

Finsler调和映射与 Laplace算子

贺群 尹松庭 赵玮 著



科学出版社

Finsler 调和映射与 Laplace 算子

贺 群 尹松庭 赵 玮 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书较为系统地总结了 Finsler 流形之间的调和映射、Finsler 极小子流形及 Finsler-Laplace 算子第一特征值等有关方面的基本理论和最新成果. 为了自成体系, 同时也为了方便读者查阅, 本书在第 1 章先概要介绍 Finsler 几何的基础知识、常用的公式和方法. 此外, 本书还弥补和修正了相关论文中的一些错漏之处, 改进和完善了部分结果.

全书共分 8 章. 第 1 章主要介绍 Finsler 流形的基础知识. 第 2 章和第 3 章主要介绍 Finsler 调和映射(包括 $\mathcal{F}$ -调和映射和复 Finsler 调和映射)的相关概念、公式、性质和应用. 第 4 章和第 5 章主要介绍 Finsler 流形上的各种 Laplace 算子及其特征值估计. 第 6~8 章主要介绍 Finsler 流形的 HT-极小子流形和 BH-极小子流形的性质及其分类.

本书可作为高等院校数学专业研究生教材或高年级本科选修课教材, 也可作为数学、物理、工程等相关领域研究人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

Finsler 调和映射与 Laplace 算子/贺群, 尹松庭, 赵玮著. —北京: 科学出版社, 2014.

ISBN 978-7-03-103940-5

I. ①F… II. ①贺… ②尹… ③赵… III. ①调和映射 ②算子
IV. ①O189 ②O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 309829 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 张怡君
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014 年 1 月第一次印刷 印张: 15 1/4

字数: 291 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

Finsler 几何是其度量上没有二次型限制的黎曼几何. 黎曼早在 1854 年就在黎曼度量的基础上提出了 Finsler 度量, 但由于形式复杂, 计算量大, Finsler 几何并没有像黎曼几何一样得到快速全面的发展. 最近几十年来, 由于新方法的提出以及在相对论、控制论、生物数学和信息科学等众多自然科学领域中日益广泛的应用, Finsler 几何重新得到重视并迅速发展, 成为现代数学的一个重要分支.

几何大师陈省身先生生前曾极力倡导和发展这门学科, 并投入了大量的心血. 由陈先生主持的 2004 年南开大学 Finsler 几何国际会议极大地促进了国内外学者的交流, 使 Finsler 几何的研究进入了一个空前活跃、健康发展的新时期. 陈省身、David Bao、沈忠民等许多几何学家共同建立了像整体黎曼几何那样的整体 Finsler 几何, 为 Finsler 几何的发展作出了重要贡献. 一系列重要而深刻的研究成果为 Finsler 几何的研究奠定了基础并展现了令人鼓舞的前景. 到目前为止, 一年一度的 Finsler 几何国际会议已坚持举办了十届, 研究队伍在不断壮大, 与几何其他分支和其他学科的交流也越来越广泛和深入. 越来越多的年轻学者加入到这支研究队伍中, 使得 Finsler 几何——这个并不年轻的学科显示出强大的生命力和无限潜力.

调和映射、极小子流形和 Laplace 算子都是整体微分几何和几何分析中的热门研究领域. 经过国内外几何学者的长期努力, 黎曼几何在这些领域的研究已非常深入, 其理论体系已相当丰富和完善, 国内外出版了不少专门教材和论著^[82,116,117]. Finsler 几何有关调和映射的研究虽起步较晚, 但近年来也已取得了重要的进展, 为相关理论的进一步发展奠定了基础. Finsler 子流形几何是 Finsler 几何中重要的研究领域, 然而由于计算的复杂性和第二基本形式定义的多样性, 研究工作困难很大, 进展相对缓慢. 尽管如此, Finsler 几何学者一直在不懈努力, 不断在方法上寻求突破. 近年来, 在 Finsler 子流形, 特别是极小子流形方面也已取得了一系列有意义的研究成果. 各种类型的 Laplace 算子在现代微分几何和物理学研究中扮演着非常重要的角色, 尤其在调和函数、调和积分理论和 Bochner 技巧运用中不可或缺. Laplace 算子谱理论, 特别是第一特征值问题, 一直以来都是几何分析的重要研究课题, 与整体微分几何的联系也极为密切. 在黎曼几何中, 关于 Laplace 算子的第一特征值的上界及下界估计, 有许多著名的定理, 如 Cheeger 型不等式和 Faber-Krahn 型、Cheng 型特征值比较定理等. 作为 Laplace 算子的推广, p -Laplace 算子的特征值问题目前仍然是几何分析研究的热点问题之一. 在 Finsler 几何中, Laplace 算子

更为丰富多样. Finsler-Laplace 比较定理和第一特征值问题同样是几何学者关注的热点. 有关这方面的研究, 特别是对于非线性 Laplace 算子的研究已取得了令人瞩目的成果.

