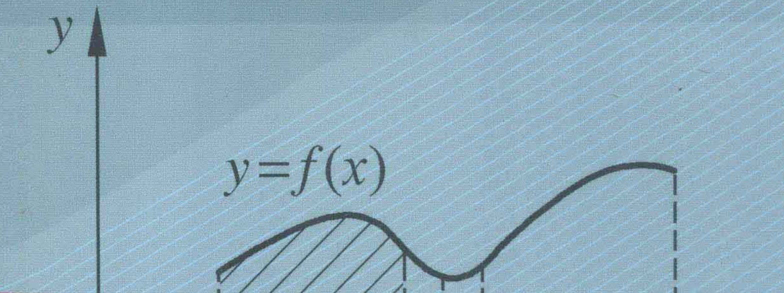
· 知识要点
· 答疑解惑
· 经典例题
· 习题全解

高等数学
同步学习指导（上册）

河北科技大学理学院数学系 编



清华大学出版社

高等数学
同步学习指导（上册）

河北科技大学理学院数学系　编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书与河北科技大学理学院数学系编写的《高等数学（上册）》（高等教育出版社，2012）配套使用，依照原教材的章、节顺序编排. 每章分为基本要求、答疑解惑、经典例题解析、习题全解四个部分，章末包含总复习和综合练习，书末附有三套本校期末试卷.

本书适用于应用型本科高等院校，也可供独立学院、成教学院理工科各专业学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习指导. 上/河北科技大学理学院数学系编. --北京：清华大学出版社，2013

ISBN 978-7-302-33160-5

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①河…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159114 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：13　　**字　　数**：310 千字
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：23.00 元

产品编号：054494-01

前　言

本书是与河北科技大学理学院数学系编写的《高等数学（上、下册）》（高等教育出版社，2012）相配套的学习指导教材，按照教育部颁发的本科非数学专业《高等数学课程教学基本要求》编写而成，遵循了主教材“以应用为目的，以够用为尺度”的原则，目的是帮助学生解决在学习高等数学课程时遇到的内容多、速度快、题量大、概念抽象、方法庞杂、学习效率低等问题.

全书分为上、下两册，上册内容包括一元函数微积分学和常微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学和级数. 为了学生使用方便，本书按照主教材的章节顺序编写，与教学进度保持同步.

每章内容结构安排如下：

基本要求　包括知识要点及需要掌握的程度.

答疑解惑　针对学生容易产生的疑惑给出详细解答，以澄清概念，理清思路.

经典例题解析　选择一些典型例题，通过分析给出详细解答过程. 通常在每组例题之后以“注”的形式概括了有关的知识点，帮助学生总结提炼数学方法.

习题全解　对主教材中每节的所有习题给出了详细解答，为学生检验学习效果提供参考.

总复习　每章后设有总复习，包括本章重点及难点解析和方法总结. 同时提供综合练习题，检验学生综合运用知识的能力.

每册书末附有三套往届期末考试试卷及参考答案，便于学生检测整体学习效果.上册书末附有常用公式和曲线；下册书末附有三套河北科技大学数学竞赛试卷及参考答案，供有兴趣的同学参考.

参加本书编写工作的有纪玉德（第 1 章），王菊芳（第 2 章），李海萍（第 3 章），禹长龙（第 4 章），张金星（第 5 章），王琦（第 6 章），孙宗剑（第 7 章），董丽霞（第 8 章），左春艳（第 9 章），李占稳（第 10 章），杨英（第 11 章）. 刘秀君和李秀敏编写了第 1 章至第 11 章的总复习. 期末考试试卷和数学竞赛试卷由刘秀君提供. 上册由刘秀君审校、定稿，下册由李秀敏审校、定稿。

由于编者水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 5 月

目　　录

第1章　函数　极限　连续

1.1　函数

1.1.1　基本要求

1. 掌握一元函数的概念.
2. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.
3. 掌握初等函数的概念.
4. 了解函数的四个特性.
5. 会建立简单实际问题的函数关系.

1.1.2　答疑解惑

1. 两个单调增加(或减少)的函数之积一定是单调增加(或减少)的吗？

解答　不一定. 如 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}, g(x)=-\mathrm{e}^{-x}$ 皆为单调增加的函数，而 $f(x)\cdot g(x)=-\mathrm{e}^{x}$ 却是单调减少的函数.

