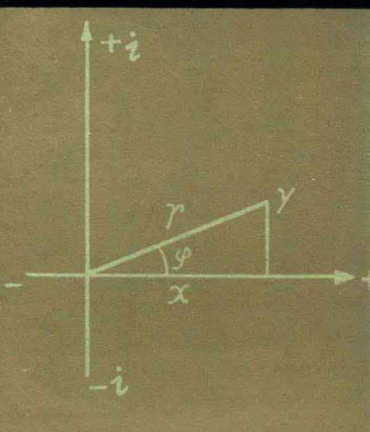
中学教师参考读物

USHUJIQI YINGYONG

复数及其应用



中学教师参考读物

复数及其应用

王志良 编

吉林人民出版社

中学教师参考读物

复数及其应用

王志良 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市第五印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4 5/8印张 95,000字

1980年10月第1版 1980年10月第1次印刷

印数：1—3,730册

书号：7091·1161 定价：0.35元

目 录

第一章　预备知识——向量

第一节　向量的基本概念

一　向量的基本概念

河水从西向东流时，流速为每小时 2 公里，船在静水中速度为 5 公里/每小时，船以这样大小的速度朝正北渡河。日常生活中经验告诉我们，这只渡船的实际航行方向是北偏东，它的速度的大小也并不是简单的加法 5＋2（为什么？）。

图　1—1

实际航行速度应该是流速和船速的合成。但是，速度这种量从中学物理中知道，它是既有方向又有大小的一种量，如果仅仅考虑它的大小就不足以反映这种量的本质。实际上，这种量的合成也具有不同于数的特殊规律，不能简单照搬数的加法。

我们称既有大小，又有方向的量为**向量**（或称**矢量**）．向量是实际中常见的一种量。例如：速度，位移，力，加速度……等都是由大小和方向才能表达清楚的量，它们都是向量。为了与向量相区别，只有大小（或数值），没有方向的

量，则称为标量。例如：质量，体积，温度，时间……等都是标量。

二　向量的表示法

向量怎样表示呢？为了形象地表现出向量的大小和方向这两个侧面，用一个具有方向的线段（简称有向线段）来表示向量。如图1—2所示。

用A为起点，B为终点，具有方向的线段来表示向量，并记作$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$。

这条线段的长度表示向量的大小，用箭头从A指向B表示向量的方向。

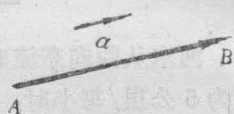


图 1—2

三　模

向量$\overrightarrow{AB}$（或$\vec{a}$）的大小即有向线段的长度，叫做向量$\overrightarrow{AB}$（或$\vec{a}$）的模，记作$|\overrightarrow{AB}|$或$|\vec{a}|$。向量的模是一个非负的数。

四　向量相等

两个向量怎样才算相等呢？例如，两个力大小相等，方向相同，那末我们就说这两个力是相等的。

为此，在数学上规定。凡是模相等并且方向相同的向量是彼此相等的。如图1--3所示。

两个向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$，模相等，方

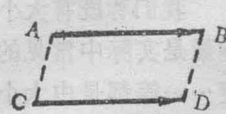


图 1—3

方向相同（ABDC 是▱），因此$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。在这种规定下，一个向量经过平行移动，得到的向量，可以认为是同一个向量。因此叫做**自由向量**。

两个向量只是模相等，这两个量不一定相等如图1—4所示。$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$\vec{a}\neq\vec{b}$，和$\vec{a}$模相等、方向相反的向量叫做$\vec{a}$的**反向量**，并记作$-\vec{a}$。

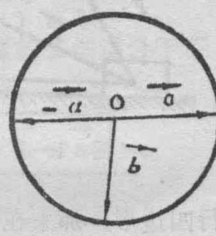


图 1—4

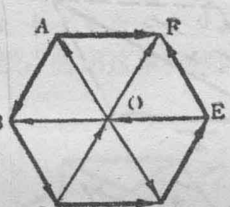


图 1—5

练 习 1

1．$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$相等吗？它们有什么关系？

2．$-\vec{a}$的反向量$-(-\vec{a})=$？

3．如图1—5中，ABCDEF 为正六边形，O是它的中心，说明图中哪些向量是相等的？哪些互为反向量？

第二节　向量的基本运算

向量的运算规则是从实际中抽象出来的。

一　向量的加减法

1．二向量的和　有二力$\vec{F}^{2}{}_{1}$和$\vec{F}^{2}{}_{2}$同时作用于一个物体，它的效果和力$\vec{F}$相当，我们称$\vec{F}$为$\vec{F}^{2}{}_{1}$和$\vec{F}^{2}{}_{2}$的合力，而$\vec{F}^{2}{}_{1}$和$\vec{F}_{2}$为$\vec{F}$的分力。由实验确定，$\vec{F}^{2}$的方向是以$\vec{F}^{2}{}_{1}$、$\vec{F}^{2}{}_{2}$为邻边组成的平行四边形对角线的方向，$\vec{F}^{2}$的大小等