本书主要介绍近十年来 Finsler 几何中有关调和映射、极小子流形以及 Finsler-Laplace 算子的第一特征值等方面的研究成果. 近年来, 已有不少 Finsler 几何方面的教材和论著出版^[4,5,24,68,96]. 但目前国内外还没有关于 Finsler 调和映射、极小子流形和 Laplace 算子谱理论等方面的专门论著, 本书在一定程度上填补了这一空白. 尽管这些领域的研究成果还远远不够完善, 但及时总结和介绍最新成果, 对于相关领域的进一步研究还是很有必要的, 对于 Finsler 几何的发展也应该是一项有意义的工作. 希望本书可以帮助读者系统地了解本学科的相关知识、研究方法和科研成果, 为进一步从事研究工作打好基础.

本书第 1 章的部分内容和第 2~7 章的大部分内容都是作者及其合作者的研究成果. 需要特别声明的是, 第 1 章中的许多概念、公式和结论都是 Finsler 几何中众所周知的基础知识, 因此不再一一注明出处. 后面各章中收录他人的部分相关研究成果, 我们尽可能注明出处. 此外, 本书还弥补和修正了相关文献中的一些疏漏和编辑错误, 改进和完善了部分结果.

本书主要内容包括四部分:

第一部分由第 1 章组成, 主要介绍 Finsler 流形的基础知识;

第二部分由第 2 章和第 3 章组成, 主要介绍 Finsler 调和映射 (包括 $\mathcal{F}$ -调和映射和复 Finsler 调和映射) 的相关概念、公式、性质和应用;

第三部分由第 4 章和第 5 章组成, 主要介绍 Finsler 流形上的各种 Laplace 算子及其特征值估计;

第四部分由第 6 章、第 7 章和第 8 章组成, 主要介绍 Finsler 流形的 HT-极小子流形和 BH-极小子流形的性质及其分类.

本书的部分研究工作获得国家自然科学基金 (项目编号: 10971239, 11171253)、上海市自然科学基金 (项目编号: 09ZR1433000) 的资助, 出版得到了“同济大学教材、学术著作出版基金委员会”资助, 在此一并表示感谢.

与黎曼几何相比, Finsler 调和映射及相关课题的研究还比较零散和初步, 加之作者本身能力与学识水平所限, 本书内容在系统性、完整性和深入性方面可能还比较欠缺. 书中难免有疏漏和不当之处, 敬请读者批评指正.

贺 群 尹松庭 赵 玮

2013 年 3 月于同济大学数学系

目 录

前言

第 1 章 Finsler 流形基础	1
1.1 Finsler 度量和体积元	1
1.1.1 Finsler 度量	1
1.1.2 射影球丛	2
1.1.3 体积元	5
1.2 Finsler 流形上的联络	6
1.2.1 陈联络	6
1.2.2 共变导数	7
1.2.3 其他 Finsler 联络	8
1.2.4 射影球丛上的联络	9
1.3 测地系数与测地线	9
1.4 曲率	11
1.4.1 曲率张量	11
1.4.2 旗曲率与 Ricci 曲率	12
1.4.3 非黎曼曲率	13
1.5 特殊的 Finsler 度量	14
1.5.1 具有特殊曲率性质的 Finsler 度量	14
1.5.2 Randers 度量	16
1.5.3 (α, β) 度量	20
1.5.4 广义 (α, β) 度量	22
1.5.5 m 次根度量	23
1.6 微分算子与积分公式	24
1.6.1 射影球丛上的散度和 Laplace 算子	24
1.6.2 射影球面上的积分公式	26
1.6.3 垂直平均值算子	29
1.6.4 流形上的散度公式	30
1.7 Finsler 流形间的映射	31
1.7.1 拉回联络	31
1.7.2 等距浸入	34

