设 $f(x)$ 是以正数 T 为周期的函数，证明 $f(Cx)$ $(C>0)$ 是以 $\frac{T}{C}$ 为周期的函数.

证　设 $F(x)=f(Cx)$，则

$$F\left(x+\frac{T}{C}\right)=f\left[C\left(x+\frac{T}{C}\right)\right]=f(Cx+T)=f(Cx)=F(x).$$

所以，$f(Cx)$ 是以 $\frac{T}{C}$ 为周期的函数.

小结：对于函数周期性，一般利用定义和周期函数的运算性质进行证明. 证明的关键在于从定义出发构造合适的 T，使得 $f(x+T)=f(x)$.

三、习题 1—1 解答

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$；

(3) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；　　(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；

(5) $y=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；　　(6) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$.

解　(1) $\begin{cases} x\neq 0 \\ 1-x^2\geqslant 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -1\leqslant x<0 \\ 0<x\leqslant 1 \end{cases}$.

定义域 $D=[-1, 0)\cup(0, 1]$.

(2) $\because$ $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x-1>0$，$\therefore$ $D=(1, 2]$.

(3) 因为 $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

(4) $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\leqslant 3\\x\neq 0\end{cases}$.

定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(5) $\begin{cases}3-x>0\\|x|-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\|x|>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$.

所以定义域为 $1<x<3$ 或 $x<-1$.

(6) $\begin{cases}16-x^2>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<x<4\\x>1\\x\neq 2\end{cases}$.

定义域为 $1<x<2$ 或 $2<x<4$.

2. 下列各题中，函数是否相同？为什么？

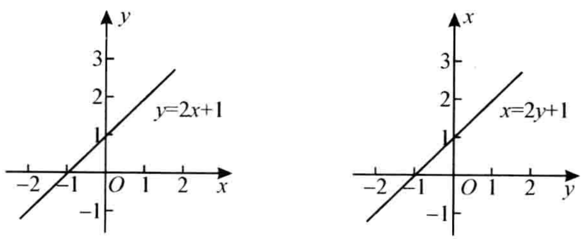
(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　　(2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$；　　(4) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$.

解 (1) 不相同，由于 $\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) 不相同，由于 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

(3) 相同，虽然它们的自变量所用的字母不同，但其定义域和对应法则均相同，如题 2(3) 图所示.



题 2(3) 图

(4) 因为对应法则不同，所以不是同一函数.

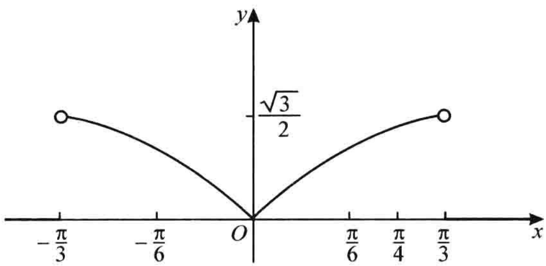
3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\[2mm] 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$ 的图形如题 3 图所示.



题 3 图

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty, 1)$；　　(2) $y=2x+\ln x$，$(0, +\infty)$.

证 (1) 任取 x_1，$x_2\in(-\infty, 1)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\frac{x}{1-x}$在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

(2) 任取 x_1，$x_2\in(0, +\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=2x_1+\ln x_1-2x_2-\ln x_2=2(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=2x+\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证 任取 x_1，$x_2\in(-l, 0)$，且 $x_1<x_2$，则$-x_1$，$-x_2\in(0, l)$，且$-x_2<-x_1$. 由于 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数，且在 $(0, l)$ 内单调增加，故

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

即　　$f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数的定义域关于原点对称，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　(1) 设 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 为奇函数，$f_2(x)$，$g_2(x)$ 为偶函数，

$$f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x),$$

即两个偶函数的和仍为偶函数.

$$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)],$$

即两个奇函数的和仍为奇函数.

(2) 设 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 为奇函数，而 $f_2(x)$，$g_2(x)$为偶函数. 因为

$$f_2(-x)\cdot g_2(-x)=f_2(x)\cdot g_2(x),$$

所以两个偶函数的乘积仍为偶函数.

$$f_1(-x)\cdot g_1(-x)=[-f_1(x)][-g_1(x)]=f_1(x)\cdot g_1(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数.

$$f_2(-x)\cdot f_1(-x)=f_2(x)[-f_1(x)]=-f_2(x)\cdot f_1(x),$$

所以奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=\tan x-\sec x+1$；　　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) $y=|x\cos x|e^{\cos x}$；　　(4) $y=x(x-2)(x+2)$.

解　(1) 既非奇函数又非偶函数；(2)，(3) 是偶函数；(4) 是奇函数.

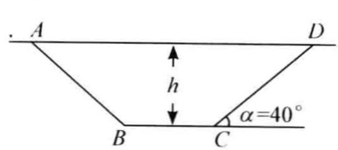
8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-1)$；　(2) $y=x\tan x$；　(3) $y=\sin^2 x$.

解　(1) 的周期为 2π；　　(2) $y=x\tan x$ 是非周期函数；

(3) $y=\sin^2 x$ 的周期为 π，因为 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

9. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\alpha=40^\circ$（如题 9 图所示），当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L ($L=AB+BC+CD$) 与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.



题 9 图

解　因为 $S_0=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot h$，$AD=BC+$

$\frac{2h}{\tan\alpha}$，所以

$$AD+BC=2BC+\frac{2h}{\tan\alpha}=\frac{2S_0}{h}.$$

由此得 $BC=\frac{S_0}{h}-\frac{h}{\tan\alpha}$.

又 $AB=CD=\frac{h}{\sin\alpha}$，则有

$$L=AB+BC+CD=\frac{S_0}{h}-\frac{h}{\tan\alpha}+2\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot h.$$

显然 $h>0$，又由 $BC=\frac{S_0}{h}-\frac{h}{\tan\alpha}>0$，得 $h<\sqrt{S_0\tan\alpha}$.

故定义域为 $(0,\sqrt{S_0\tan\alpha})$.

10. 一台收割机价值 8 万元，每收割一亩地的农作物的成本为 5 元，收割一亩地的收入为 55 元，求收割面积为 x 亩时的成本函数. 收入函数和利润函数.

解 收割 x 亩的成本函数为

$$C(x)=80\,000+5x.$$

收益函数为

$$R(x)=55x.$$

利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=55x-(80\,000+5x)=50x-80\,000.$$

*11. 为了估计山上积雪融化后对下游灌溉的影响，在山上建立了一个观察站，测量了最大积雪深度（x）与当年灌溉面积（y），得到连续 10 年的数据，见下表.

x	15.2	10.4	21.2	18.6	26.4	23.4	13.5	16.7	24.0	19.1
y	28.6	19.3	40.5	35.6	48.9	45.0	29.2	34.1	46.7	37.4

(1) 试确定最大积雪深度与当年灌溉面积间的关系模型；

(2) 试预测当年积雪的最大深度为 27.5 时的灌溉面积.

解 (1) a. 作散点图，确定函数关系，如题 11 图所示. 由散点图可以看出，x 与 y 之间大致呈线性关系，设关系式为

$$y=ax+b,$$

其中 a，b 为待定常数.