Suiji
Guocheng
yu Kongzhi

随机过程与控制

◎ 郭业才 编著

气象出版社
China Meteorological Press

随机过程与控制

郭业才　编著

气象出版社
China Meteorological Press

内容提要

本书系统介绍了随机过程与随机控制的基础知识与基本理论，主要有随机过程与随机控制两部分。随机过程部分包括随机信号基础、随机过程的统计特性、随机分析及平稳随机过程、正态随机过程、泊松过程及马尔可夫链等内容；随机控制部分包括随机系统的自回归滑动平均模型与受控自回归滑动平均模型的统计特性、参数辨识、模型定阶及预测、滤波与平滑及最小差方控制，随机系统状态模型与最优状态估计等内容。选材注重基础性、实用性、新颖性与实践性，内容论述由浅入深、逻辑严谨、表述清晰，符合工科学生的认知规律。

本书可作为信息与通信工程、电子与通信工程、控制理论与控制工程、电路与系统、大气科学等专业的研究生教材；也可作为电子信息类专业及大气科学专业高年级本科生教材；也可作为工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程与控制/郭业才编著.—北京:气象出版社,2013.8

ISBN 978-7-5029-5751-3

Ⅰ.①随… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材②随机控制-高等学校-教材 Ⅳ.①O211.6 ②O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 167752 号

出版发行：气象出版社

地　　址：北京市海淀区中关村南大街 46 号　　**邮政编码**：100081

总 编 室：010-68407112　　**发 行 部**：010-68409198

网　　址：http://www.cmp.cma.gov.cn　　**E-mail**：qxcbs@cma.gov.cn

责任编辑：黄海燕　蔺学东　　**终　　审**：汪勤模

封面设计：博雅思企划　　**责任技编**：吴庭芳

印　　刷：三河市鑫利来印装有限公司

开　　本：720 mm×960 mm　1/16　　**印　　张**：22

字　　数：425 千字

版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：42.00 元

前　言

在现实中存在这样一类自然现象，它的演变过程是不能事先预知的，这就是随机现象。描述这类随机现象的数学模型就是随机过程。在随机过程的基础上，以“试试看”的思想进行的控制活动是随机控制，随机控制的对象是随机系统。随机系统内部含有随机参数，外部含有随机干扰和观测噪声等。任何实际的系统都含有随机因素，但在很多情况下可以忽略这些因素；当这些因素不能忽略时，按确定性控制理论设计的控制系统的行为就会偏离预定的设计要求，而产生随机偏差量。以随机系统的动态特性及随机系统的分析和控制为内容开展研究的理论，称为随机控制理论。它以随机过程理论为数学工具，以随机控制系统为研究对象，通过控制器的最优设计来预测被控系统的随机偏差量值的大小和极限，并使这种随机偏差的量值达到最小为目标。其内容涉及数学模型的建立、系统分析、系统估计、卡尔曼滤波、随机最优控制、系统辨识和参数估计等。

随机过程和随机控制理论广泛应用于雷达与通信、天文与气象、经济与市场、航天、航空、海洋工程、工程控制、生物医学等许多领域，是高等理工科院校研究生、高年级本科生及科技工作者必须掌握的基本知识、基本理论和基本方法。

本书是作者根据多年教学经验和体会，从工程角度出发，在取材和阐述方式上，力求由易到难、由浅入深、由简到繁，既注重知识体系的系统性和完整性，又突出工程实用性和新颖性，具有以下特点：

(1)内容拓展性。根据随机过程与随机控制系统的内在联系进行编写，章节内容构成了从随机现象出现到随机系统辨识、决策、控制与预测的体系结构；同时，注重章节内容之间的合理衔接与划分，层次分明，重点突出。

(2)体系新颖性。整个知识点起点高，基本理论和方法思想阐述清晰，循序渐进；同时，注意吸收新理论与新技术成果，构成了从随机过程到随机控制的新体系。

(3)方法实用性。围绕随机系统中发生随机现象的各个环节特点及解决问题的方法与技巧展开剖析，融思想性、科学性、新颖性与实用性于一体，从理论分析到实际应用都有利于读者把握分析问题、解决问题的科学方法精髓。

