

NEW SHORTCUT WAY

NEW

SHORTCUT WAY

新捷径

同步训练

总主编 | 江苏省教育厅教研室数学教研员、高级教师 万庆炎

主 编 | 南京市人民中学 高级教师 李克大



高中数学

一年级分册



东北师范大学出版社



1 集合与简易逻辑

★本章高考热点

1. 集合、子集、交集、并集、补集的概念和表示.
2. 求已知集合的交集、并集、补集.
3. 集合交、并、补及包含的图示.
4. 绝对值不等式的解集.
5. 一元二次不等式的解法.
6. 复合命题的构成和真假.
7. 四种命题及等价性的运用.
8. 充分条件、必要条件的判定.

第一节 集 合

★重点知识巩固

1. 集合的概念和表示

- (1) 集合中的元素满足 确定 性、无序 性、互异 性.
- (2) 集合可以用大写字母抽象表示,也可以用 列举 法或 图示 法具体表示,还可以用图示法表示.

- (3) 元素与集合之间的关系为 $\in$ 或 $\notin$.

[特别提示]

- ① 集合中相同元素不要重复列举;
② 不能在元素与集合之间使用符号“ $\subseteq$ ”或“ $\subset$ ”,不能在集合之间使用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”.

2. 子集与包含

- (1) $A \subseteq B$ 的含义是:若 x _____, 则 x _____.
(2) $A \subseteq B$ 包括两种情况, _____ 和 _____.
(3) $\emptyset$ _____ A ; $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow$ _____.

[特别提示]

要说明 $A \subseteq B$, 不仅要说明 A 中元素属于 B , 在 B 中还应不属于 A 的元素.

3. 补集

- (1) $\complement_U A =$ _____.
(2) $\complement_U (\complement_U A) =$ _____, $\complement_U \emptyset =$ _____, $\complement_U U =$ _____.
(3) $\complement_U A \subseteq \complement_U B \Leftrightarrow$ _____.

[特别提示]

求补集前应明确全集中有哪些元素.

4. 交集

- (1) $A \cap B =$ _____.
(2) $\emptyset \cap A =$ _____, $A \cap A =$ _____.
(3) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B =$ _____.

[特别提示]

注意图示法的运用.

5. 并集

- (1) $A \cup B =$ _____.
(2) $\emptyset \cup A =$ _____, $A \cup A =$ _____.
(3) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B =$ _____.

[特别提示]

- ① 注意图示法的运用.
② 在计算 $A \cup B$ 中元素的个数时, 不要重复计算.

★精选例题讲解

▶▶▶ 基本题

例 1 已知 $A \not\subseteq B$, 则 ().

A. $A \cap B \neq B$

B. $A \cup B \neq A$

C. $A \cap B \subsetneq A \cup B$

D. $A \cap B = \emptyset$ 或 $A \supseteq B$

[考点提示]

集合包含的概念;交集与并集的概念;集合相等的概念;空集的概念.

分析:将已知条件分成两种情况,如图 1-1 所示.

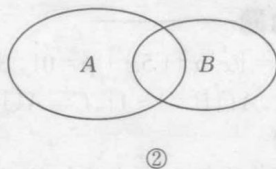
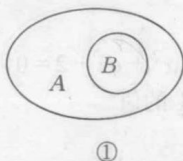


图 1-1

由①可知选项 A 和 B 不正确,由②知选项 D 不正确.

答案:C.

例 2 已知全集 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, d, e\}$, $B = \{c, d, f\}$, 则 $(A \cap \complement_U B) \cup B =$

[考点提示]

集合的交、并、补.

分析:根据集合的交、并、补的概念,逐步求出结果.

答案: $\{a, c, d, e, f\}$.

▶▶▶ 提高题

例 3 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, M 的子集中,不包含 $\{1, 3\}$ 的共有多少个?

[考点提示]

子集的概念;子集个数的计算.

分析:解法一:将满足条件的子集按元素个数分类,再将各类子集个数求和.解法二:先求出所有子集的个数,再减去包含 $\{1, 3\}$ 的子集的个数.答案:由 $1+4+5+2+0=12$ 或由 $(1+4+6+4+1)-4=12$ 得到不包含 $\{1, 3\}$ 的子集共有 12 个.例 4 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 4\}$, $C = \{(x, y) | x - 2y =$

1}, 则用列举法表示 $(A \cup B) \cap C$ 为_____.

