普通高等教育“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

宋苏罗■主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

宋苏罗 主编

王国欣 连冬艳 宋亮 副主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据普通高等学校本科专业对复变函数与积分变换课程的教学基本要求编写而成的. 内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换及与这些内容相应的数学实验. 书中每节后均配有一定数量的练习题，每章后配有复习题，书末配有习题参考答案，便于学生及时检验、巩固所学的基本概念和基本理论.

本书可供普通高等学校非数学专业的学生使用，也可供自学者和科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/宋苏罗主编. —北京：科学出版社，2013
（普通高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-038028-9

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①宋… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 135977 号

责任编辑：戴 薇 刘文军/ 责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京鑫丰华彩印有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2013 年 8 月第一次印刷 印张：17 1/4
字数：392 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈鑫丰华〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135763-2003

前　言

复变函数与积分变换是高等学校工科多个专业学生的必修课程. 该课程在自然科学和工程技术的许多领域有着广泛的应用. 随着我国本科教育改革的深入，很多地方高校提出了培养复合型应用人才的目标. 为了满足学生多方面的需要，我们结合多年来课程建设的实践，在参考了大量优秀教材、汲取了很多同仁宝贵经验的基础上，编写了本书.

本书在编写过程中突出以下几个特点：

1. 在内容体系上，复函数、复导数、复积分、级数等内容与高等数学中函数、导数、积分、级数等内容遥相呼应. 学生对比学习，既容易接受新知识，又巩固了高等数学知识，可谓事半功倍.

2. 将复变函数与积分变换理论和实际应用问题科学整合，以满足工科专业本科复变函数与积分变换的教学基本要求为基准，淡化定理的推导，强调方法的训练，充分体现以工程实际应用为目的的原则.

3. 本书增加了数学实验内容，为培养学生的动手能力、创新能力、实际操作能力等综合能力搭建了一个很好的平台，更符合现代高等教育的培养目标.

本书由宋苏罗担任主编，并对全书进行统稿. 具体编写分工是：第 1 章和第 9 章由宋苏罗编写；第 2 章、第 3 章、第 4 章由王国欣编写；第 5 章、第 6 章由连冬艳编写；第 7 章、第 8 章由宋亮编写.

本书的编写与出版得到了南阳理工学院领导及数理学院领导的大力支持和帮助，特别是许洪范、朱玉清、郭学军对本书的编写工作提出了很多宝贵意见，在此一并表示衷心感谢！

在编写本书的过程中，参考了许多同行专家、学者的部分成果，在此也表示感谢！

由于编者水平所限，书中疏漏和不足之处在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2013 年 5 月