(4)思维引导性。对基本理论与方法给出了详细的论证推导过程，读者可按拓展

与延伸方法对提高性理论与方法进行论证推导，有利于提高读者分析问题和解决问题的能力。

(5)实例融入性。每章的重点内容都配有通信、随机控制、天气预报、信号处理等领域的应用实例分析与较多习题，以激发读者学用结合、学研结合的思维。

本书在编写过程中参阅了大量文献，书后所列参考文献为本书的基本内容提供了极好的素材，本书还引用了某些文献的部分内容并对其进行了吸收与消化，在此，谨向有关作者表示谢意。同时，本书还得到了南京信息工程大学教材建设基金立项项目(No.12JCLX025)、南京信息工程大学2013年校级重点教材立项项目(No.13ZDJC014)、江苏省高校“十二五”重点专业建设项目(No.164)、江苏省高校自然科学研究重大项目(13KJA510001)及气象出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，难免有不少谬误和疏漏，恳请读者给予批评指正。

郭业才

2013年7月

目 录

第 1 章 基础知识

【内容导读】 本章给出了概率、随机变量、随机向量、复随机变量、高斯随机变(向)量等重要概念;讨论了随机变量的分布函数与概率密度函数、随机向量的分布函数与概率密度函数、随机变(向)量函数的分布函数与概率密度函数;分析了随机变(向)量的数字特征,包括均值、方差、相关矩与协方差、相关系数等;介绍了随机变量的矩母函数、特征函数及拉普拉斯变换。

本章的目的是在概率论的基础上,建立客观事物及其概率的数学模型。从而使学生在已学概率论的基础上,对随机现象本质的理解达到进一步的深化。

随机过程的基础是概率论。本章将对随机变(向)量的概念、分布、数字特征等与随机过程分析密切相关的特性进行概述。

1.1 概率

1.1.1 随机试验与样本空间

【定义 1.1】如果一个试验具有以下共同特点:

①可以在相同的条件下重复进行;

②事先不能确定会出现哪一个试验结果;

③每次试验的可能结果不止一个,并且可以预知试验的所有可能结果。

则称该试验为随机试验,记为 E。

【定义 1.2】在个别试验中,试验结果呈现出不确定性;在大量重复试验中,试验结果遵从统计规律性的现象,称之为随机现象。

【定义 1.3】随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S。样本空间中的元素 s,也就是随机试验 E 的一个结果,称为样本点。

1.1.2　随机事件及其概率与独立性

1)事件域与概率

【定义 1.4】把试验 E 的样本空间 S 的子集(子集的组成规则是任意的)称为 E 的随机事件,简称事件。如果在试验中,该子集的样本点出现,则称该事件发生。

可见,事件是样本空间 S 的一个子集,但一般不将 S 的一切子集都作为事件,而是将具有某限制而又相当广泛的一类 S 的子集称作事件域。

【定义 1.5】设试验 E 的样本空间 S 的一些子集的集合为$\mathbb{S}$,如果满足:

①$S\in\mathbb{S}$;

②若 $A\in\mathbb{S}$,则 A 的补集 $\overline{A}\in\mathbb{S}$;

③若对任意的 $n=1,2,\cdots,A_n\in\mathbb{S}$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathbb{S}$。

则称$\mathbb{S}$为事件域,$\mathbb{S}$中的元素为事件。

事件域具有如下性质:

①空集 $\phi\in\mathbb{S}$;

②若对任意的 $n=1,2,\cdots,A_n\in\mathbb{S}$,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathbb{S}$;

③若 $A,B\in\mathbb{S}$,则 $A-B\in\mathbb{S}$。

【定义 1.6】设试验 E 的样本空间 S 的一个事件域为$\mathbb{S}$,$P(A)$是$\mathbb{S}$上的实值函数,且满足:

①若对任意 $A\in\mathbb{S},P(A)\geqslant 0$;