[考点提示]

二元有序数对集合求交集、并集的方法.

分析: 可以运用 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, 将本题转化为求二元一次方程组解集的并集, 也可转化为坐标平面上直线交点的坐标问题.

$$\text{答案: } A \cap C = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} y = x \\ x - 2y = 1 \end{cases} \right\} = \{(-1, -1)\},$$

$$B \cap C = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \right\} = \{(3, 1)\},$$

$$(A \cup B) \cap C = \{(-1, -1)\} \cup \{(3, 1)\} = \{(-1, -1), (3, 1)\}.$$

►►► 综合能力题

例 5 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 5x + p = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + qx - 2 = 0\}$, $C = \{x \mid x^2 + (k + 3)x + 4 = 0\}$, $A \cap B = \{-1\}$, $C \subseteq A \cup B$, 求 k 的值.

[考点提示]

方程解集表示; 集合的包含; 方程公共根的集合表示.

分析: 先将 $A \cap B$ 和 $C \subseteq A \cup B$ 理解为二次方程根之间的关系, 再运用方程的概念和方法解决问题.

答案: $A \cap B = \{-1\}$, 即 -1 是方程 $x^2 + 5x + p = 0$ 和 $x^2 + qx - 2 = 0$ 的根. 将 -1 分别代入两方程, 求得 $p = 4$, $q = -1$. $\therefore A = \{x \mid x^2 + 5x + 4 = 0\} = \{-1, -4\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$. $A \cup B = \{-1, 2, -4\}$.

方程 $x^2 + (k + 3)x + 4 = 0$ 根的判别式为

$$\Delta = (k + 3)^2 - 16 = (k + 7)(k - 1)$$

当 $-7 < k < 1$ 时, $C = \emptyset \subseteq A \cup B$;

当 $k = -7$ 时, $C = \{2\} \subseteq A \cup B$;

当 $k = 1$ 时, $C = \{-2\} \subseteq A \cup B$;

当 $k > 1$ 或 $k < -7$ 时, 设 $C = \{x_1, x_2\}$, 则 $x_1 x_2 = 4$. $A \cup B$ 中, 仅有 $(-1) \times (-4) = 4$, 故 $k + 3 = -[(-1) + (-4)] = 5$, $k = 2$.

因此, $k = 2$ 或 $-7 \leq k < 1$.

►►► 创新与应用

例 6 高一(3)班有两个课外活动小组, 即无线电测向组和物理兴趣组, 两组共有 9 人, 其中有 3 人同时参加了这两个小组. 无线电测向组中, 女生有 3 人, 物理兴趣组中共 4 人, 其中 1 名学生是无线电测向组成员, 则无线电测向组中, 没有参加物理兴趣组的学生有几人?

[考点提示]

两个有限集中元素的个数与这两个集合交、并元素个数的关系;运用集合图示分析元素分布情况.

分析:推断与图示相结合.

答案:将无线电测向组和物理兴趣组分别记做集合 A 和 B , A 中的女生记做 C , 则 $\text{card}(A \cup B) = 9$, $\text{card}(A \cap B) = 3$, $C \subseteq A$, $\text{card}(C) = 3$, $\text{card}(B) = 4$, $\text{card}(B \cap C) = 1$.

因此, $\text{card}(A) = \text{card}(A \cup B) + \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B) = 8$.

$\therefore \text{card}(B \cap C) = 1$,

$\therefore \text{card}(B \cap \complement_A C) = \text{card}(B \cap A) - \text{card}(B \cap C) = 3 - 1 = 2$,

$\text{card}(\complement_A C) = \text{card}(A) - \text{card}(C) = 8 - 3 = 5$.

这就是说, 无线电测向组的 5 名男生中, 有 2 人参加了物理兴趣组, 没有参加物理兴趣组的有 3 人.

本题也可以作集合图示, 如图 1-2 所示, 先在 $B \cap C$ 中填写 1, 再在图中 $B \cap C$ 的左、右两侧填 2, B 中不包于 A 的部分只能填 1, 最后剩下的部分填 3. 根据图中数据分布, 回答所求的人数.