目　录

第 1 章　复数与复变函数 ………………………………………………………… 1

1.1　复数 ……………………………………………………………………… 1

1.1.1　复数的概念 ………………………………………………………… 1

1.1.2　复数的四则运算 …………………………………………………… 1

1.1.3　复数的表示法 ……………………………………………………… 2

习题 1.1 ……………………………………………………………………… 8

1.2　复数的乘幂与开方 ……………………………………………………… 8

1.2.1　复数的乘幂 ………………………………………………………… 8

1.2.2　复数的开方 ………………………………………………………… 9

习题 1.2 ……………………………………………………………………… 10

1.3　平面点集 ………………………………………………………………… 10

1.3.1　复平面上的点集与区域 …………………………………………… 10

1.3.2　单连通区域与多(复)连通区域 …………………………………… 11

习题 1.3 ……………………………………………………………………… 12

1.4　复变函数 ………………………………………………………………… 13

1.4.1　复变函数的概念 …………………………………………………… 13

1.4.2　复变函数的几何表示 ……………………………………………… 14

1.4.3　反函数与复合函数 ………………………………………………… 15

习题 1.4 ……………………………………………………………………… 15

1.5　复变函数的极限与连续 ………………………………………………… 16

1.5.1　复变函数的极限 …………………………………………………… 16

1.5.2　复变函数的连续性 ………………………………………………… 19

习题 1.5 ……………………………………………………………………… 20

复习题一 ……………………………………………………………………… 21

第 2 章　解析函数 ……………………………………………………………… 24

2.1　复变函数的导数与解析函数的概念 …………………………………… 24

2.1.1　复变函数的导数与微分 …………………………………………… 24

2.1.2　解析函数的概念 …………………………………………………… 27

习题 2.1 ……………………………………………………………………… 28

2.2　复变函数可导与解析的充要条件 ……………………………………… 28

习题 2.2 …… 33
2.3 解析函数与调和函数的关系 …… 33
习题 2.3 …… 37
2.4 初等函数及其解析性 …… 37
2.4.1 指数函数 …… 38
2.4.2 对数函数 …… 39
2.4.3 幂函数 …… 40
2.4.4 三角函数 …… 41
2.4.5 反三角函数 …… 43
2.4.6* 双曲函数与反双曲函数 …… 44
习题 2.4 …… 45
复习题二 …… 45
第 3 章 复变函数的积分 …… 49
3.1 复积分的概念及其基本计算方法 …… 49
3.1.1 复积分的定义 …… 49
3.1.2 复积分的基本性质 …… 50
3.1.3 复积分的存在定理及其基本计算方法 …… 51
习题 3.1 …… 54
3.2 柯西积分定理与不定积分 …… 54
3.2.1 柯西积分定理 …… 54
3.2.2 不定积分 …… 57
习题 3.2 …… 59
3.3 复合闭路定理 …… 59
习题 3.3 …… 61
3.4 柯西积分公式与高阶导数 …… 62
3.4.1 柯西积分公式 …… 62
3.4.2 解析函数的高阶导数 …… 64
3.4.3 柯西不等式与刘维尔(Liouville)定理 …… 66
习题 3.4 …… 67
复习题三 …… 68
第 4 章 级数 …… 71
4.1 复数序列与复数项级数 …… 71
4.1.1 复数序列 …… 71
4.1.2 复数项级数 …… 72
习题 4.1 …… 74

4.2　复变函数项级数 …… 74
4.2.1　复变函数项级数的概念 …… 74
4.2.2　幂级数 …… 75
习题 4.2 …… 79
4.3　解析函数的泰勒展开式 …… 79
习题 4.3 …… 83
4.4　解析函数的洛朗级数 …… 84
4.4.1　洛朗级数 …… 84
4.4.2　解析函数的洛朗展开式 …… 85
习题 4.4 …… 90
复习题四 …… 90
第 5 章　留数及其应用 …… 94
5.1　解析函数的孤立奇点 …… 94
5.1.1　孤立奇点的定义 …… 94
5.1.2　孤立奇点的分类 …… 95
5.1.3*　孤立奇点∞的定义及分类 …… 102
习题 5.1 …… 104
5.2　留数的定义及计算 …… 104
5.2.1　留数的定义 …… 104
5.2.2　留数的计算 …… 106
5.2.3　留数定理及其应用 …… 109
5.2.4*　无穷远点的留数 …… 111
习题 5.2 …… 115
5.3　留数在实变量积分计算中的应用 …… 116
5.3.1　$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 型积分 …… 116
5.3.2　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 型积分 …… 117
5.3.3　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x(a>0)$ 型积分 …… 119
习题 5.3 …… 122
5.4　对数留数与辐角原理 …… 122
5.4.1　对数留数 …… 122
5.4.2　辐角原理 …… 123
5.4.3　儒歇定理 …… 125
习题 5.4 …… 126
复习题五 …… 126

第6章* 保形映射 …… 128
6.1 解析函数导数的几何意义与保形映射的概念 …… 128
6.1.1 解析函数导数的几何意义 …… 128
6.1.2 保形映射的概念 …… 130
习题6.1 …… 130
6.2 分式线性映射及其应用 …… 131
6.2.1 分式线性映射的概念 …… 131
6.2.2 分式线性映射的分解 …… 132
6.2.3 分式线性映射的性质 …… 133
6.2.4 分式线性映射的应用 …… 137
习题6.2 …… 140
6.3 常见初等函数确定的映射 …… 141
6.3.1 幂函数和根式函数所确定的映射 …… 141
6.3.2 指数函数与对数函数所确定的映射 …… 145
习题6.3 …… 146
复习题六 …… 147
第7章 傅里叶变换 …… 149
7.1 傅里叶积分 …… 149
7.1.1 周期函数的傅里叶级数 …… 149
7.1.2 非周期函数的傅里叶积分公式 …… 150
习题7.1 …… 151
7.2 傅里叶变换的定义及性质 …… 152
7.2.1 傅里叶变换的定义 …… 152
7.2.2 傅里叶变换的性质 …… 155
习题7.2 …… 167
7.3 δ函数及其傅里叶变换 …… 168
7.3.1 δ函数的定义 …… 168
7.3.2 δ函数的性质 …… 170
7.3.3 δ函数的傅里叶变换 …… 173
习题7.3 …… 175
复习题七 …… 175
第8章 拉普拉斯变换 …… 177
8.1 拉普拉斯变换的概念 …… 177
8.1.1 问题的提出 …… 177