②$P(S)=1$;

③若对任意的 $n=1,2,\cdots,A_n\in\mathbb{S}$及 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,且有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

称 $P(A)$为事件 A 的概率。事件 A 的概率表示了事件A 发生可能性大小(数值)。

【定义 1.7】由样本空间 S,事件域$\mathbb{S}$和概率 P 构成的三元有序总体$(S,\mathbb{S},P)$,称为概率空间。

2)事件的分类

①基本事件:由一个样本点组成的单点集。

②必然事件:在每次试验时必然发生的事件。样本空间 S 是自身的子集。

③不可能事件:在每次试验时都不会发生。空集 ϕ 是 S 的子集,但是不包含任何样本点。

3)事件间与相应概率间关系

①包含:如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 B 包含了 A,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,且

$$P(A) \leqslant P(B) \tag{1.1.1}$$

$$P(B-A) = P(B) - P(A) \tag{1.1.2}$$

②交(或积):事件 A 与 B 同时发生,记为 $A \cap B$ 或(AB);其概率记为 $P(A \cap B)$ 或 $P(AB)$。

③并(或和):事件 A 与 B 中至少有一个发生,记为 $A \cup B$,则

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(AB) \tag{1.1.3}$$

④不相容:若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\phi$,则称事件 A 与 B 互不相容,且

$$P(AB) = P(\phi) = 0 \tag{1.1.4}$$

⑤对立(互逆):若 A 是一个事件,称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件(或逆事件),即 $A\overline{A}=\phi$, $A \cup \overline{A} = S$,有

$$P(A \cup \overline{A}) = P(S) = 1 \tag{1.1.5}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.1.6}$$

⑥有限可加性:若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{1.1.7}$$

4)条件概率

【定义 1.8】设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

①条件概率乘法公式

设有事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,且 $P(A_1A_2\cdots A_n)>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.1.8}$$

②全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_n)P(B_n) \tag{1.1.9}$$

③贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A)>0, P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(A \mid B_n)P(B_n)} \tag{1.1.10}$$

5)独立事件

【定义 1.9】设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 及 $1\leqslant i_1< i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.1.11}$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件。

显然，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都是独立的(称之为两两独立)；反之，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立，则未必有 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立。

1.2 随机变量及其分布

为了全面地研究随机试验的结果，揭示客观存在着的统计规律性，现将随机试验的结果与实数对应起来，将随机试验的结果数量化，引入随机变量的概念。

1.2.1 随机变量的分布函数与概率密度

1)随机变量的分布函数与性质

【定义 1.10】设 S 是随机试验 E 的样本空间，$\mathbb{S}$是 S 的一个事件域，在概率空间$(S,\mathbb{S},P)$中，$X(s)$是定义在 S 上的单值实函数，如果对于任意的实数 x，$\{X(s)\leqslant x\}\in\mathbb{S}$，则称 $X(s)$为$(S,\mathbb{S},P)$上的一个随机变量，记为 X。称

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\in(-\infty,x]\} \tag{1.2.1}$$

为随机变量 X 的概率分布函数或分布函数。

如果随机变量 X 的全部可能取到的值是有限多个或可列无限多个，则称 X 为离散(型)随机变量；如果随机变量 X 的全部可能取到的值是不可列的，则称 X 为连续型随机变量。

对于离散随机变量，有

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i\} \tag{1.2.2}$$

概率分布函数有如下性质：

①$F_X(x)$是 x 的单调非减函数，即对于 $x_2>x_1$，有

$$F_X(x_2)\geqslant F_X(x_1) \tag{1.2.3}$$

②$F_X(x)$为非负函数，且满足

$$0\leqslant F_X(x)\leqslant 1 \tag{1.2.4}$$

而且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$。

③随机变量在区间$(x_1,x_2]$内的概率为

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) \tag{1.2.5}$$

④$F(x)$是右连续，即

$$F_X(x^+) = F_X(x) \tag{1.2.6}$$

离散随机变量的分布函数除满足以上性质外，还具有阶梯形式，阶跃的高度等于随机变量在该点的概率，即

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)u(x - x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i u(x - x_i) \tag{1.2.7}$$