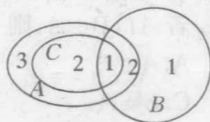


图 1-2

例 7 已知集合 $A = \{x | x = 6n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 在集合 ① $\{x | x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$, ② $\{x | x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, ③ $\{x | x = 6n, n \in \mathbb{Z}\}$, ④ $\{x | x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$ 中, 与 $\complement_{\mathbb{Z}} A$ 的并集等于 $\mathbb{Z}$ 的是_____.

[考点提示]

整数集合的分类; 补集的性质.

分析: 根据 A 中元素满足的条件, 可以将整数 $\mathbb{Z}$ 按照除以 6 的余数不同划分成六类, A 是其中余数为 2 的一类, 再将“与 $\complement_{\mathbb{Z}} A$ 的并集等于 $\mathbb{Z}$ ”转化为集合的包含关系.

答案: 集合 $M \cup \complement_{\mathbb{Z}} A = \mathbb{Z} \Leftrightarrow A \subseteq M$, 所以只要找出 A 是哪些集合的子集即可. 由于 $6n + 2 = 2(3n + 1)$, $6n + 2 = 3 \cdot (2n) + 2$, 所以 A 是 ① 和 ④ 项集合的子集, 不是 ② 和 ③ 项集合的子集, $\therefore$ 应填写 ① 和 ④.

★基本能力检测

一、选择题.

1. 在 ① $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ② $\{2\} \subseteq \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, ③ $\emptyset \subseteq \{0\}$, ④ $(2, -1) \subseteq \{(x, y) | x + y =$

1) 中, 正确的有().

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

2. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | 8 - 2x \in \mathbb{N}\}$, 则 A 中的元素有().

A. 4 个 $N = 0, 1, 2, \dots$ B. 5 个 C. 6 个 D. 9 个

3. 设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}_+ | x \leq 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5\}$, 则().

A. $U = A \cup (\complement_U B)$

B. $U = (\complement_U A) \cup B$

C. $U = A \cup B$

D. $U = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$

4. 若集合 $P = \{(x, y) | x + 2y = -1\}$, $M = \{(x, y) | 3x - y = 4\}$, 则 $P \cap M$ 等于().

A. $(-1, 1)$

B. $(1, -1)$

C. $\{(-1, 1)\}$

D. $\{(1, -1)\}$

5. 若 $A \cap B = A$, 则一定有().

A. $A = B$

B. $A \subsetneq B$

C. $B \subsetneq A$

D. $A \cup B = B$

6. 已知集合 $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 4n \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$, 则().

A. $A \subsetneq B$

B. $B \subsetneq A$

C. $A = B$

D. $A \cap B = \emptyset$

7. 若 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B$ 等于().

A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

B. $\{x | x > -2\}$

C. $\{x | -2 < x < 0\}$

D. $\{x | x \leq 1\}$

8. 集合 A, B 满足 $A \cap B = \{c, f\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, 则 A 与 B 元素个数之和为().

A. 8 个

B. 7 个

C. 6 个

D. 无法确定

9. 若集合 $A \subseteq B$, 则下列选项不正确的是().

A. 若 $A \neq B$, 则 $A \subsetneq B$

B. 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subsetneq B$

C. 若 $B \subseteq A$, 则 $A \cup B = A \cap B$

D. 若 $A \cup B = A$, 则 $A = B$

10. 已知 $A = \{x | x^2 - px - 4 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + qx = 0\}$, 若 $A \cap B = \{-1\}$, 则 $p + q$ 等于().

A. -4

B. -2

C. 4

D. 2

二、填空题.

11. 如图 1-3 所示, 阴影部分表示的集合为 $B \cap \complement_U A$. 如图 1-4 所示, 用阴影表示集合 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 为_____.



图 1 - 3

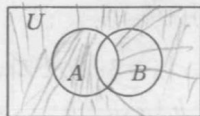


图 1 - 4

12. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 6\}$, $B = \{1, 4, 6\}$, 则 $(A \cap C_U B) \cup (B \cap C_U A) =$ _____.

13. 满足 $\{1\} \subseteq M \subsetneq \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 有 _____.

14. 用列举法表示集合 $\{(x, y) | xy \leq 3 \text{ 且 } x, y \in \mathbb{N}_+\}$ 为 _____.

15. 在 ① $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, ② $A \subsetneq B \Rightarrow C_U A \supseteq C_U B$, ③ $A \subseteq B \Rightarrow C_U A \supsetneq C_U B$, ④ $\emptyset \cap A = A \Leftrightarrow A = \emptyset$ 中, 正确的有 _____.