1.8 复 Finsler 流形	35
1.8.1 复 Finsler 度量	35
1.8.2 Chern-Finsler 联络	36
1.8.3 特殊的复 Finsler 度量	37
第 2 章 Finsler 流形间的调和映射	39
2.1 能量泛函的第一和第二变分	39
2.1.1 能量泛函	39
2.1.2 第一变分	40
2.1.3 张力形式和张力度量	41
2.1.4 第二变分	42
2.2 强调和映射的变分背景	44
2.2.1 垂直平均值截面	44
2.2.2 广义能量泛函	44
2.3 Bochner 型公式	46
2.4 取值于向量丛的调和形式	50
2.4.1 底流形上取值于向量丛的调和形式	50
2.4.2 SM 上取值于向量丛的调和形式	53
2.5 $\mathcal{F}$ -调和映射	55
2.5.1 $\mathcal{F}$ -能量泛函	55
2.5.2 第一变分	56
2.5.3 第二变分	58
2.6 从复 Finsler 流形到 Hermitian 流形的调和映射	60
2.6.1 能量密度	60
2.6.2 第一变分公式	61
第 3 章 Finsler 调和映射的性质和应用	62
3.1 调和映射的稳定性	62
3.1.1 欧氏球面 $S^n (n > 2)$ 与 Finsler 流形之间调和映射的稳定性	62
3.1.2 SSU 流形与 Finsler 流形之间调和映射的稳定性	65
3.2 调和映射的复合性质	67
3.3 应力-能量张量及共形映射	69
3.3.1 应力-能量张量	69
3.3.2 共形调和映射	71
3.3.3 曲面上的调和映射	74
3.4 一些刚性定理	75
3.4.1 关于调和映射的刚性定理	75

3.4.2 关于强调和映射的刚性定理	78
3.5 调和映射的存在性	79
3.5.1 Eells-Sampson 型定理	80
3.5.2 热流解的存在性	81
3.5.3 热流解的收敛性	83
3.5.4 定理 3.5.1 的证明	86
3.6 弱调和映射的正则性	86
3.7 到 Randers 空间的调和映射的性质	87
3.7.1 到 Randers 空间的调和映射	87
3.7.2 存在性	88
3.7.3 稳定性	91
3.8 $\mathcal{F}$ -调和映射的性质	93
3.8.1 $\mathcal{F}$ -调和映射的稳定性	93
3.8.2 $\mathcal{F}$ -应力能量张量	96
3.9 复 Finsler 调和映射的性质	99
3.9.1 复 Finsler 调和映射的存在性	99
3.9.2 同伦不变量	100
第 4 章 Finsler-Laplace 算子及其第一特征值	102
4.1 Finsler-Laplace 算子	102
4.1.1 平均 Laplace 算子	102
4.1.2 一个自然的 Finsler-Laplace 算子	103
4.1.3 由平均度量确定的 Riemann-Laplace 算子	103
4.1.4 Laplace 算子的谱	105
4.2 平均 Laplace 算子的性质	106
4.3 广义 (α, β) 度量的平均 Laplace 算子	108
4.3.1 广义 (α, β) 度量的平均度量	108
4.3.2 广义 (α, β) 度量的平均 Laplace 算子	109
4.3.3 Randers 度量的平均 Laplace 算子	110
4.4 平均 Laplace 算子的第一特征值	113
4.4.1 黎曼几何中关于第一特征值的一些结果	113
4.4.2 Berwald 流形上平均 Laplace 算子的第一特征值	115
4.5 曲面上平均 Laplace 算子的第一特征值	120
第 5 章 非线性 Finsler-Laplace 算子及其第一特征值	124
5.1 非线性 Finsler-Laplace 算子	124
5.1.1 非线性 Laplace 算子的定义	124