2. 周期函数是否一定有最小正周期？

解答　否. 例如函数 $f(x)=C$（C 为常数），对于任意的实数 T，都有 $f(x+T)=f(x)=C$，所以它是周期函数，但实数中没有最小正数，因此周期函数 $f(x)=C$ 没有最小正周期. 再如狄利克雷函数是周期函数，但没有最小正周期.

3. 复合函数 $y=f[g(x)]$ 与函数 $u=g(x)$ 的定义域是否相同？

解答　一般来说不相同，因为 $y=f[g(x)]$ 要求 $u=g(x)$ 的值域落在 $y=f(u)$ 的定义域内，而 $u=g(x)$ 的值域可能超出 $y=f(u)$ 的定义域. 所以复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域通常是函数 $u=g(x)$ 定义域的真子集.

例如 $y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=x^2$ 的定义域分别是 $[-1,1]$ 与 $(-\infty,+\infty)$，复合函数

$$y=f[g(x)]=\arcsin x^2$$

的定义域应满足 $-1\leqslant x^2\leqslant 1$，即 $|x|\leqslant 1$，亦即 $[-1,1]$ 是 $u=x^2$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的真子集.

4. 初等函数与非初等函数有什么区别？

解答　初等函数是由常数与基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并且能用一个式子表示的函数，否则就是非初等函数. 例如

$$y=\sqrt{x^2-4}，\quad y=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\ \text{及}\ y=\ln x+\frac{\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x}}-1}{x^2}$$

等都是初等函数. $y=x^x\,(x>0)$也是初等函数，因为它是由 $y=\mathrm{e}^u$ 与 $u=x\ln x$ 复合而成的. $y=|x|\left(=\sqrt{x^2}\right)$同样是初等函数，因为它是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2$ 复合而成的. 而 Dirichlet(狄利克雷)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

是非初等函数.

1.1.3 经典例题解析

例 1 求函数 $y=4\sqrt{3x+2}+3\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域.

解 因为 $3x+2\geqslant 0$ 且 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$，所以 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 3$，即函数 $y=4\sqrt{3x+2}+3\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},3\right]$.

例 2 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & -\infty<x<-1,\\ \sqrt{1+x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的定义域及 $f(-2)$，$f(1)$.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$. 因为 $-\infty<-2<-1$，所以 $f(-2)=\dfrac{1}{1+(-2)}=-1$，又因为 $0<1<+\infty$，所以 $f(1)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

注 通常讨论的定义域是指自然定义域(即使函数表达式有意义的 x 的全体值)，求函数的自然定义域有下列原则：

（1）分式的分母部分不能为零；（2）偶次根式的被开方数不能为负数；（3）对数的真数不能为零或负数；（4）$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$；（5）$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；（6）$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$；（7）若函数的表达式由几项组成，则按以上原则可得自变量所满足的不等式组，求解不等式组即可得函数的定义域；（8）分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例 3 判断函数 $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$ 的奇偶性.

解 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}+\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^x}\\&=\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

注 判断函数的奇偶性除了利用奇、偶函数的定义直接判断外，有时也可以利用奇、偶函数的运算性质判断：

（1）偶函数的和与差仍为偶函数，奇函数的和与差仍为奇函数.

如 $f(x)=x^2-\cos x$ 为偶函数，$g(x)=x+\sin x$ 为奇函数.

（2）两个奇（或偶）函数的积（或商）为偶函数.

如 $f(x)=x^3\cdot\arcsin x$， $g(x)=\mathrm{e}^{x^2}\cdot\cos x$ 均为偶函数.

（3）奇函数与偶函数的积（或商）为奇函数.

如 $f(x)=\sin x\cdot\cos x$， $g(x)=x^2\cdot\arctan x$ 均为奇函数.

（4） $f(x)+f(-x)=0$ 也是判断函数 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

（5）函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇函数或偶函数.

例 4 求函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

解 由直接函数 $y=10^{x+1}$ 解得 $x=\lg y-1$，将 x 与 y 互换位置，得反函数 $y=\lg x-1$.

例 5 求函数 $y=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -(x^2+1), & x<0\end{cases}$ 的反函数.