三、解答题.

16. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 4x + k = 0\}$.

(1) 若 $B = \emptyset$, 求 k 的取值范围.

(2) 若 $B \subsetneq A$, 求 k 的取值范围.

(3) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求 k 的值.

★综合能力检测

一、选择题.

1. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 30\}$, $A = \{x \in U | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \in U | x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$, 则集合 $A \cap C_U B$ 的元素有().

- A. 5 个 B. 9 个 C. 10 个 D. 15 个

2. 已知集合 $A = \{x | 2x < a - 2\}$, $B = \{x | x > -3\}$, 若 $A \cap B \cap \mathbb{Z}$ 为单元素集合, 则整数 a 为().

- A. 0 或 1 B. -1 或 0
C. -2 或 -1 D. -2, -1 或 0

3. 集合 $\{x \in \mathbb{Z} | x^2 < 5\}$ 的元素个数是().

- A. 11 B. 9 C. 6 D. 5

4. 集合 $A \cap (C_U B)$ 的补集是().

- A. $(C_U A) \cup B$ B. $(C_U A) \cap B$

C. $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$

D. $A \cup (\complement_U B)$

5. 若 $A = \{x | x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$, $a \in A, b \in B, c \in \complement_{\mathbb{Z}}(A \cup B)$, 则在 $a + b + c, a + b - c, a - b + c, b + c - a$ 中, 属于 A 的有().

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

6. 设 U 是全集, P, Q 是非空集合, 且 $P \subsetneq Q \subsetneq U$, 则下列结论不正确的是().

A. $(\complement_U P) \cup Q = U$

B. $(\complement_U P) \cap Q = Q$

C. $P \cup Q = Q$

D. $P \cap (\complement_U Q) = \emptyset$

7. 已知集合 $M = \{(x, y) | x - y = 0\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 0\}$, 则().

A. $M \cap N = M$

B. $M \cup N = M$

C. $M \cap N = \emptyset$

D. $M \cup N = \mathbb{R}$

8. 设全集 $U = \mathbb{N}$, 集合 $E = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{4n | n \in \mathbb{N}\}$, 则集合 N 可以表示为().

A. $E \cap F$

B. $(\complement_U E) \cup F$

C. $E \cup (\complement_U F)$

D. $(\complement_U E) \cup (\complement_U F)$

9. 设集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则().

A. $M = N$

B. $M \subsetneq N$

C. $M \supsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$

二、填空题.

10. 已知 O_1, O_2 是平面上两个定点, $A = \{P | PO_1 = 2\}$, $B = \{P | PO_2 = 1\}$, 若 $A \cap B$ 为单元素集合, 则 $O_1 O_2 =$ _____.

11. 已知 $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 6\}$, 若 $A \cap B = \{1\}$, $A \cap \complement_U B = \{2, 6\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3\}$, 则 $B =$ _____.

12. 设集合 $M = \{x | 2x^2 - 5x - 3 = 0\}$, $N = \{x | ax = 1\}$, 则使 $N \subsetneq M$ 成立的实数 a 的集合是 _____.

13. 已知集合 $A \cup B \subsetneq C$, 则在① A 中有元素不属于 C , ② $A \subseteq C$ 与 $B \subseteq C$ 中最多只有一个成立, ③ $A \subsetneq C$ 且 $B \subsetneq C$, ④ $A \subsetneq C$ 或 $B \subsetneq C$ 中, 正确的有 _____.

三、解答题.

14. 设集合 C 是方程 $x^2 + px + q = 0 (p^2 > 4q)$ 的解集, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$, 且 $C \cap A = \emptyset$, $C \cap B = C$.

(1) 用列举法表示 C .(2) 求 p 和 q 的值.

15. 15 名翻译中, 10 人会英语, 6 人会法语, 6 人会日语, 既会日语又会英语的有 3 人, 既会日语又会法语的有 2 人, 没有人同时会这三种语言, 则既会英语又会法语的有 _____.

几人?

$$\begin{aligned} & \text{Card}(A \cup B \cup C) \\ &= \text{Card} A + \text{Card} B + \text{Card} C - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

第二节 不等式的解法

★重点知识巩固

1. 绝对值不等式的解法和几何意义

- (1) 绝对值不等式 $|x+m| < a (a>0)$ 的解集为 _____; $|x+m| > a$ 的解集为 _____.
- (2) $|x| < a$ 的解集在数轴上表示为 _____; $|x| > a$ 的解集在数轴上表示为 _____.