8.1.2　拉普拉斯变换的定义 …… 178
8.1.3　拉普拉斯变换的存在定理 …… 179
8.1.4　周期函数的拉普拉斯变换 …… 181
8.1.5　单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换 …… 182
习题 8.1 …… 183
8.2　拉普拉斯逆变换 …… 184
习题 8.2 …… 187
8.3　拉普拉斯变换的性质 …… 188
习题 8.3 …… 200
8.4　拉普拉斯变换的应用 …… 202
8.4.1　解线性微分方程和积分方程 …… 202
8.4.2*　解具有特殊扰动函数的微分方程 …… 209
习题 8.4 …… 211
复习题八 …… 212

第 9 章*　数学实验 …… 214

实验 1　复变函数的微积分 …… 214
实验 2　留数的基本运算与闭曲线上的积分 …… 225
实验 3　傅里叶变换和拉普拉斯变换 …… 228

参考答案 …… 234

附录 1　区域变换表 …… 253

附录 2　傅里叶变换简表 …… 257

附录 3　拉普拉斯变换简表 …… 261

主要参考文献 …… 265

第 1 章　复数与复变函数

高等数学中所研究的函数为实变函数，即自变量为实数的函数. 本书中所研究的函数为复变函数，即自变量和因变量均可为复数的函数. 本章首先在中学原有的复数知识基础上对复数的概念和基本运算做简要复习，并由此引出复变函数的概念，然后介绍复平面上点集和区域、复变函数的极限和连续等概念，为进一步研究解析函数的理论和方法奠定必要的基础.

1.1 复　数

1.1.1　复数的概念

复数的概念来源于解代数方程. 例如，方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解，所以引进了虚数单位 i，并令 $i^2=-1$，则 i 是方程 $x^2+1=0$ 的解，数的范围也因此得以扩充. 关于复数的基本概念做以下约定.

形如 $z=x+iy$ 的表达式称为**复数**. 其中，x, y 为两个任意实数，分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$；i 称为**虚数单位**，满足 $i^2=-1$.

当 $x=0, y\neq 0$ 时，$z=iy$ 称为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，则 $z=x$ 为实数，因此实数都是复数，是复数的特殊情形. 全体复数构成的集合称为**复数集**，常用 **C** 表示.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时称其**相等**，记作 $z_1=z_2$. 称复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 互为**共轭复数**. 若记 $z=x+iy$，则其共轭复数记作 $\bar{z}=x-iy$. 特别地，实数的共轭复数是它本身.

注意：一般情况下，两个复数是不能比较大小的.

1.1.2　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$ 是任意两个复数，则 z_1 和 z_2 的和、差与乘积定义如下：

(1) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$；

(2) $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$；

(3) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$；

(4) $z_1-z_1=0$，$z_1+\bar{z}_1=2x_1$，$z_1\bar{z}_1=x_1^2+y_1^2$.

当 $z_2\neq 0$ 时，满足 $z_2z=z_1$ 的复数 z 称为 z_1 与 z_2 的商，记为

$$z=\frac{z_1}{z_2}.$$

由复数乘积运算的定义容易得到

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数的除法运算一般都要将分子、分母同时乘以分母的共轭复数，再进行化简. 具体地，如复数 $1+2\mathrm{i}$ 与 $4-3\mathrm{i}$ 之商应该等于

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{4^2+3^2}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}\mathrm{i}.$$

容易证明，复数的加法和乘法运算满足交换律、结合律；乘法运算对加法的运算满足分配律，即

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1, z_1z_2=z_2z_1$；

(2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3, z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$；

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

同时，对于实数的其他运算规律，复数也同样满足：

(1) $z+0=z, 0\cdot z=0$；

(2) $z\cdot 1=z, z\cdot\frac{1}{z}=1$；

(3) 若 $z_1\cdot z_2=0$，则 z_1 与 z_2 至少有一个为零，反之亦然；

(4) $(z_1\pm z_2)^2=z_1^2\pm 2z_1z_2+z_2^2, z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2)$.