5.1.2	Finsler 流形上若干加权算子的性质	126
5.2	非线性 Laplace 算子的比较定理	129
5.3	非线性 Laplace 算子的第一特征值	132
5.3.1	第一特征函数存在性与正则性	132
5.3.2	加权 Ricci 曲率具有正下界时的第一特征值估计	133
5.3.3	加权 Ricci 曲率具有非负下界时的第一特征值估计	139
5.3.4	加权 Ricci 曲率具有负下界时的第一特征值估计	153
5.4	Finsler p -Laplace 算子的第一特征值	156
5.4.1	第一特征函数的存在性	156
5.4.2	加权 Ricci 曲率具有正下界时的第一特征值估计	158
5.4.3	加权 Ricci 曲率具有负上界时的第一特征值估计	163
第 6 章	Finsler 流形的 HT-极小子流形	166
6.1	Finsler 子流形	166
6.1.1	Finsler 极小子流形	166
6.1.2	Gauss 方程	167
6.1.3	全脐子流形	168
6.2	HT-体积的第一变分	171
6.3	强极小子流形及其变分背景	173
6.4	特殊 Finsler 流形的极小子流形	175
6.4.1	Minkowski 空间的极小子流形	175
6.4.2	Randers 空间的极小子流形	179
6.4.3	广义 (α, β) 空间的极小子流形	182
6.5	极小子流形的一些分类定理	187
6.5.1	(α, β) -Minkowski 空间中极小曲面的分类	187
6.5.2	非 Minkowski 广义 (α, β) 空间中极小曲面的分类	193
6.5.3	射影平坦广义 (α, β) 空间中劈锥极小曲面的分类	196
第 7 章	HT-极小子流形的性质	199
7.1	HT-体积的第二变分	199
7.2	极小子流形的稳定性	202
7.2.1	Minkowski 空间中极小超曲面的稳定性	202
7.2.2	极小图的稳定性	203
7.3	Bernstein 型定理	205
7.3.1	广义 (α, β) 空间中的 Bernstein 型定理	205
7.3.2	Minkowski 空间中极小图的 Bernstein 型定理	205
7.3.3	欧氏空间中极小超曲面的 Bernstein 型定理	207

7.3.4 Minkowski 空间中稳定极小超曲面的 Bernstein 型定理	210
第 8 章 关于一般体积测度的极小子流形	213
8.1 关于一般体积测度的平均曲率	213
8.2 BH-极小子流形	215
8.2.1 $(\mathbb{R}^3, F)$ 中的极小曲面	215
8.2.2 高维 (α, β) 空间中极小超曲面	216
8.3 BH-极小子流形的 Bernstein 型定理	219
参考文献	221
索引	228

第1章 Finsler 流形基础

1.1 Finsler 度量和体积元

1.1.1 Finsler 度量

设 M 是 n 维光滑实流形, $T_x M$ 是点 $x \in M$ 处的切空间, $TM := \cup T_x M = \{(x, y) | x \in M, y \in T_x M\}$ 是 M 的切丛. 流形 $TM \setminus 0$ 称为裂纹切丛, 其中 “0” 表示零截面.

定义 1.1.1 如果函数 $F: TM \rightarrow [0, +\infty)$ 满足

(1) 正则性: F 在 $TM \setminus 0$ 上光滑;

(2) 正齐性: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \quad \forall \lambda > 0;$

(3) 强凸性: 在 $TM \setminus 0$ 的任意局部坐标系 (x^i, y^i) 中, $n \times n$ 矩阵 (g_{ij}) 是正定的, 其中 $g_{ij} := \left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^i y^j},$

则称 F 是流形 M 上的 **Finsler 度量**. 具有 Finsler 度量的流形称为 **Finsler 流形**, 记作 (M, F) . 张量 $g := g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$ 是切丛 TM 上的二阶正定对称共变张量, 称为 F 的**基本张量或度量张量**.

为方便起见, 我们用 $F_{y^i}, F_{y^i y^j}$ 分别表示 $\frac{\partial F}{\partial y^i}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}$, 以此类推. 如无特别声明, 本书将使用如下指标取值范围:

$$1 \leq i, j, \dots \leq n; \quad 1 \leq a, b, \dots \leq n-1;$$

$$\bar{a} = n + a; \quad \bar{i} = n + i;$$

$$1 \leq A, B, \dots \leq 2n-1.$$

Finsler 流形上很多几何量都是齐次函数. 我们首先给出欧氏空间上齐次函数的性质及其应用.

引理 1.1.1(Euler 引理) 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 r 阶正齐次函数, 即对任意的 $\lambda > 0$, 有 $f(\lambda y) = \lambda^r f(y)$, 则

$$f_{y^i} y^i = r f(y).$$

Finsler 度量 F 和基本张量 g 分别是一阶和零阶正齐次函数, 因此

$$\begin{aligned}
F_{y^i} y^i &= F, \quad F_{y^i y^j} y^j = 0, \\
F_{y^i y^j} y^k &= -F_{y^i y^j}, \quad F^2 = g_{ij} y^i y^j, \\
g_{ij} y^i &= F F_{y^j}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^i = \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} y^i = 0.
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

命题 1.1.1^[5] Finsler 度量 F 具有下述性质:

- (1) (正定性) $F(y) > 0, \quad \forall y \neq 0$;
- (2) (三角不等式) $F(u+v) \leq F(u) + F(v)$, 等号成立当且仅当 $u = \lambda v$ 或 $v = \lambda u$;
- (3) (基本不等式) $F_{y^i} w^i \leq F(w), y \neq 0$ 或者 $g_y(y, w) \leq F(y)F(w)$. 等号成立当且仅当 $w = \lambda y, \lambda \geq 0$.