[特别提示]

解含有绝对值的不等式, 首先是转化为不含绝对值的形式.

2. 一元二次不等式的解法

- (1) 二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 的充要条件是 _____, 解集为 $\emptyset$ 的充要条件是 _____.
- (2) 若 $x_1 < x_2$, 则不等式 $(x-x_1)(x-x_2) \leq 0$ 的解集为 _____.
- (3) 不等式 $\frac{x+a}{x+a-1} < 0$ 的解集为 _____.

[特别提示]

解二次不等式时要注意: ①二次项系数的符号; ②判别式“ Δ ”的符号; ③不等号的方向.

★精选例题讲解

▶▶▶ 基本题

例1 求不等式 $1 \leq |2-3x| < 4$ 的解集.

[考点提示]

绝对值性质的运用; 绝对值不等式的解法.

分析: 如将不等式化为不等式组 $\begin{cases} |2-3x| \geq 1, \\ |2-3x| < 4 \end{cases}$ 再求解比较麻烦, 应结合绝对值的

概念,变形为双重不等式.

答案: $1 \leq |3x-2| < 4$ 成立的条件是 $1 \leq 3x-2 < 4$ 或 $-1 \geq 3x-2 > -4$, 即 $1 \leq$

$$x < 2 \text{ 或 } \frac{1}{3} \geq x > -\frac{2}{3}, \text{ 解集为 } \left\{ x \mid 1 \leq x < 2 \text{ 或 } \frac{1}{3} \geq x > -\frac{2}{3} \right\}.$$

例2 已知集合 $A = \{x \mid x(1-2x) > 3(1-2x)\}$, $B = \{x \mid x^2 \geq 1\}$, 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

[考点提示]

一元二次不等式的解法;根据数轴观察不等式解集的交集、并集.

分析: 要按基本法则对不等式变形、化简;从数轴上观察交集、并集.

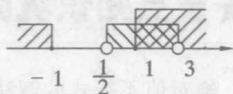


图 1-5

答案: $A = \{x \mid (x-3)(2x-1) < 0\} = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < x < 3 \right\};$

$$B = \{x \mid (x+1)(x-1) \geq 0\} = \{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}.$$

从数轴上观察得 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$, $A \cup B = \left\{ x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2} \right\}$

►►► 提高题

例3 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2|x| < 3\}$, 则在集合① $\left\{ x \mid \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases} \right\}$, ② $\{x \mid |x| \leq 1\}$, ③ $\{x \mid 1 < |x| < 3\}$, ④ $\{x \mid (x-1)(x+3) < 0\}$ 中, 以集合 A 为子集的有().

A. ①②

B. ②③

C. ②④

D. ③④

[考点提示]

绝对值性质的运用;不等式的变形;集合的包含.

分析: 先将集合 A 化简, 然后分析四个集合与 A 的关系.

答案: $x^2 + 2|x| < 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 < 0 \Leftrightarrow (|x|+3)(|x|-1) < 0 \Leftrightarrow -3 < |x| <$

$1. \because -3 < |x|$ 对一切实数 x 恒成立, $\therefore A = \{x \mid |x| < 1\}$. 在①, ②, ③, ④中,

②和④包含 A 且不等于 A , $\therefore$ 选项 C 正确.

例4 解关于 x 的不等式 $(kx+1)(x-2) < 0 (k \in \mathbf{R})$.

[考点提示]

解不等式时的分类讨论.

分析: k 的取值从两个方面影响解集: 一是左边两根 $-\frac{1}{k}$ 与 2 的大小关系, 二是 k 的正负决定二次项系数的符号.

答案: 当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, 方程 $(kx+1)(x-2) = 0$ 的两根相等, 因此

当 $k < -\frac{1}{2}$ 时, $-\frac{1}{k} < 2$, 解集为 $\left\{ x \mid x < -\frac{1}{k} \text{ 或 } x > 2 \right\};$

当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, 解集为 $\{x | x \neq 2\}$;

当 $-\frac{1}{2} < k < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > -\frac{1}{k}\right\}$;

当 $k = 0$ 时, 解集为 $\{x | x < 2\}$;

当 $k > 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{k} < x < 2\right\}$.