解 因为当 $x>0$ 时，$y=\mathrm{e}^x$，所以 $y>1$，$x=\ln y$；当 $x=0$ 时，$y=0$；因为当 $x<0$ 时，$y=-(x^2+1)$，所以 $y<-1$， $x=-\sqrt{-(y+1)}$. 将 x 与 y 互换位置，得反函数

$$y=\begin{cases}\ln x, & x>1,\\ 0, & x=0,\\ -\sqrt{-(x+1)}, & x<-1.\end{cases}$$

注 已知直接函数，求反函数可分为两种情况：

（1）一般先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，然后再将所得的结果中的 x 与 y 互换位置即可；

（2）对于分段函数，只要分段求出对应的反函数即可.

例 6 已知 $f(\ln x)=x^2(1+\ln x)(x>0)$，求 $f(x)$.

解 令 $u=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^u$，代入原式有 $f(u)=\mathrm{e}^{2u}(1+u)$，故所求函数为 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}(1+x)$.

例 7 设 $f(x)=x^3$， $g(x)=2^x$，求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^3=\left(2^x\right)^3=2^{3x}$， $g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^3}$.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 （1） $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1,\end{cases}$ 现需求出满足 $|g(x)|\leqslant 1$(或 $|g(x)|>1$)的 x 的范围. 如图 1-1 所示.

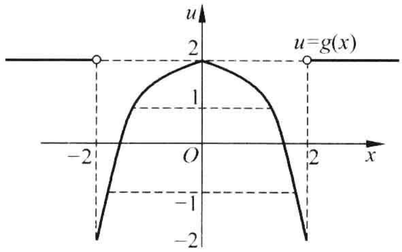


图 1-1

由于当 $|x|>2$ 时， $g(x)=2>1$，故仅当 $|x|\leqslant 2$ 时，才可能有 $|g(x)|\leqslant 1$. 而欲使 $|g(x)|\leqslant 1$，必须且只需 $|x|\leqslant 2$， $|2-x^2|\leqslant 1$，由此解得 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$. 于是有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<1\text{或}|x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

（2）$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 2,\\ 2, & |f(x)|>2.\end{cases}$ 由 $f(x)$ 的定义知，对任何 x 有 $|f(x)|\leqslant 1<2$，如图 1-2 所示，故有

$$g[f(x)]=2-[f(x)]^2=\begin{cases}2-1^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2-0, & |x|>1,\end{cases} \text{即}\ g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

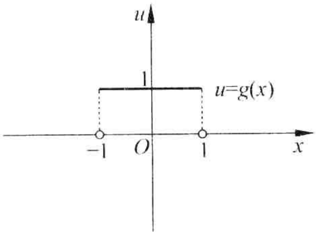


图　1-2

注　如果已知函数的表达式，只需将定义域内的某点数值代入函数表达式中，就可以求得函数在该点的函数值．求函数的表达式常有两种情况：

（1）已知复合函数 $f[g(x)]$ 的表达式，求函数 $f(x)$ 的表达式；

（2）已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式，求复合函数 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 的表达式．

求初等函数的复合函数一般可用代入法，即将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替．

求分段函数的复合函数一般可用分析法和图示法．分析法是抓住外层函数定义域各区间段，结合中间变量的表达式及其定义域进行分析，从而得到复合函数的方法．图示法就是借助图形的直观性，将函数进行复合的方法，其一般步骤如下：

（1）先找出外层函数 $y=f(u)$，其中 $u=g(x)$ 为中间变量，然后画出 $u=g(x)$ 的图形；

（2）外层函数 $y=f(u)$ 的分界点 $u=a$ 在图形中标出来（$u=a$ 是平行于 x 轴的直线）；

（3）写出 u 在不同区间段上 x 所对应的区间；

（4）将上述所得结果代入 $y=f(u)$ 中，得 $y=f[g(x)]$ 的表达式及相应的 x 的变化区间．

1.1.4　习题全解

1．求下列各函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\ln\sin x$；

（3）$y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$；（4）$y=f(x-1)+f(x+1)$，已知 $f(u)$ 的定义域为 $(0,3)$．