此外，复数运算还满足和、差、积、商(分母不为零)的共轭等于共轭的和、差、积、商，即

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$；

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

(4) $\overline{\overline{z}}=z$；而 $z=\overline{z}$ 当且仅当 z 为实数.

例 1.1 设 $z=\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z, \overline{z}$ 及 $z\overline{z}$.

解 因为

$$z=\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\mathrm{i}-\frac{2(\mathrm{i}-1)}{2}=1-2\mathrm{i},$$

故

$$\mathrm{Re}z=1, \mathrm{Im}z=-2, \overline{z}=1+2\mathrm{i}, z\overline{z}=5.$$

例 1.2 证明：$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_2}\cdot z_1=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$.

证 $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$.

1.1.3 复数的表示法

在中学数学中，引进了数轴之后，每个实数都对应着数轴上一个确定的点. 在平面

中，每个有序实数对(x,y)都对应着平面上一个确定的点. 为了对复数做出几何解释，人们常常用以下几种方法来直观地表示复数.

1. 点表示法

由复数的定义可知，一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 是由一对有序实数(x,y)所唯一确定的，所以在平面直角坐标系 xOy 下，复数和平面上的点建立了一一对应关系. 因此复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用平面上坐标为(x,y)的点 z 来表示，称之为**点表示法**，而 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数 z 的代数表示式，并且将"点 z"与"数 z"看作同义词.

因为实数与 x 轴上的点一一对应，纯虚数与 y 轴上的点(除原点)一一对应，所以称 x 轴为实轴，称 y 轴为虚轴，两轴所在平面称为**复平面或 z 平面**. 复平面也常用 **C** 表示.

2. 向量表示法

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$的向量$\boldsymbol{OP}$来表示(图 1.1)，x,y 分别是$\boldsymbol{OP}$在 x 轴与 y 轴上的投影，因此复数与平面上的向量也构成了一一对应关系(复数 0 对应着零向量). 这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致，即复数 z_1+z_2 所对应的向量，就是复数 z_1 所对应的向量与复数 z_2 所对应的向量的和向量；复数 z_2-z_1 所对应的向量，就是复数 z_2 所对应的向量与复数$-z_1$ 所对应的向量的和向量(图 1.2).

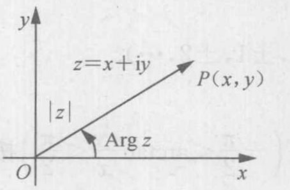

图 1.1

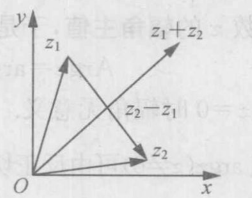

图 1.2

人们经过长期的摸索与研究发现，对于很多的平面问题，如流体力学与弹性力学中的平面问题等，用复数及复变函数作为工具是十分有效的，这正是由于复数可以表示平面向量的缘故. 如图 1.3 所示，在考虑江水在某时刻的流速问题时，假定在江面上取一坐标系 xOy，记江面上任意一点 P 的速度为 v，则 v 是一个向量，记 v 在 x 轴方向与 y 轴方向的两个分量为 v_x 与 v_y，则可以把速度向量 v 写成复数

$$v=v_x+\mathrm{i}v_y.$$

复数 z 所对应向量的长度称为复数 z 的**模或绝对值**，记作$|z|$或 r，有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0,$$

且$|z|=0$ 的充要条件是 $z=0$.

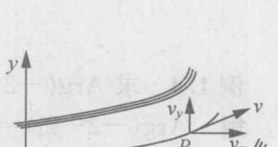

图 1.3

由图 1.2 可见，$|z_1-z_2|$表示点 z_1 与 z_2 之间的距离，记为

$$d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

其中，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$.

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 为任意复数，容易证明，下列各式成立：

(1) $|z|=|\overline{z}|$，$z\cdot\overline{z}=|z|^2$；

(2) $|z|\leqslant|x|+|y|$，$|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$；

(3) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0)$；

(4) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

例 1.3 设 z_1,z_2 是两个复数，证明

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

证
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

以实轴正向为始边，非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的向量 $\boldsymbol{OP}$ 为终边所形成的夹角 θ（图 1.1）称为复数 z 的**辐角**（Argument），记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

显然，任一非零复数 z 有无穷多个辐角，且其中任意两个辐角之间相差 2π 的整数倍，若以 $\arg z$ 表示其中满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi$ 的那个辐角，则称 $\arg z$ 为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，也称为复数 z 的**辐角主值**，于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

注意：当 $z=0$ 时辐角无意义.