►►► 综合能力题

例 5 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (3a-1)x + 2a+1=0$ 的两根都大于 1, 求实数 a 的取值范围.

[考点提示]

一元二次方程根的判别式; 一元二次方程根与系数的关系; 解不等式组.

分析: ①要注意: 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ x_1 x_2 > 1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ 不等价; ②不能遗漏方程有两实根的条件.

$$\text{答案: } \begin{cases} \Delta = (3a-1)^2 - 4a(2a+1) \geq 0, \\ x_1 > 1, x_2 > 1, \\ x_1 + x_2 = \frac{1-3a}{a}, x_1 x_2 = \frac{2a+1}{a}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 10a + 1 \geq 0, \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 10a + 1 \geq 0, \\ \frac{1-3a}{a} - 2 > 0, \\ \frac{2a+1}{a} - \frac{1-3a}{a} + 1 > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 5 + 2\sqrt{6} \text{ 或 } a \leq 5 - 2\sqrt{6}, \\ 0 < a < \frac{1}{5}, \\ 6 > 0. \end{cases}$$

$$\therefore 5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} < \frac{1}{5}, \therefore \text{所求的实数 } a \text{ 的取值范围是 } 0 < a \leq 5 - 2\sqrt{6}.$$

例 6 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = x + 1$ 的图像分别为 c_1 和 c_2 , 当且仅当 $-4 < x < 1$ 时, c_1 在 c_2 上方, 求不等式 $cx^2 - bx - a + 1 > 0$ 的解集.

[考点提示]

函数图像与不等式解集的关系;不等式解集类型的判定.

分析:根据 c_1 和 c_2 所满足的条件,转化为不等式进行求解,进而求出 a, b, c 的关系,然后再讨论求解的不等式属于什么类型.

答案:由题意可知,当且仅当 $-4 < x < 1$ 时, $ax^2 + bx + c > x + 1$, 即 $ax^2 + (b-1)x + (c-1) > 0$ 的解集为 $\{x | -4 < x < 1\}$, 由此应有

$$\begin{cases} a < 0, \\ -\frac{b-1}{a} = -4+1 = -3, \\ \frac{c-1}{a} = (-4) \times 1 = -4, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a < 0, \\ b = 3a + 1, \\ c = 1 - 4a > 0. \end{cases}$$

$$cx^2 - bx - a + 1 = (1-4a)x^2 - (3a+1)x - a + 1 > 0, \Delta = (3a+1)^2 - 4(1-4a)(1-a) = -7a^2 + 26a - 3.$$

$$\because a < 0, \therefore \Delta < 0.$$

不等式 $cx^2 - bx - a + 1 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

►►► 创新与应用

例7 已知集合 $A = \{x | |x-a| \leq 2x-1\}$, $2 \in A, 1 \notin A$, 求 $|2a-1|$ 的取值范围.

[考点提示]

绝对值不等式的解集;绝对值的几何意义.

分析:①将 $2 \in A, 1 \notin A$ 表示成关于 a 的绝对值不等式;②求出 a 的取值范围;
③运用绝对值的几何意义求 $|2a-1|$ 的取值范围.

$$\text{答案:} \because 2 \in A, 1 \notin A, \therefore \begin{cases} |2-a| \leq 3, \\ |1-a| > 1, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} -1 \leq a \leq 5, \\ a > 2 \text{ 或 } a < 0, \end{cases} \therefore -1 \leq a < 0 \text{ 或 } 2 < a \leq 5.$$

$\therefore |2a-1| = 2 \left| a - \frac{1}{2} \right|$ 表示数轴上以 a 为坐标的

点到以 $\frac{1}{2}$ 为坐标的点的距离的 2 倍, 经观察可知 $\frac{1}{2} < \left| a - \frac{1}{2} \right| \leq 4 \frac{1}{2}$,

$$\therefore 1 < |2a-1| \leq 9.$$

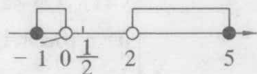


图 1-6

★基本能力检测

一、选择题.

