

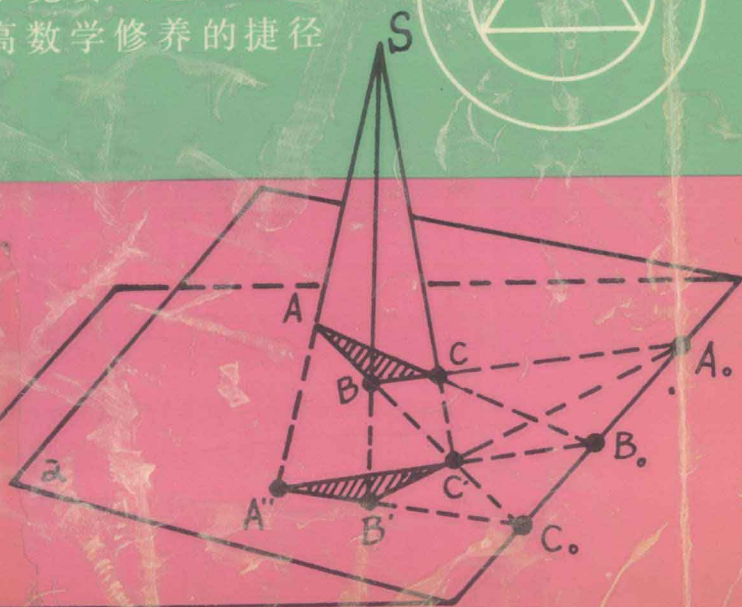
学生课外读物

中外数学名题荟萃

肖 铿 严启平

(高中册)

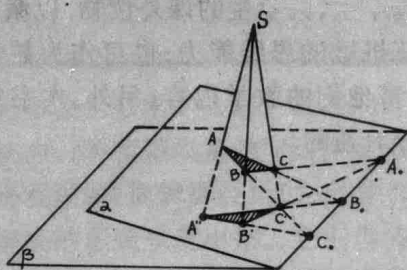
数学史上的丰碑
解题方法的宝库
数学竞赛试题的摇篮
提高数学修养的捷径



中外数学名题荟萃

肖 铨 严启平

(高中册)



湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

学生课外读物

中外数学名题荟萃(高中册)

肖 铨 严启平 主编

出版: 湖北人民出版社
发行:

地址: 武汉市解放大道新育村 33 号
邮编: 430022

印刷: 湖北省枝江市新华印刷厂
开本: 787 毫米 $\times$ 1092 毫米 1/32
字数: 226 千字

经销: 湖北省新华书店
印张: 10.625
插页: 1

版次: 1994 年 3 月第 1 版

印次: 1997 年 8 月第 2 次印刷

印数: 8 121—14 170

定价: 11.70 元

书号: ISBN 7-216-01341-7/O·4

前 言

问题与解决是数学的心脏。提出问题并解决问题是数学发展的原动力。不管是埃及的“草片”文书、欧几里得的《几何原本》，还是我国的《周髀算经》、《九章算术》，都是以一个又一个问题及解决的形式呈现出来。它们忠实地记录了人类发现或提出问题，并进而解决问题、推动数学发展的进程。

在数学发展的历史长河中，有的问题曾掀起惊涛巨浪，引发数学危机；有的问题像暗礁险滩，使数代人冥思苦想、望题兴叹；而有的问题则如同晶莹剔透的浪花，其巧妙的构思，优美的解法，使人赏心悦目，拍案叫绝。正是这一个个的问题，激发一代代青年人热爱数学、献身数学、推动了数学的发展。

由于种种原因，今天的数学教材，难以体现出“问题与解决”的韵味，没能提供机会让青少年学生接触丰富的数学遗产。过度的公理化、形式化及解题的模式化，使数学失去了原有的魅力。致使不少青少年学生错误地认为数学只是符号与公式的组合，难以激发他们学习数学的热情和兴趣。

近年来,不少有识之士建议在中小学加强数学史的学习,加强解题教学的研究,这确是针砭时弊的真知灼见。我们不算详细介绍丰富的数学史料,也不打算探讨系统的解题思想和方法。只想和青少年朋友一起,驾一叶扁舟,在数学发展的历史长河中漫游,或采一片礁石,或掬一朵浪花。兴之所至,或探踪寻源,或荡舟而过。为此,我们选编了近 150 道初等数学名题呈献在青少年朋友面前。

