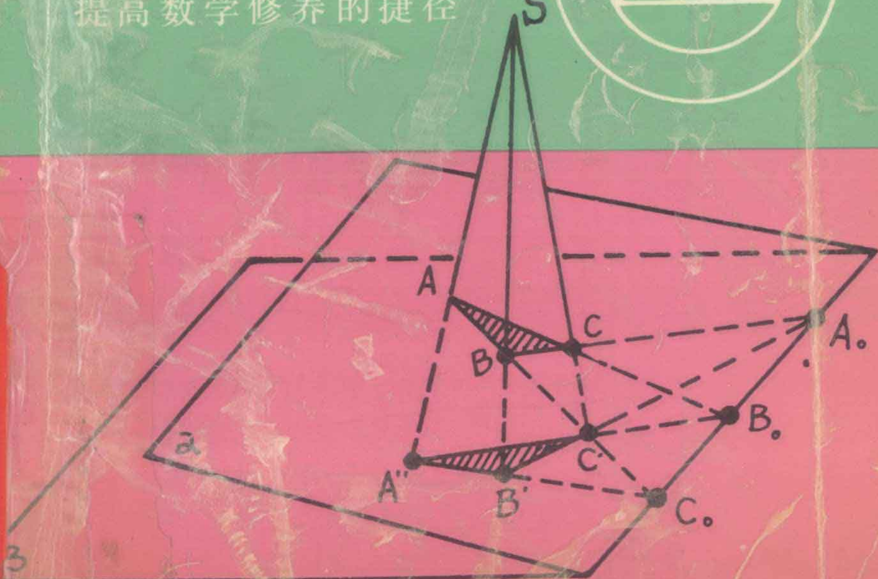
学生课外读物

中外数学名题荟萃

肖 铿 严启平

（高中册）

数学史上的丰碑
解题方法的宝库
数学竞赛试题的摇篮
提高数学修养的捷径

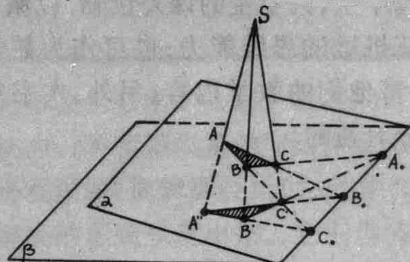


学生课外读物

中外数学名题荟萃

肖 铿 严启平

（高中册）



湖北人民出版社

鄂新登字 01 号

学生课外读物

中外数学名题荟萃（高中册）

肖　铿　严启平　主编

出版：湖北人民出版社
发行：湖北人民出版社

地址：武汉市解放大道新育村 33 号
邮编：430022

印刷：湖北省枝江市新华印刷厂
经销：湖北省新华书店
开本：787 毫米×1092 毫米 1/32
印张：10.625
字数：226 千字
插页：1
版次：1994 年 3 月第 1 版
印次：1997 年 8 月第 2 次印刷
印数：8 121—14 170
定价：11.70 元
书号：ISBN 7-216-01341-7/O·4

前　言

问题与解决是数学的心脏。提出问题并解决问题是数学发展的原动力。不管是埃及的“草片”文书、欧几里得的《几何原本》，还是我国的《周髀算经》、《九章算术》，都是以一个又一个问题及解决的形式呈现出来。它们忠实地记录了人类发现或提出问题，并进而解决问题、推动数学发展的进程。

在数学发展的历史长河中，有的问题曾掀起惊涛巨浪，引发数学危机；有的问题像暗礁险滩，使数代人冥思苦想、望题兴叹；而有的问题则如同晶莹剔透的浪花，其巧妙的构思，优美的解法，使人赏心悦目，拍案叫绝。正是这一个个的问题，激发一代代青年人热爱数学、献身数学、推动了数学的发展。

由于种种原因，今天的数学教材，难以体现出“问题与解决”的韵味，没能提供机会让青少年学生接触丰富的数学遗产。过度的公理化、形式化及解题的模式化，使数学失去了原有的魅力。致使不少青少年学生错误地认为数学只是符号与公式的组合，难以激发他们学习数学的热情和兴趣。