记

$$\begin{aligned}
C &= C_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \quad C_{ijk} := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{4} [F^2]_{y^i y^j y^k}, \\
A &= A_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \quad A_{ijk} := F C_{ijk}, \\
\eta &= \eta_i dx^i, \quad \eta_i := g^{jk} A_{ijk}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}.
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

A (或者 C) 称为 **Cartan 张量**, η 称为 **Cartan 形式**. 显然, A_{ijk} 关于下指标 i, j, k 全对称.

1.1.1.2 射影球丛

设 M 是 n 维光滑流形. 记 $[y] := \{\lambda y | \lambda > 0\}, \forall y \in T_x M$, 我们称

$$SM := \{(x, [y]) | (x, y) \in TM \setminus 0\}$$

为 M 的**射影球丛**. 自然投影 $\pi: TM \rightarrow M$ 确定了射影球丛 SM 的自然投影, 不妨仍记为 π . SM 在点 $x \in M$ 的纤维 $S_x M := \pi^{-1}(x)$ 称为 M 在 x 处的**射影球面**, 它是一个紧致空间. 投影 $\pi: TM \rightarrow M$ 给出了从 M 上的切向量 (场) 和余切向量 (场) 到 $TM \setminus 0$ 或者 SM 上的提升.

在 $TM \setminus 0$ 的任意局部坐标系 (x^i, y^i) 中, 记 $\partial_i = \left(x, y, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, $d^i = (x, y, dx^i)$, 则拉回丛 $\pi^* TM$ 及 $\pi^* T^* M$ 在 $(x, y) \in TM \setminus 0$ 处的纤维为

$$\pi^* TM|_{(x, y)} := \{v^i \partial_i | v \in T_x M\} \cong T_x M,$$

$$\pi^* T^* M|_{(x, y)} := \{\theta_i d^i | \theta \in T_x^* M\} \cong T_x^* M.$$

类似地, 投影 $\pi: SM \rightarrow M$ 给出了 M 上任意张量丛 $T_s^r M$ 到 SM 的拉回丛 $\pi^* T_s^r M$ 的提升. 为简便起见, 对于 M 上任意张量场 Φ , 它在 SM (或者 TM) 上的提升仍记为 Φ .

在 π^*T^*M 中, 记

$$\omega = \ell_i dx^i, \quad \ell_i := F_{y^i}, \quad (1.1.3)$$

称为 **Hilbert 形式**. 其对偶向量场

$$\ell = \ell^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \ell^i := \frac{y^i}{F}, \quad (1.1.4)$$

称为 **特异场**. ω 和 ℓ 分别是射影球丛 SM 上整体定义的一次微分形式和向量场.

引理 1.1.2^[68] 对于 SM 中任意一点 $(x, [y])$, 存在开子集 $U \subseteq SM$ 和局部标架场 $\{e_1, \dots, e_n\} \in \Gamma_U(\pi^*TM)$, 使得 $(x, [y]) \in U \subset SM$, 且

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad e_n = \ell|_U.$$

称 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 π^*TM (在 U 上) 的 **局部适用标架场**.

设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 π^*TM 中的局部适用标架场, $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ 为其对偶标架场. 其中 $\omega^n = \omega$ 是 Hilbert 形式. 记

$$e_j = u_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = v_i^j e_j, \quad (1.1.5)$$

则

$$\omega^j = v_i^j dx^i, \quad dx^i = u_j^i \omega^j. \quad (1.1.6)$$

函数 u_j^i 和 v_i^j 满足关系式^[5]

$$\begin{aligned} v_k^j u_i^k &= \delta_i^j, \quad v_i^k u_k^j = \delta_i^j, \\ v_i^n &= \ell_i, \quad u_n^i = \ell^i, \quad v_i^a \ell^i = 0, \quad u_a^i \ell_i = 0, \\ g_{ij} &= v_i^k \delta_{kl} v_j^l, \quad g^{ij} = u_k^i \delta^{kl} u_l^j, \\ u_j^i &= \delta_{jk} v_l^k g^{li}, \quad v_i^j = \delta^{jk} u_k^l g_{li}, \\ v_i^a v_j^b \delta_{ab} &= F F_{y^i y^j}, \quad u_a^i u_b^j F F_{y^i y^j} = \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