1. 已知数轴上点 A 的坐标为 2, 则坐标为 x 的点到 A 的距离为().
 A. $|x|+2$ B. $|x|-2$
 C. $|x+2|$ D. $|x-2|$
2. 不等式 $-1 \leq x \leq 7$ 可以表示为().
 A. $|3| \leq 3$ B. $|x-3| \leq 4$
 C. $|x+3| \leq 4$ D. $|x-4| \leq 3$
3. 绝对值不等式 $|3-2x| > 1$ 的解集为().
 A. $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < 1\}$ B. $\{x|1 < x < 2\}$
 C. $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$ D. $\{x|-1 < x < 2\}$
4. 如果函数 $y = x^2 - px + q$ 的图像与 x 轴交于点 $(-2, 0)$ 和 $(1, 0)$, 则不等式 $px - x^2 > q$ 的解集为().
 A. $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -2\}$ B. $\{x|-2 < x < 1\}$
 C. $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < -1\}$ D. $\{x|-1 < x < 2\}$
5. 不等式 $(3-x)(2+x) > 0$ 的解集为().
 A. $\{x|x > 3 \text{ 或 } x < -2\}$ B. $\{x|x < 3 \text{ 或 } x > -2\}$
 C. $\{x|-2 < x < 3\}$ D. $\{x|x > -2 \text{ 或 } x > 3\}$
6. 不等式 $4x^2 \leq 1$ 的解集为().
 A. $\left\{x \left| x \leq \pm \frac{1}{2} \right.\right\}$ B. $\{x|x \leq \pm 2\}$
 C. $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$ D. $\left\{x \left| -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right.\right\}$
7. 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则二次不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集为().
 A. $\emptyset$ B. $\mathbf{R}$
 C. $\emptyset$ 或 $\mathbf{R}$ D. $\emptyset$ 或 $\left\{x \left| x \neq -\frac{b}{2a} \right.\right\}$
8. 下列与不等式 $\frac{7-x}{2+x} \leq 0$ 的解集相同的是().
 A. $(2+x)(7-x) \leq 0$ B. $(2+x)(7-x) < 0$
 C. $(2+x)(x-7) < 0$ 或 $x-7=0$ D. $(2+x)(x-7) \geq 0$ 且 $x \neq -2$
9. 若集合 $A = \{x|x^2 < 4\}$, $B = \left\{x \left| \frac{x+1}{x-2} < 0 \right.\right\}$, 则().
 A. $B \subsetneq A$ B. $A \subsetneq B$

C. $A=B$

D. $A \cap B = \emptyset$

二、填空题.

10. 不等式 $1 \leq |2x-1| < 3$ 的解集是_____.

11. 图 1-7 表示的是绝对值不等式_____的解集.

12. 若不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集是 $|x| - 1 < x < 4$, 那么 $a =$

_____, $b =$ _____.

13. 不等式 $9x^2 + 6ax + a^2 > 0$ 的解集是_____.

三、解答题.

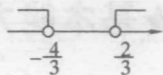
14. 已知集合 $A = \{x | 2x^2 - x - 3 > 0\}$, $B = \{x | |2x+1| < 2\}$, 求 $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B$.15. 若函数 $y = \sqrt{x^2 + 2mx + m + 2}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 求实数 m 的取值范围.

图 1-7

★综合能力检测

一、选择题.

1. 下列不等式中, 与 $|x^2 - 3x| < 3$ 的解集相同的是().

A. $x^2 - 3x < 3$

B. $0 \leq x^2 - 3x < 3$

C. $x^2 - 3x < 3$ 或 $x^2 - 3x > -3$

D. $|x-3| < \frac{3}{|x|}$

2. 不等式 $|x+1| < |x-3|$ 的解集为().

A. $\{x | x \geq 1\}$

B. $\{x | x \leq -1\}$

C. $\{x | x < 1\}$

D. $\{x | x > 1\}$

3. 不等式 $\left| \frac{x}{x+2} \right| > \frac{x}{x+2}$ 的解集是().

A. $\{x | x < -2\}$

B. $\{x | -2 < x < 0\}$

C. $\{x | x > 0\}$

D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$

4. 不等式 $x^2 - 3|x| - 4 < 0$ 的解集是().

A. $\{x | -1 < x < 4\}$

B. $\{x | -1 < x < 4 \text{ 或 } 1 > x > -4\}$

C. $\{x | -4 < x < -1 \text{ 或 } 4 > x > 1\}$

D. $\{x | -4 < x < 4\}$

5. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x | x^2 < 1\}$, $C = \{x | |x-1| < 1\}$, 则下列关系式正确的是().