式中，$u(x)$为单位阶跃函数，$P_i = P(X = x_i)$。

2)随机变量的概率密度函数

【定义 1.11】如果对于连续型随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$，若存在非负函数 $f_X(x)\geqslant 0$，使对于任意实数 x，有

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t \tag{1.2.8}$$

则称函数 $f_X(x)$为随机变量 X 的概率密度函数，简称概率密度。反之，如果已知连续型随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$，则其概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.2.9}$$

概率密度函数有如下性质：

①概率密度函数为非负函数，即

$$f_X(x) \geqslant 0 \tag{1.2.10}$$

②概率密度函数在整个取值区间的积分为1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.2.11}$$

③概率密度函数在区间$(x_1,x_2]$的积分，给出了该区间的概率，即

$$P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.2.12}$$

从前文对离散型随机变量分布函数的讨论可知，在定义冲激函数 $\delta(x)$后，则离散型随机变量的概率密度为

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)\delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\delta(x - x_i) \tag{1.2.13}$$

1.2.2　随机向量的分布函数与概率密度

1)随机向量的分布函数

【定义 1.12】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在概率空间$(S, \mathbb{S}, P)$中的 n 个随机变量，则称 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为概率空间$(S, \mathbb{S}, P)$中的一个 n 维随机向量。

n 维随机向量取值于 n 维实数空间$\mathbb{R}^n$，对于 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，由于

$$\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leqslant x_k\} \in \mathbb{S}$$

因此，n 维随机向量的概率是存在的。

【定义 1.13】设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是定义在概率空间$(S, \mathbb{S}, P)$中的 n 维随机变量，则称

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n) \tag{1.2.14}$$

为 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的分布函数，也称为 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布函数。

如果随机向量 $\boldsymbol{X}$ 只取有限多个或可列无限多个不同的向量值，则称 $\boldsymbol{X}$ 为离散型随机向量；如果随机向量 $\boldsymbol{X}$ 全部可能取到的不同向量值是不可列的，则称 $\boldsymbol{X}$ 为连续型随机向量。

【定义 1.14】对于连续型随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的分布函数 $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果存在非负可积函数 $f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$F_{\boldsymbol{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\boldsymbol{X}}(u_1, u_2, \cdots, u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n \tag{1.2.15}$$

则称函数 $f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为连续随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的概率密度函数，简称概率密度。反之，如果连续型随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的分布函数 $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$\mathbb{R}^n$ 上的连续函数，则其概率密度为

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \tag{1.2.16}$$

$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$有如下性质：

① $f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$；

② $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(u_1, u_2, \cdots, u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n = 1$。

2)边缘分布函数与边缘概率密度

特别地，当 $n=2$ 时，n 维连续随机向量 $\boldsymbol{X}$ 就是二维连续随机向量，记为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2)$。

二维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2)$的分布函数或随机变量 X_1 和 X_2 的联合分布函数为

$$F_{X_1X_2}(x_1, x_2) = P\{(X_1 \leqslant x_1) \cap (X_2 \leqslant x_2)\} = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2\} \tag{1.2.17}$$

二维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 的概率密度或随机变量 X_1 和 X_2 的联合概率密度为

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1.2.18}$$

二维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 关于 X_1 和 X_2 的边缘分布函数为

$$\begin{cases} F_{X_1}(x_1)=F_{\boldsymbol{X}}(x_1,\infty)=\int_{-\infty}^{x_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\right]\mathrm{d}x_1 \\ F_{X_2}(x_2)=F_{\boldsymbol{X}}(\infty,x_2)=\int_{-\infty}^{x_2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 \end{cases} \tag{1.2.19}$$

式中，$F_{X_1}(x_1)$、$F_{X_2}(x_2)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数，依次称为二维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 关于 X_1 和 X_2 的边缘分布函数。边缘分布函数可以由 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 的分布函数 $F_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)$ 按式(1.2.19)确定。