辐角主值 $\arg z(z\neq0)$ 可由反正切函数 $\arctan\dfrac{y}{x}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 按下列关系确定：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0\end{cases}$$

例 1.4 求 $\mathrm{Arg}(-2-2\mathrm{i})$，$\mathrm{Arg}(-1)$ 及 $\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(-2-2\mathrm{i})&=\arg(-2-2\mathrm{i})+2k\pi\\&=\arctan\frac{-2}{-2}-\pi+2k\pi\\&=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots);\end{aligned}$$

$\mathrm{Arg}(-1)=\arg(-1)+2k\pi=\pi+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

$\mathrm{Arg}(-3+4\mathrm{i})=\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi=-\arctan\dfrac{4}{3}+(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 1.5　已知流体在某点 M 的速度 $v=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$,求其大小和方向.

解　大小:$|v|=2$;

方向:$\arg v=\arctan(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$.

3. 三角表示法

设复数 $z=x+\mathrm{i}y, r=|z|, \theta=\mathrm{Arg}z$,利用直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},$$

还可以把非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示成下面的形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

称为复数 z 的**三角表示式**. 特别地,当 $r=1$ 时有

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

并将模 $r=1$ 的复数称为**单位复数**.

例 1.6　求 $1+\mathrm{i}, -\mathrm{i}, -3, 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的三角表示式.

解　因为 $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$, $\arg(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$,所以

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

同理可得

$$-\mathrm{i}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-3=3(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi);$$

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

4. 指数表示法

利用欧拉(Euler)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

以及复数 z 的三角表示式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

可得到复数 z 的另一种表示形式

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

这种表示形式称为复数 z 的**指数表示式**.

如果设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}(z_1\neq0, z_2\neq0)$,则

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\theta_2}} &= \frac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \cos\theta_2 - i\sin\theta_2 \\ &= \cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2) = e^{-i\theta_2}, \end{aligned}$$

所以

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

从而有下面的定理.

定理 1.1 对于任意两个非零复数,其乘积的模等于它们模的乘积,乘积的辐角等于它们辐角的和;商的模等于它们模的商;商的辐角等于被除数与除数的辐角差.即当 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ 时,有

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2;$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

上面关于辐角的等式应该理解为集合的相等.也就是说,对于等式左端的任一值,等式右端必有一值和它相等,反之亦然.

例如,设 $z_1 = -1, z_2 = 1+i$,则

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(-1-i) = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2 = \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2k'\pi,$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2 = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k'\pi,$$

其中,k', k 均为任意整数 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 显然,集合

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

根据复数三角表示式与指数表示式的关系

$$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$re^{i(\theta+2k\pi)} = r[\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)],$$

得

$$re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)} = re^{i\theta} \cdot e^{2k\pi i} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

从几何上看,当 θ 增加或减少 2π 时,z 点沿圆周移动一圈回到出发点,因此 $z = re^{i\theta}$ 与 $z = re^{i(\theta+2k\pi)} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 表示的是同一个复数.

例 1.7 将下列复数化为指数表示式.

(1) $z = (1-i)(-1+\sqrt{3}i)$; (2) $z = \dfrac{i}{-\sqrt{3}-i}$.

解 (1) $z = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \cdot 2e^{\frac{2}{3}\pi i} = 2\sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i}$;

(2) $z = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2e^{-\frac{5}{6}\pi i}} = \dfrac{1}{2}e^{\frac{4}{3}\pi i} = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}\pi i}$.

例 1.8　将过点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程表示出来.

解　过点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 的直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=y_1+t(y_2-y_1),\end{cases}-\infty<t<+\infty.$$

则复数形式的参数方程为

$$z=x+\mathrm{i}y=z_1+t(z_2-z_1),-\infty<t<+\infty.$$

顺便指出，方程 $z=z_1+t(z_2-z_1)$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 表示从 z_1 到 z_2 的直线段；方程 $|z-z_0|=r(r>0)$ 表示的是到定点 z_0 的距离为 r 的点的轨迹，即以 z_0 为圆心，以 r 为半径的圆周，其参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$-\pi<\theta\leqslant\pi$.