解　（1）因为 $1-x^2\neq 0$ 且 $x+2\geqslant 0$，所以 $x\neq\pm 1$ 且 $x\geqslant -2$，即函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$．

（2）因为 $16-x^2>0$ 且 $\sin x>0$，所以 $-4<x<4$ 且 $2k\pi<x<(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}$，即函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\ln\sin x$ 的定义域为 $(-4,-\pi)\cup(0,\pi)$．

（3）因为 $5-x>0$ 且 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{6}\leqslant 1$，所以 $x<5$ 且 $-5\leqslant x\leqslant 7$，即函数 $y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$ 的定义域为 $[-5,5)$．

（4）因为 $0<x-1<3$ 且 $0<x+1<3$，所以 $1<x<4$ 且 $-1<x<2$，即函数 $y=f(x-1)+$

$f(x+1)$的定义域为$(1,2)$.

2. 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x+1)$的表达式.

解 因为$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，令$u=x+\dfrac{1}{x}$，于是$f(u)=u^2-2$，所以$f(x+1)=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$.

3. 已知$2f(x)+f(1-x)=x^2$，求$f(x)$的表达式.

解 因为$2f(x)+f(1-x)=x^2$，$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$，所以$f(x)=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$.

4. 下列各对函数是否是同一个函数？

（1） $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；（2） $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$；

（3） $y=\dfrac{1}{x-1}$ 与 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$；（4） $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$.

解 （1） $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$的对应法则不同，故不是同一个函数.

（2） $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$的定义域相同且对应法则也相同，故是同一个函数.

（3） $y=\dfrac{1}{x-1}$的定义域为$x\neq 1$，而$y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$的定义域为$x\neq\pm 1$，故不是同一个函数.

（4） $y=\sqrt{x(x-1)}$的定义域为$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，而$y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$的定义域为$[1,+\infty)$，故不是同一个函数.

5. 指出下列各函数的奇偶性：

（1） $f(x)=x^2\cos x$；（2） $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}$；

（3） $f(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$；（4） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 （1）因为$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；

（2）因为$f(-x)=\dfrac{1-\cos(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；

（3）因为$f(-x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(-x)})=-\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数；

（4）因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以$f(x)$为奇函数.

6. 用基本初等函数及四则运算表示下列各函数的复合关系：

（1） $y=\sin\sqrt{1+x^2}$；（2） $y=\arctan[1+\ln(1+x^2)]$；

（3） $y=\mathrm{e}^{\sin^3 x}$；（4） $y=x^{\sin x}(x>0)$.

解　(1) $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x^2$；

(2) $y=\arctan u$，$u=1+v$，$v=\ln w$，$w=1+x^2$；

(3) $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^3$，$v=\sin x$；

(4) $y=\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$，$y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin x\ln x$.

7. 设 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f[\varphi(x)]$ 与 $\varphi[f(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\sin^3 2x-\sin 2x$，$\varphi[f(x)]=\sin 2\left(x^3-x\right)$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, |x|\leqslant \dfrac{\pi}{3}, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad |x|>\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), f(0)$ 和 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，并作出 $f(x)$ 的图形.

解　$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f(0)=|\sin 0|=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$. 如图 1-3 所示.

9. 某市的出租车按下列办法收费：路程在 3km 内(包括 3km)一律收费 10 元；路程在 3km 到 10km(包括 10km)之间的，超过 3km 的部分每公里加收 2 元；路程超过 10km 的，超过 10km 的部分每公里加收 3 元. 设 x 为乘车路程，y 为出租车费，试建立 y 与 x 之间的函数关系 $y=f(x)$，并画出函数的图形.

解　当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=10$；当 $3<x\leqslant 10$ 时，$y=10+2(x-3)=2x+4$；当 $10<x$ 时，$y=10+2(10-3)+3(x-10)=3x-6$. 因此 $y=f(x)=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3, \\ 2x+4, & 3<x\leqslant 10, \\ 3x-6, & 10<x.\end{cases}$ 如图 1-4 所示.