近年来，不少有识之士建议在中小学加强数学史的学习，加强解题教学的研究，这确是针砭时弊的真知灼见。我们不打算详细介绍丰富的数学史料，也不打算探讨系统的解题思想和方法。只想和青少年朋友一起，驾一叶扁舟，在数学发展的历史长河中漫游，或采一片礁石，或掬一朵浪花。兴之所至，或探踪寻源，或荡舟而过。为此，我们选编了近150道初等数学名题呈献在青少年朋友面前。

本书共分两册，一册主要适用于初中及小学，另一册适用于高中。编写中，我们尽量避开高等数学的专门理论，侧重于用初等方法解决问题。并尽可能体现历史的本来面貌。

本书编写中查阅了许多专著和资料，我们向原书的编著者表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，错误和缺点之处难免，敬请指正。

编者

1993年9月于武昌

目　　录

1. 西方数学家津津乐道的话题

——毕达哥拉斯的多边形数

证明：1＋3＋5＋…＋(2n－1)是正方形数。

【背景材料】

此题是毕达哥拉斯学派在 2000 多年前用几何方法证明的。毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 527—前 497)，古希腊最著名的数学家之一，被称为西方理论数学的创始人。毕达哥拉斯成立了以他为首的，包括大约 300 名成员的学派，学派成员的发明创造均属于毕达哥拉斯名下。毕达哥拉斯学派对数论和几何学的研究有巨大贡献。他们在西方首次证明了“勾股定理”，西方称之为毕达哥拉斯定理；他们首先发现了无理数，引起了数学史上所称的第一次数学危机。

毕达哥拉斯学派非常注意数与图形的关系，他们把数描述为沙滩上的小石子，按小石所能排列的图形将数进行分类。例如，1，3，6，10，…这些数称为三角形数，因为它们对应的小石子能排成正三角形(图 1)。

图 1

1,4,9,16,…

这些数称为正方形数,因为它们对应的小石子能排成正方形(图 2)。

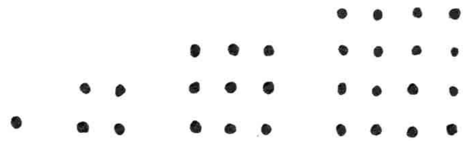


图 2

类似地,1,5,12,22,…称为五边形数(图 3)。

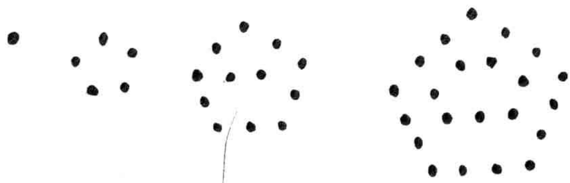


图 3

还有六边形数,七边形数,等等。把代表数的点排成几何图形后,整数的一些性质就变得很明显了。例如在图 2 的第二个图形上画一条斜线(图 4),就可看出两个相继的三角形数之和是一个正方形数。若用现代记号来记,就是$\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=(n+1)^2$

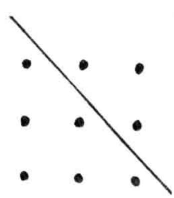


图 4

毕达哥拉斯学派用多边形表示数的方法,对后世影响很大。多边形数是西方数学家津津乐道的材料。我国古代数学家对多边形数也有研究。

【解题方法】

毕达哥拉斯学派将 1,3,5,7,…这些数(奇数)称为磬折形数(gnomon),因为它们对应的小石子可排成磬折形(图

5)。

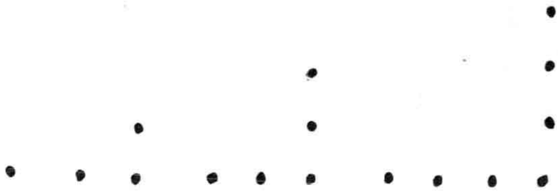


图 5

毕达哥拉斯学派从图 6 中看出：

正方形数 1 加上一个磬折形数 3，得正方形数 4；4 再加上下一个磬折形数 5，得正方形数 9；9 再加上下一个磬折形数 7，得正方形数 16；…。用式子表示：