5. 球面表示法

在实际应用中，常常需要建立球面上的点与复数的一一对应关系. 例如，地图测绘员需把地球表面用平面图形来描绘. 如图 1.4 所示，设线段 ON 为某球体的直径，球面与复平面相切于坐标原点 O，则 ON 垂直于复平面. 这里，不妨设 N 点为球面的北极，O 点为球面的南极.

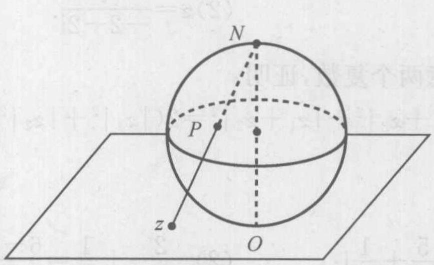

图 1.4

显然，对于复平面上的任一点 z，连线 zN 与球面(除 N 外)有唯一的交点 P；反之，对于球面上除 N 点外的任一点 P，NP 的延长线也必然与复平面有唯一的交点 z. 这样，复平面上的点与球面上除 N 外的点建立了一一对应的关系. 因此，可以用球面上的点 P 表示复数 z，称为**复数的球面表示**.

不难看出，用以上方法，复平面上的任何一个有限点都不可能与球面上的北极点 N 对应. 但显然，随着球面上 P 点逐渐接近于 N 点，复平面上相应的点 z 逐渐远离原点 O. 作为极限情形，规定与北极点 N 对应的是复平面上的无穷远点，它所代表的复数称为**无穷大**，记为 ∞. 复平面加上无穷远点后称为**扩充复平面**，与它对应的整个球面称为**复球面**. 不包括无穷远点的复平面称为**有限复平面**.

对于 ∞ 这一特殊的复数而言，实部、虚部、辐角都是没有意义的，唯一能刻画它的量是其模，即正无穷大，即 $|\infty|=+\infty$. 另外，在扩充复平面上，∞ 可像普通的有限复数一样参加运算. 关于 ∞ 的四则运算规定如下：

$$\infty\cdot\infty=\infty,z\pm\infty=\infty\pm z=\infty,\frac{z}{\infty}=0,\frac{\infty}{z}=\infty(z\neq 0),$$

其中，z 为任意有限复数. 若 $z\neq0$，还有

$$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty,\ \frac{z}{0}=\infty.$$

需要指出，如无特殊声明，本书所考虑的“复平面”是指有限复平面，所指的“点”是有限复平面上的点.

习 题 1.1

1. 求复数 $\dfrac{(3+4\mathrm{i})^2}{(1-2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}$ 的模.

2. 求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角：

(1) $\dfrac{1}{3+2\mathrm{i}}$； (2) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$.

3. 复数 z 满足 $(1+2\mathrm{i})\bar{z}=4+3\mathrm{i}$，求 z.

4. 就下列各种情况，分别求 $\arg z$.

(1) $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$； (2) $z=\dfrac{\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$.

5. 设 $z_1,z_2\neq0$ 为任意两个复数，证明：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

并说明其几何意义.

6. 证明：

(1) $\left(\dfrac{1}{2-3\mathrm{i}}\right)\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}\right)=\dfrac{5}{26}+\dfrac{1}{26}\mathrm{i}$； (2) $\dfrac{2}{3+4\mathrm{i}}+\dfrac{1}{5\mathrm{i}}=\dfrac{6-13\mathrm{i}}{25}$；

(3) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)=-\mathrm{Im}z$； (4) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)=\mathrm{Re}z$.

7. 证明：$\sqrt{2}\,|z|\geqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|$.

1.2 复数的乘幂与开方

1.2.1 复数的乘幂

对任意正整数 n，$z^n=z\cdot z\cdot\cdots\cdot z$ 表示 n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n **次幂**，记为 z^n. 当 $z\neq0$ 时，规定 $z^{-n}=\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}$，并规定 $z^0=1$. 这样，当 $z\neq0$ 时，对任何整数 n，z^n 都有意义. 设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，可得 z^n 的指数形式

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

和三角形式

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

特别地，当 $r=1$ 时，可得到著名的**棣莫弗**(De Moivre)**公式**