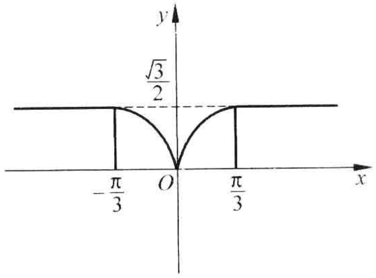


图　1-3

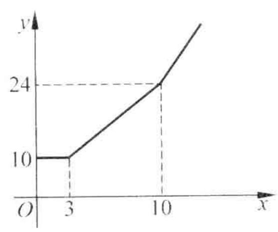


图　1-4

1.2　极限的概念

1.2.1　基本要求

1. 理解数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的概念.

2. 理解函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的概念,了解其几何意义.

3. 理解函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的概念,了解左右极限与极限之间的关系，了解它们的几何意义.

4. 了解极限的性质和数列极限与函数极限之间的关系.

5. 会求曲线的水平渐近线.

1.2.2 答疑解惑

1. 若n越大，$|x_n-a|$越小，则数列$\{x_n\}$必然以a为极限吗？

解答 不是．随着n增大，$|x_n-a|$越来越小并不意味着$|x_n-a|$一定趋向于零．例如$x_n=\frac{1}{n}$，$a=-1$，$|x_n-a|=\left|\frac{1}{n}+1\right|=1+\frac{1}{n}$．虽然$n$越大，$1+\frac{1}{n}$越小，但数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$并不以$-1$为极限。

2. 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$是否同敛散？

解答 若$\{x_n\}$收敛，则$\{|x_n|\}$一定收敛；反之，若$\{|x_n|\}$收敛，则$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散．例如，$\{|(-1)^n|\}$是收敛的，但$\{(-1)^n\}$却发散．如果$\{x_n\}$恒正或恒负，则$\{x_n\}$与$\{|x_n|\}$同敛散．此外如果$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．

3. 若$f(x)>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，问：能否保证有$A>0$的结论？试举例说明．

解答 不能保证．例如$f(x)=\frac{1}{x}$，对任意的$x>0$，都有$f(x)=\frac{1}{x}>0$，但是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=A=0.$$

1.2.3 经典例题解析

例 1 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 2,\\ 2x+1, & x<2,\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)$，并由此判断$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$是否存在．

解 因为$\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(2x+1)=5$，$\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(x^2+1)=5$，左、右极限都存在且相等，所以$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$．

例 2 设函数$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\ x+4, & x<1,\end{cases}$求$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$，问$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在．

解 因为$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+4)=5$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(2x-1)=1$，左、右极限都存在，但不相等，所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在．

注 考察分段函数在分段点处的极限时，须求函数的左右极限，只有当左右极限都存在且相等时极限才存在，且等于左、右极限．

例 3 函数$f(x)=\frac{1+x^3}{2x^3}$的图形的水平渐近线是（　　）．

（A）$y=0$　　（B）$y=-\frac{1}{2}$　　（C）$y=\frac{1}{2}$　　（D）$y=1$

解 选项（C）正确．因为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$，所以$f(x)=\frac{1+x^3}{2x^3}$的图形的水平渐近线是$y=\frac{1}{2}$．

例 4　函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义是 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限的（　　）.

（A）必要条件　　（B）充分条件　　（C）充要条件　　（D）无关条件

解　选项（D）正确.

1.2.4　习题全解

1. 填空题：

（1）数列 $\{x_n\}$ 有界是它收敛的________条件；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=$________；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{4^n}=$________；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{n}}=$________.

解　（1）应填必要但不充分.

（2）应填1．因为当 n 无限增大时，$\dfrac{1}{n^2}$ 无限逼近于0，所以 $x_n=1-\dfrac{1}{n^2}$ 无限逼近于1，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=1$.

（3）应填0．因为当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{3^n}{4^n}$ 无限逼近于0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{4^n}=0$.

（4）应填0．因为当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ 无限逼近于0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{n}}=0$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ x, & -1<x<1,\end{cases}$ 试讨论 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 的值是否存在.

解　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$；因为 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$，左、右极限都存在，但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在；$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$ 问 a,b 分别取何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\mathrm{e}^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(ax+b)=b$，要使 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，需 $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$，即 $b=1$，所以 a 可为任意数，$b=1$.

1.3　无穷小与无穷大

1.3.1　基本要求

1. 了解无穷小和无穷大的概念及其之间的关系.
2. 了解无穷小的性质.
3. 会求曲线的铅直渐近线.