于这条对角线的长，如图 1—6 所示。

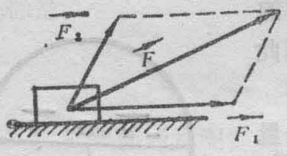


图 1—6

从实际向量合成的规律可以抽象出向量加法的规则如下：

规律　设有两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点放在一起，分别以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形，那末在这个平行四边形中，和 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 同起点的对角线向量，就是 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的和，并记作 $\vec{a}+\vec{b}$，如图 1—7 所

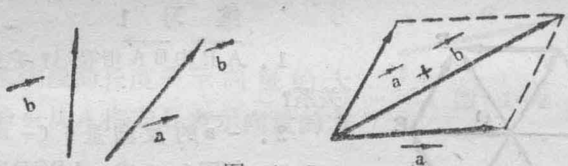


图 1—7

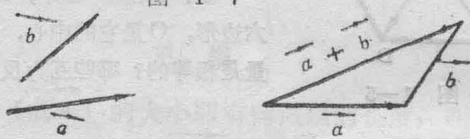


图 1—8

示。象这样求和的规则叫做加法的平行四边形规则。

求两个向量的和还可以用三角形的规则。

规律　在平行四边形中，如果把向量 $\vec{b}$ 的起点平行移动到向量 $\vec{a}$ 的终点，那末以 $\vec{a}$ 的起点为起点，$\vec{b}$ 的终点为终点的向量就是 $\vec{a}+\vec{b}$。所以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 和 $\vec{a}+\vec{b}$ 构成三角形，这种求和的规则叫做加法的三角形规则。

如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 互为反向量，即 $\vec{b}=-\vec{a}$，如图 1—9 所示。那末按三角形规则，向量 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{a})$ 的起点和终点

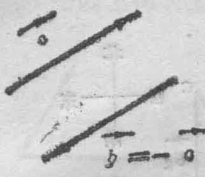


图 1—9

重合，即模为 0。我们把这种模为 0 的向量叫做零向量，并记作 $\vec{0}$。于是就有 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$。

不难验证，向量的加法适合于下列的交换律和结合律：

交换律：$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}}$

结合律：$\boxed{(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}$

向量的加法我们还可以推广到多个向量求和的情形。例如：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$。可以把它们依次首尾相接，形成一条折线，封闭这条折线的向量就是 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$。

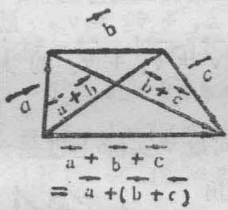


图 1—10

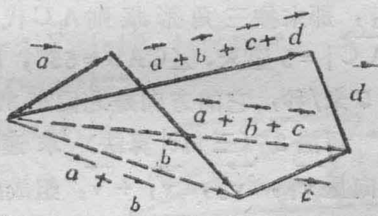


图 1—11

例 1　设江水东流，流速为 $\vec{v}_1$，$|\vec{v}_1|=3$ 米/秒；渡船在静水中向正北的速度为 $\vec{v}_2$，$|\vec{v}_2|=4$ 米/秒，求这时渡船的实际航行速度 $\vec{v}$ 的大小和方向。

研究　本题可用向量图解法和解析法分别解出，希读者掌握解题方法。

解法 1　（图解法）大小为 1 米/秒的速度用 1 厘米长的线段表示如图 1—12 所示。

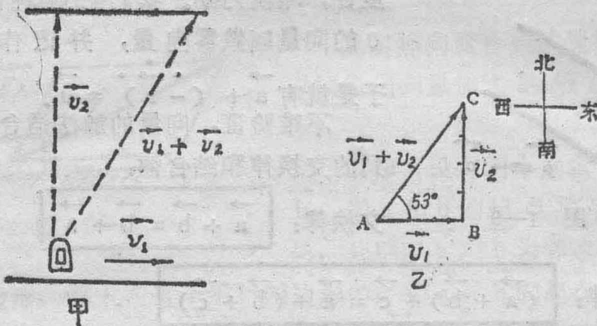


图 1—12

作有向线段$\overrightarrow{AB}$（$|\overrightarrow{AB}|=3$ 厘米）用以代表$\vec{v}_1$，再过B作垂直于AB的有向线段$\overrightarrow{BC}$（$|\overrightarrow{BC}|=4$ 厘米）代表$\vec{v}_2$，那末按三角形规则$\overrightarrow{AC}$代表 $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}$，量得$|\overrightarrow{AC}|=5$ 厘米，$\angle CAB=53°$，因此$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ 的大小是 5 米/秒，它的方向是北偏东 37°.