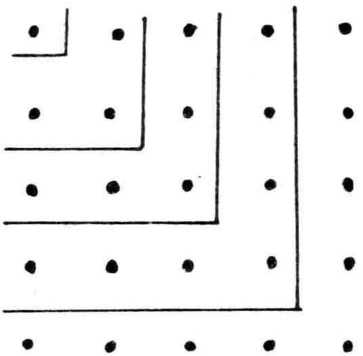


图 6

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=4+5=9=3^2$

$1+3+5+7=9+7=16=4^2$

……

一般地，有 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

若读者学过等差数列，此题可用不依赖于图形的代数方法来作。1，3，5，…，2n－1 是一个公差为 2 的等差数列，共有 n 项。由等差数列的求和公式，得

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2。$$

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 也可用数学归纳法证明，中学数学教材就是这样作的。

【引申与推广】

前 n 个连续奇数的和为 n^2，那么前 n 个连续奇数的平方和等于什么？立方和呢？我们有公式：

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

……

公式的证明可用第 8 题中介绍的高阶等差数列的求和方法。

2. 尼寇马克的奇数分组

证明：如果把所有正奇数数列加以分组，第一组只有一项，即 1；第二组有两项：3，5；第三组有三项：7，9，11；…，则每一组的各项之和等于该组项数的立方。

【背景材料】

此题出自古希腊学者尼寇马克（Nichomachus，公元 100 年左右）的著作《算书引论》。尼寇马克是毕达哥拉斯学派的传人，但他在《算术引论》中叙述算术和代数问题时，既不依靠几何引出，也不用几何作为逻辑依据。《算术引论》是第一本篇幅可观的完全脱离几何讲法的算术（即数论）书。从历史意义上讲，它对算术的重要性可和欧几里得（Euelid，约公元前 330—前 275）的《几何原本》对于几何的重要性相比。《算术引论》在相当长的时期内被当作标准课本。

【解题方法】

通过直接验证，有：

$$
\begin{aligned}
&1=1^3\\
&3+5=8=2^3\\
&7+9+11=27=3^3\\
&13+15+17+19=64=4^3\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

现给予一般的证明。

包含在前 $n-1$ 组中的总项数为

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

因而第 $n-1$ 组中最后一个数等于 $2\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]-1=n(n-1)-1$，那么第 n 组中第一个数等于 $n(n-1)-1+2=n(n-1)+1=n^2-n+1$，第 n 组中最后一个数等于 $n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1$。因此，第 n 组各项之和等于 $\frac{n^2-n+1+n^2+n-1}{2}\cdot n=n^3$。即为所证。

【引申与推广】

尼寇马克先列出(1)，然后借助于连续奇数和的公式(见第 1 题)，归纳出立方和公式：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3=1+(3+5)+(7+9+11)+\cdots+\left[(n^2-n+1)+(n^2-n+2)+\cdots+(n^2+n-1)\right]$$

$$=1+3+5+\cdots+\left\{2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-1\right\}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

3. 阿基米德求无穷递缩等比数列之和

求 $1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\cdots$的和。

【背景材料】

此题是阿基米德在用穷竭法求抛物线弓形面积时提出并解决的。阿基米德(Archimedes，公元前 287—前 212)被认为是有史以来的三个最伟大的数学家之一(另外两位是牛顿与高斯)。他用穷竭法求面积、体积；计算 π(在这过程中他算出了平方根的不足近似值和过剩近似值)；用几何方法求出 $1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2$ 及 $a+2a+3a+\cdots+na$；他用“力学方法”计算面积和体积，此方法蕴含着微积分的思想。阿基米德既擅长于开辟新的数学领域，又注意严格论证，还精于巧妙的计算。阿基米德还是力学家、天文学家、发明家。

【解题方法】

使用现代符号叙述阿基米德在《抛物形求积》中给出的解。

求公比为$\frac{1}{4}$的无穷递缩等比数列的和

$a+b+c+d+\cdots$，由于 $b=\frac{1}{4}a, c=\frac{b}{4}, d=\frac{c}{4}, \cdots$

或 $a=4b, b=4c, c=4d, \cdots$

那么 $b+c+d+\cdots+\frac{1}{3}(b+c+d+\cdots)$