A. $\complement_{\mathbb{R}}(B \cup C) \supseteq A$

B. $B \cup C \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$

C. $A \cup B \cup \complement_{\mathbb{R}} C = \mathbb{R}$

D. $A \cup C \cup \complement_{\mathbb{R}} B = \mathbb{R}$

6. 关于 x 的二次方程 $ax^2 + (2a-1)x + a = 0$ 有正根的条件是(). $\Delta > 0$

A. $0 < a \leq \frac{1}{4}$

B. $0 < a < \frac{1}{2}$

C. $a > \frac{1}{2}$ 或 $a < 0$

D. $a > 0$

7. 不等式 $\frac{4x-5}{x^2+4x-5} > 1$ 的解集是().

A. $\{x | -5 < x < 1\}$

B. $\{x | -5 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$

C. $\{x | x < -5 \text{ 或 } x > 1\}$

D. $\emptyset$

8. 使抛物线 $y = 2x^2 + x$ 夹在 x 轴与直线 $y = 2x + 1$ 之间的 x 的范围是().

A. $-\frac{1}{2} < x < 0$

B. $-\frac{1}{2} < x < 1$

C. $-\frac{1}{2} < x < 1$ 且 $x \neq 0$

D. $0 < x < 1$

二、填空题.

9. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$, 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = \{x | 3 < x \leq 4\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

10. 若不等式 $ax^2 + 4x + b > 0$ 的解集为 $\{x | \frac{1}{3} < x < 1\}$, 则不等式 $bx^2 - 4x + a < 0$ 的解集是_____.

11. 已知 $a < 0$, 则关于 x 的不等式 $x^2 + x - a^2 + a \leq 0$ 的解集为_____.

12. 不等式 $\frac{|x-2|-1}{|x-2|} \leq 0$ 的解集为_____.

三、解答题.

13. 已知集合 $A = \{x | 2x^2 - x - 3 > 0\}$, $B = \{x | |x-1| < a\}$.

(1) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求 a 的取值范围.

(2) 若 $\complement_{\mathbf{R}} B \supseteq A$, 求 a 的取值范围.

14. 已知 $k \in \mathbf{R}$, 解关于 x 的不等式 $x^2 + 2kx + k + 2 \leq 0$.

15. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, 函数 $y = \frac{\sqrt{(2m-x)(x-m-2)}}{|x+m|-1}$ 的定义域为 M . 若 $A \subseteq M$, 求 m 的取值范围.

16. 若不等式 $x^2 + 4kx + 3 - 4k > 0$ 与 $x^2 + (2k-1)x + k - \frac{1}{2} \geq 0$ 中至少有一个解集为 $\mathbf{R}$, 求 $|k+1| + |k-1|$ 的最小值和最大值.

17. 已知二次函数 $y = x^2 + px + q$ 的图像为 c , c 与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 的长为 2, 若 c 与直线 $x = 1$ 的交点在 x 轴下方, 求 p 的取值范围.

第三节 简易逻辑

★重点知识巩固

1. 逻辑联结词

已知 p 为真命题, q 为假命题, 则在① p 或 q , ② p 且 q , ③ 非 p , ④ 非 q 中, 真命题有_____.

[特别提示]

判断具体复合命题的真假时, 要先将命题表示为“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“非 p ”的形式.

2. 四种命题

(1) 设原命题为“若 p 则 q ”, 那么否命题为_____, 逆命题为_____, 逆否命题为_____.

(2) 命题“若 $\neg p$ 则 q ”的等价命题为_____.

[特别提示]

根据四种命题的关系判断命题真假及充分条件、必要条件.

3. 充分条件、必要条件

已知 p 是 q 的必要且不充分条件, 则 q 是 p 的_____条件.

[特别提示]

具体问题中要注意语句的形式结构.

★精选例题讲解

▶▶▶ 基本题

例 1 已知“ p 且 q ”是假命题, “ $\neg q$ ”是假命题, 则().

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| A. “ p 或 q ”是假命题 | B. “ $\neg p$ 且 q ”是假命题 |
| C. “ p 或 $\neg q$ ”是真命题 | D. “ $\neg p$ ”是真命题 |

[考点提示]

复合命题的真假.

分析: 根据已知条件可得出 q 是真命题, p 是假命题, 所以“ p 或 q ”是真命题, “ $\neg p$