本书共分两册,一册主要适用于初中及小学,另一册适用于高中。编写中,我们尽量避开高等数学的专门理论,侧重于用初等方法解决问题。并尽可能体现历史的本来面貌。

本书编写中查阅了许多专著和资料,我们向原书的编著者表示衷心的感谢。

由于我们水平有限,时间仓促,错误和缺点之处难免,敬请指正。

编者

1993 年 9 月于武昌

目 录

1. 西方数学家津津乐道的话题
——毕达哥拉斯的多边形数 (1)
2. 尼寇马克的奇数分组 (5)
3. 阿基米德求无穷递缩等比数列之和 (7)
4. 数学史上极为有名的“悖论”
——“神行太保”追不上乌龟 (9)
5. 埃及分数之和 (13)
6. 中国古代纺织问题(三则) (21)
7. 舍罕王的失算 (25)
8. 阿利哈塔的三角形数求和 (28)
9. 历经2000 多年才彻底解决的难题
——伯努利的自然数方幂求和 (32)
10. 伯努利的数列证明题 (38)
11. 希普西克的数列证明题 (40)
12. 西方数学开始领先于东方数学的标志
——塔塔利亚的三次方程解法 (41)

13. 著名的代数基本定理	(46)
14. 一个意想不到的巨大发现	
——斯图谟的实根个数问题	(50)
15. 中国独特风格的代数学(一)	
——“天元术”解圆城半径问题	(56)
16. 中国独特风格的代数学(二)	
——“四元术”解弦长问题	(59)
17. 比西方早了 1400 年	
——羊犬鸡兔价钱问题	(62)
18. 世界上最古老的指数方程	
——老鼠穿墙问题	(65)
19. 西方视为解决算术问题的万能方法	
——“盈不足术”解两马相遇问题	(67)
20. 牛顿的草地与母牛问题	(70)
21. 莱布尼兹的根式问题	(75)
22. 平均不等式及其柯西的经典证明	(77)
23. 顺序和不小于乱序和, 乱序和不小于逆序和	
——接水的等待时间问题	(84)
24. 欧拉关于 2^n 的表示问题	(89)
25. 正方形剖分问题	(93)
26. 梅齐里亚克的砝码问题	(96)
27. 数学史上最古老的不定方程	
——五家共井问题	(99)
28. 对世界及后世影响极大的百鸡问题	(104)
29. 余米推数问题	(107)
30. 太阳神牛群问题	(109)

31. 数学发展史上最早引人注意的问题
——勾股数组 (115)
32. “业余数学家之王”的猜想
——费尔马大定理 (122)
33. 拉钦斯基的口算题 (132)
34. 海伦三角形 (134)
35. 佩尔并未解过的“佩尔方程” (137)
36. 质数的个数问题 (143)
37. 合数问题 (148)
38. 数学殿堂上的一颗明珠
——哥德巴赫猜想 (150)
39. 中国古代数学最辉煌的成就
——物不知数(孙子问题) (154)
40. 三角形几何学的开端
——欧拉线定理 (162)
41. 用现代方法处理传统知识的典范
——巧解欧拉不等式 (166)
42. 双心四边形的“欧拉”定理 (169)
43. 厄尔多斯——莫德耳不等式 (173)
44. 欧拉——费尔巴哈圆 (177)
45. 一个充满诱惑力的几何命题
——脍炙人口的斯坦纳——雷米欧司定理 (181)
46. 初等几何中最令人惊讶的定理
——姗姗来迟的莫利定理 (185)
47. 一个失传 1800 余年后重获解决的名题
——阿波罗尼斯相切问题 (189)

48. 马尔法蒂问题	(193)
49. 十九岁的“数学王子”打破了 2000 年无进展的难道 ——求作圆的内接正 n 边形	(197)
50. 古希腊人给它们抹上了一笔神秘的色彩 ——三大几何作图不能问题	(201)
51. 世界数学史上的第一个极值问题 ——米勒悬杆问题	(206)
52. 众多数学家青睐的“费尔马点”	(209)
53. 垂足三角形的一个极小性问题	(215)
54. 引起人们极大兴趣的蜂巢问题	(220)
55. 用不完全归纳法猜测结论的典型例子 ——斯坦纳用平面分割空间的问题	(224)
56. 三角形的等周问题	(228)
57. 斯坦纳的圆问题 ——再谈等周定理	(232)
58. 范·施古登轨迹问题	(235)
59. 牛顿椭圆问题	(238)
60. 等轴双曲线与费尔巴哈圆	(241)
61. 由四条切线作抛物线 ——兰伯特定理的直接运用	(244)
62. 抛物线的巧妙作图	(247)
63. 阿基米德三角形及所截抛物线的面积 ——“数学之神”的经典问题	(252)
64. 阿尔哈达姆弹子问题	(256)
65. 射影几何学的基础 ——帕普斯定理	(261)