解法 2（三角计算法）求速度向量 v 实际上就是计算由向量$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，$\vec{v}_1+\vec{v}_2$ 组成的三角形的边长和角，如图 1—13 所示.

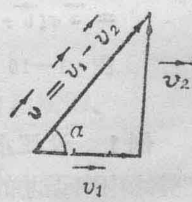


图 1—13

由勾股定理知道：

$$|\vec{v}|^2=|\vec{v}_1|^2+|\vec{v}_2|^2=3^2+4^2$$

$$=9+16=25$$

$\therefore\ |\vec{v}|=5$(米/秒).

又 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{|\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1|}=\dfrac{4}{3}\approx1.3333.$

查表得 $\alpha=53°\ 8'$.

从而得知：v 的大小是 5 米/秒；方向是北偏东 36°52′.

用以上两种解法比较可以看出，三角计算法，即用向量组成的三角形所得出的结果比图解法要精确一些。

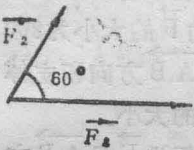


图 1—14

例 2　如图 1—14 所示，作用在一点的二力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$，$|\vec{F}_1| = 5$ 公斤，$|\vec{F}_2| = 3$ 公斤，它们的夹角是 60°，求 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的合力 $\vec{F}$。

解法　作图　$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$，则 $\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$ 和 $\vec{F}$ 组成一个三角形。如图 1—14 和图 1—15 所示。实际上求 $\vec{F}$ 就是要定 $|\vec{F}|$ 和 $\vec{F}$ 的方向（用 $\vec{F}$ 和 $\vec{F}_1$ 的夹角 α 表示）。

解三角形　由余弦定理，

$$|\vec{F}_2|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1|\cdot|\vec{F}_2|\cos 120°$$

$$= 5^2 + 3^2 - 2\times5\times3\times(-\cos 60°)$$

$$= 25 + 9 - 30\times(-0.5) = 49。$$

$\therefore\ |\vec{F}| = \sqrt{49} = 7$（公斤）。

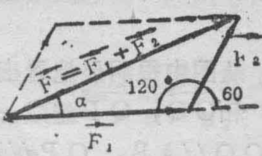


图 1—15

再由正弦定理，

$$\frac{|\vec{F}_2|}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{F}_1|}{\sin 120°}$$

$$\therefore\ \sin\alpha = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|}\cdot\sin 120° = \frac{3}{7}\times\sin(90° + 30°)$$

$$= \frac{3}{7}\times\cos 30° = \frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{7}\times 0.866$$

$$= 0.3711。$$

查表得，$\alpha = 21°47'$。

答：合力$\vec{F}$的大小是 7 公斤，它和$\vec{F}_1$的夹角是 21°47′.

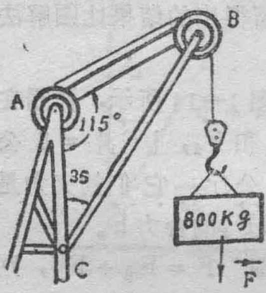


图 1—16

例 3　某吊装设备如图 1—16 所示。设重力$\vec{F}$的大小为800公斤，求沿钢索$\overrightarrow{AB}$方向和支撑$\overrightarrow{BC}$方向的分力的大小。

研究　如果假设$\vec{F}$沿$\overrightarrow{AB}$方向分力为$\vec{F}_1$，沿$\overrightarrow{BC}$方向分力为$\vec{F}_2$，那末$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$．现在已知$\vec{F}$的大小和方向以及$\vec{F}_1$，$\vec{F}_2$的方向，要求$\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$的大小，即求$|\vec{F}_1|$，$|\vec{F}_2|$。

作图　选定一点O作$\overrightarrow{OP}$代表$\vec{F}$，再过O作和AB平行的直线，过P作和BC平行的直线，两条直线的交点为Q如图1—17所示。

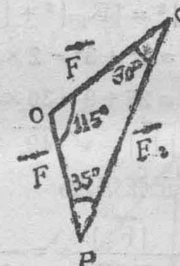


图 1—17

从图中很明显地看出$\overrightarrow{OP}$（代表$\vec{F}$）和$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{QP}$组成一个三角形，且OQ//AB，QP//BC，所以$\overrightarrow{OQ}$代表$\vec{F}$在$\overrightarrow{AB}$方向的分力$\vec{F}_1$，$\overrightarrow{QP}$代表$\vec{F}$在$\overrightarrow{BC}$方向的分力$\vec{F}_2$。