二维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 关于 X_1 和 X_2 的边缘概率密度为

$$\begin{cases} f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2 \\ f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1 \end{cases} \tag{1.2.20}$$

式中，$f_{X_1}(x_1)$、$f_{X_2}(x_2)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的概率密度，依次称为二维随机向量 (X_1,X_2) 关于 X_1 和 X_2 的边缘概率密度。边缘概率密度可以由 (X_1,X_2) 的概率密度 $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)$ 按式(1.2.20)确定。

3)条件分布和独立性

设概率空间 $(S,\mathbb{S},P)$ 中的两个随机变量 X 和 Y，在 $X\leqslant x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件概率分布函数和条件概率密度分别为

$$F_Y(y\mid x)=\frac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)} \tag{1.2.21}$$

$$f_Y(y\mid x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.2.22}$$

若有 $f_X(x|y)=f_X(x)$，$f_Y(y|x)=f_Y(y)$，则称 X 与 Y 是相互统计独立的两个随机变量。

两个随机变量相互统计独立的充要条件为

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1.2.23}$$

即随机变量 X 与 Y 的二维联合概率密度等于 X 和 Y 的边缘概率密度的乘积。

n 维随机向量中 n 个随机变量相互统计独立的充要条件是对所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \tag{1.2.24}$$

1.3 随机变量的数字特征

随机变量的数字特征主要有均值、方差和相关矩等。

1.3.1 数学期望(期望、均值、统计平均、集合平均)与方差

1)数学期望

【定义1.15】设 $F_X(x)$ 是随机变量 X 的分布函数,若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, x \,|\, \mathrm{d}F_X(x) < +\infty$$

则称

$$m_X = E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x & X\text{ 为连续的} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i & X\text{ 为离散的} \end{cases} \tag{1.3.1}$$

为随机变量 X 的数学期望。随机变量 X 的数学期望有着明确的物理意义:如果把概率密度 $f_X(x)$ 看成是 X 轴的密度,那么其数学期望便是 X 轴的几何重心。数学期望有如下性质:

①设 C 是常数,则

$$E[C] = C \tag{1.3.2}$$

②设 X 是一个随机变量,C 是常数,则

$$E(CX) = CE(X) \tag{1.3.3}$$

③设 X 与 Y 是两个随机变量,则有

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \tag{1.3.4}$$

④设 X 与 Y 是相互独立的随机变量,则有

$$E(XY) = E(X)E(Y) \tag{1.3.5}$$

2)方差

【定义1.16】设 $F_X(x)$ 是随机变量 X 的分布函数,若

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \mathrm{d}F_X(x) < +\infty$$

则称

$$D(X) = \sigma_X^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)\mathrm{d}x \\ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 P_i \end{cases} \tag{1.3.6}$$

为随机变量 X 的方差。方差反映了随机变量 X 的取值与其均值之间的偏离程度，或者是随机变量在数学期望附近的离散程度。

方差开方后称为标准差或均方差

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{1.3.7}$$

方差有如下性质：

①设 C 是常数，则

$$D(C) = 0 \tag{1.3.8}$$

②设 X 是随机变量，C 是常数，则

$$D(CX) = C^2 D(X) \tag{1.3.9}$$

③设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，则有

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) \tag{1.3.10}$$

数学期望的不同表现为概率密度曲线沿横轴平移的距离不同，而方差的不同则表现为概率密度函数曲线在数学期望附近的集中程度。

【例 1.1】已知高斯随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$（$m$ 为 X 的均值，σ^2 为 X 的方差），求其数学期望和方差。

解：根据数学期望和方差的定义

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $t = \frac{x-m}{\sigma}$，$\mathrm{d}x = \sigma\mathrm{d}t$，代入上式并整理

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = 0 + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = m$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

与前面做同样的变换，即令 $t = \frac{x-m}{\sigma}$ 整理后，得

$$D(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

查数学手册的积分表，可得

$$\int_0^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

令 $n=1$ 及 $a=\frac{1}{2}$，利用上式的积分结果，可得