66. 透视几何理论的开端	
——笛沙格定理	(264)
67. 出自十七岁年轻人之手的巴斯卡定理	(267)
68. 又一个奇妙的六边形	
——布里安香定理	(270)
69. 数学竞赛命题者的基本素材	
——斐波那契的兔子问题	(273)
70. 欧拉的多边形剖分问题	(286)
71. 组合理论的一个妙题	
——伯努利的装错信封问题	(291)
72. “世界末日”何时到来?	
——梵塔之谜	(301)
73. 图论及拓扑学的起源	
——哥尼斯堡七桥问题	(306)
74. 倍受数学竞赛命题者青睐的题目	
——小方格涂色问题	(310)
75. 舒尔定理的一个特例	
——编号问题	(315)
76. 引起数学界广泛注意的竞赛试题	
——六人聚会问题	(318)
参考文献	(327)

1. 西方数学家津津乐道的话题

——毕达哥拉斯的多边形数

证明： $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ 是正方形数。

【背景材料】

此题是毕达哥拉斯学派在 2000 多年前用几何方法证明的。毕达哥拉斯(Pythagoras, 公元前 527—前 497), 古希腊最著名的数学家之一, 被称为西方理论数学的创始人。毕达哥拉斯成立了以他为首的, 包括大约 300 名成员的学派, 学派成员的发明创造均属于毕达哥拉斯名下。毕达哥拉斯学派对数论和几何学的研究有巨大贡献。他们在西方首次证明了“勾股定理”, 西方称之为毕达哥拉斯定理; 他们首先发现了无理数, 引起了数学史上所称的第一次数学危机。

毕达哥拉斯学派非常注意数与图形的关系, 他们把数描述为沙滩上的小石子, 按小石所能排列的图形将数进行分类。例如, $1, 3, 6, 10, \cdots$

这些数称为三角形数, 因为它们对应的小石子能排成正三角形(图 1)。

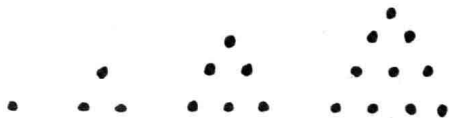


图 1

1, 4, 9, 16, ...

这些数称为正方形数, 因为它们对应的小石子能排成正方形(图 2)。

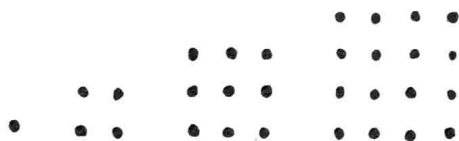


图 2

类似地, 1, 5, 12, 22, ... 称为五边形数(图 3)。

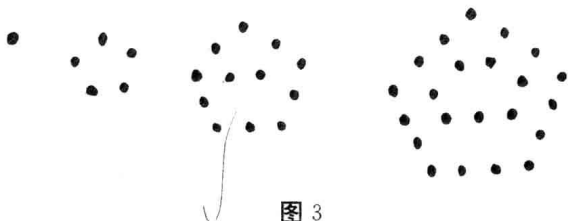
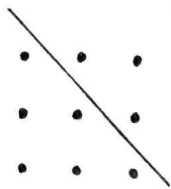


图 3

还有六边形数, 七边形数, 等等。把代表数的点排成几何图形后, 整数的一些性质就变得很明显了。例如在图 2 的第二个图形上画一条斜线(图 4), 就可看出两个相继的三角形数之和是一个正方形数。若

用现代记号来记, 就是 $\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n$



$+1)(n+2) = (n+1)^2$

图 4

毕达哥拉斯学派用多边形表示数的方法, 对后世影响很大。多边形数是西方数学家津津乐道的材料。我国古代数学家对多边形数也有研究。

【解题方法】

毕达哥拉斯学派将 1, 3, 5, 7, ... 这些数(奇数)称为磬折数(gnomon), 因为它们对应的小石子可排成磬折形(图

5)。



图 5

毕达哥拉斯学派从图 6 中看出：

正方形数 1 加上
一个磬折形数 3，得
正方形数 4；4 再加上
下一个磬折形数 5，
得正方形数 9；9 再加
上下一个磬折形数
7，得正方形数 16；
…。用式子表示：