计算　根据三角形规则解三角形．由正弦定理，

$$\frac{|\vec{F}_1|}{\sin 35^\circ}=\frac{|\vec{F}|}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore\ |\vec{F}_1|=\frac{|\vec{F}|}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 35^\circ=\frac{800}{0.5}\times 0.5736=918$$

公斤。 $\dfrac{|\overrightarrow{F_2}|}{\sin115^\circ}=\dfrac{|\overrightarrow{F}|}{\sin30^\circ}$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{F_2}|=\frac{|\overrightarrow{F}|}{\sin30^\circ}\cdot\sin115^\circ$$

$$=\frac{800}{0.5}\times\sin(90^\circ+25^\circ)$$

$$=\frac{800}{0.5}\times\cos25^\circ$$

$$=\frac{800}{0.5}\times0.9063$$

$=1450$（公斤）。

答：重力沿钢索方向分力大小是 918 公斤，

沿支撑方向分力大小是 1450 公斤。

说明　在本例中我们把力 $\overrightarrow{F}$ 分解成分力 $\overrightarrow{F_1}$ 和 $\overrightarrow{F_2}$，这就是所说的力的分解。

2．二向量的差　向量的减法是加法的逆运算。如果 $\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}$，那末称 $\overrightarrow{c}$ 为 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的差，记作 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$。

已知 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 怎样求 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 呢？

如图 1—18 由加法的三角形规则把 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的起点放在

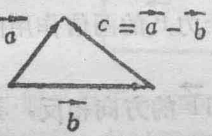


图　1—18

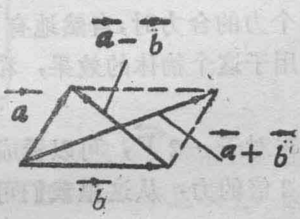


图　1—19

一起，以$\vec{b}$的终点为起点，以$\vec{a}$的终点为终点的向量$\vec{c}$就是$\vec{a}-\vec{b}$。

由此可知，如果以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边作平行四边形如图1—19和$\vec{a}$，$\vec{b}$共起点的对角线为$\vec{a}+\vec{b}$，另一条以$\vec{b}$的终点为起点的对角线即为$\vec{a}-\vec{b}$。

实际上利用反向量，向量的减法都可以化为加法来做，如图1—20、图1—21表明$\vec{a}-\vec{b}$和$\vec{a}+(-\vec{b})$是一样的，

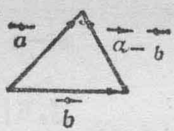


图 1—20

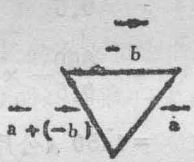


图 1—21

即

规律：$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}$

利用这种矛盾转化，使我们知道，减法也适合于加法的运算定律。

二　数和向量相乘

1．意义　假设一个物体受到两个相等的力$\vec{F}$的作用，求这两个力的合力时，自然地有$\vec{F}+\vec{F}=2\vec{F}$，即两个相等的力$\vec{F}$作用于这个物体的效果，和一个力$\vec{F}$的两倍作用的效果一样。

那末对于$-2\vec{F}$，可以看成是和$\vec{F}$的方向相反，其大小为$\vec{F}$的2倍的力，从这里我们可以理解数和向量相乘的意义。

2．数和向量的积　实数k和向量$\vec{a}$的乘积是一个向量，并记作$k\vec{a}$，那末$k\vec{a}$是怎样来确定？

规定　我们把$k\vec{a}$是这样来确定的：

（1）$k\vec{a}$的模是$\vec{a}$的模的k倍，即

$$\boxed{|k\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|}$$

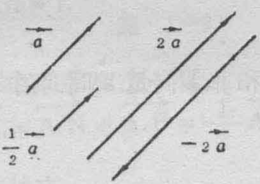


图　1—22

（2）$k\vec{a}$和$\vec{a}$平行，当$k>0$时，$k\vec{a}$和$\vec{a}$同向；当$k<0$时，$k\vec{a}$和$\vec{a}$反向．如图1—22所示的是$2\vec{a}$，$-2\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}$．

由上述规定可知：

$$\boxed{\begin{array}{c} 0\vec{a} = \vec{0} \\ \hline k\vec{0} = \vec{0} \end{array}}$$

同时，1乘任何向量等于这个向量本身；－1乘任何向量等于这个向量的反向量．即

$$\boxed{\begin{array}{c} 1\vec{a} = \vec{a} \\ \hline -1\vec{a} = -\vec{a} \end{array}}$$

任何平行于$\vec{a}$的向量都可以写成$k\vec{a}$的形式，由于互相平行的向量，经过平移，可使它们在一条直线上，因此，也叫做共线的向量．