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=4+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=9+7=16=4^2$$

……

一般地，有 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

若读者学过等差数列，此题可用不依赖于图形的代数方法来作。 $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ 是一个公差为 2 的等差数列，共有 n 项。由等差数列的求和公式，得

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2。$$

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 也可用数学归纳法证明，中学数学教材就是这样作的。

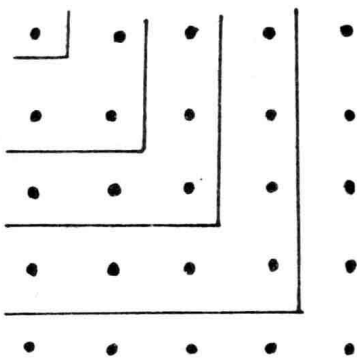


图 6

【引申与推广】

前 n 个连续奇数的和为 n^2 , 那么前 n 个连续奇数的平方和等于什么? 立方和呢? 我们有公式:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1)$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

.....

公式的证明可用第 8 题中介绍的高阶等差数列的求和方法。

2. 尼寇马克的奇数分组

证明:如果把所有正奇数数列加以分组,第一组只有一项,即 1;第二组有两项:3,5;第三组有三项:7,9,11;...,则每一组的各项之和等于该组项数的立方。

【背景材料】

此题出自古希腊学者尼寇马克(Nichomachus,公元 100 年左右)的著作《算书引论》。尼寇马克是毕达哥拉斯学派的传人,但他在《算术引论》中叙述算术和代数问题时,既不依靠几何引出,也不用几何作为逻辑依据。《算术引论》是第一本篇幅可观的完全脱离几何讲法的算术(即数论)书。从历史意义上讲,它对算术的重要性可和欧几里得(Euclid,约公元前 330—前 275)的《几何原本》对于几何的重要性相比。《算术引论》在相当长的时期内被当作标准课本。

【解题方法】

通过直接验证,有:

$$\begin{aligned}1 &= 1^3 \\3 + 5 &= 8 = 2^3 \\7 + 9 + 11 &= 27 = 3^3 \\13 + 15 + 17 + 19 &= 64 = 4^3 \\&\dots\dots\end{aligned}\tag{1}$$

现给予一般的证明。

包含在前 $n-1$ 组中的总项数为

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

因而第 $n-1$ 组中最后一个数等于 $2\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]-1=n(n-1)-1$, 那么第 n 组中第一个数等于 $n(n-1)-1+2=n(n-1)+1=n^2-n+1$, 第 n 组中最后一个数等于 $n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1$ 。因此, 第 n 组各项之和等于 $\frac{n^2-n+1+n^2+n-1}{2} \cdot n=n^3$ 。即为所证。

【引申与推广】

尼寇马克先列出(1), 然后借助于连续奇数和的公式(见第1题), 归纳出立方和公式:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= 1 + (3+5) + (7+9+11) + \cdots + \\ &+ [(n^2-n+1) + (n^2-n+2) + \cdots + (n^2+n-1)] \\ &= 1+3+5+\cdots + \left\{ 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-1 \right\} \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

3. 阿基米德求无穷递缩等比数列之和

求 $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots$ 的和。

【背景材料】

此题是阿基米德在用穷竭法求抛物线弓形面积时提出并解决的。阿基米德(Archimedes, 公元前 287—前 212)被认为是史以来的三个最伟大的数学家之一(另外两位是牛顿与高斯)。他用穷竭法求面积、体积;计算 π (在这过程中他算出了平方根的不足近似值和过剩近似值);用几何方法求出 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ 及 $a + 2a + 3a + \dots + na$;他用“力学方法”计算面积和体积,此方法蕴含着微积分的思想。阿基米德既擅长于开辟新的数学领域,又注意严格论证,还精于巧妙的计算。阿基米德还是力学家、天文学家、发明家。

【解题方法】

使用现代符号叙述阿基米德在《抛物形求积》中给出的解。

求公比为 $\frac{1}{4}$ 的无穷递缩等比数列的和

$$a + b + c + d + \dots, \text{ 由于 } b = \frac{1}{4}a, c = \frac{b}{4}, d = \frac{c}{4}, \dots$$

或 $a = 4b, b = 4c, c = 4d, \dots$

那么 $b + c + d + \dots + \frac{1}{3}(b + c + d + \dots)$