定义

$$\frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad \delta y^i := \frac{1}{F} (dy^i + N_j^i dx^j), \quad (1.1.8)$$

其中,

$$\begin{aligned} N_i^k &= \gamma_{ij}^k y^j - C_{ij}^k \gamma_{rs}^j y^r y^s, \\ \gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

流形 $TM \setminus 0$ 上具有自然的黎曼度量

$$g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j,$$

称为 **Sasaki 度量**. 关于这个度量, $T(TM \setminus 0)$ 存在正交分解

$$T(TM \setminus 0) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V},$$

其中

$$\mathcal{H} = \text{span} \left\{ \frac{\delta}{\delta x^i} \right\}, \quad \mathcal{V} = \text{span} \left\{ F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$$

分别称为 $T(TM \setminus 0)$ 的**水平子丛**与**垂直子丛**. 注意到 $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}, F \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ 的对偶基为 $\{dx^i, \delta y^i\}$, 我们有

$$T^*(TM \setminus 0) = \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{V}^* = \text{span} \{dx^i\} \oplus \text{span} \{\delta y^i\}.$$

于是, 对于任意的 $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM \setminus 0))$, $\Psi \in \Gamma(T^*(TM \setminus 0))$, 有直和分解

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \tilde{X}^H + \tilde{X}^V = \tilde{X}^i \frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{X}^{\bar{i}} F \frac{\partial}{\partial y^i}, \\ \Psi &= \Psi^H + \Psi^V = \Psi_i dx^i + \Psi_{\bar{i}} \delta y^i. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

对于拉回切丛 π^*TM , 尽管它并非 $T(TM \setminus 0)$ 的子丛, 但显然

$$\varsigma_{\mathcal{H}} : \frac{\partial}{\partial x^j} \mapsto \frac{\delta}{\delta x^j}, \quad \varsigma_{\mathcal{V}} : \frac{\partial}{\partial x^j} \mapsto F \frac{\partial}{\partial y^j}$$

分别给出了 π^*TM 与 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 之间的同构. 为方便起见, 对于任意的 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(\pi^*TM)$, 同样记

$$X^H = \varsigma_{\mathcal{H}} X = X^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad X^V = \varsigma_{\mathcal{V}} X = F X^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (1.1.11)$$

令

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &= u_i^j \frac{\delta}{\delta x^j}, \quad \hat{e}_{n+i} = u_i^j F \frac{\partial}{\partial y^j}, \\ \omega^i &= v_j^i dx^j, \quad \omega^{n+i} = v_j^i \delta y^j, \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

则 $\{\hat{e}_i, \hat{e}_{n+i}\}$ 为 $T(TM \setminus 0)$ 关于 Sasaki 度量的幺正基, $\{\omega^i, \omega^{n+i}\}$ 为 $T^*(TM \setminus 0)$ 关于 Sasaki 度量的幺正基, 且满足^[5]

$$\begin{cases} \omega^{2n} = d(\ln F) = \ell_i \delta y^i, \\ \frac{\delta F}{\delta x^i} = 0. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

注意到 ω^{2n} 是径向量 $y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ 的对偶, 因此在 SM 上有 $\omega^{2n} = 0$. 我们分别称

$\{\hat{e}_A\}$ 和 $\{\omega^A\}$ 为 SM 上的局部适用标架场和局部适用余标架场. 于是 $TM \setminus 0$ 的 Sasaki 度量在 SM 上诱导了一个黎曼度量, 可以表示为

$$\hat{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \delta_{ab} \omega^{\bar{a}} \otimes \omega^{\bar{b}} = \delta_{AB} \omega^A \otimes \omega^B. \quad (1.1.14)$$

由此可见, $(SM, \hat{g})$ 是一个黎曼流形, 并且黎曼度量 $\hat{g}$ 完全由 Finsler 度量 F 确定. 这就为研究 Finsler 几何提供了一个途径, 使得我们可以运用黎曼几何的一些结果和技巧来研究 Finsler 几何中的某些问题.

1.1.3 体积元

射影球丛 SM 关于其黎曼度量 $\hat{g}$ 的体积元为

$$dV_{SM} = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{2n-1} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge \omega^{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega^{2n-1},$$

其中 $dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. 通过简单的代数运算可得

$$\omega^{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega^{2n-1} = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{F} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i \delta y^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\delta y^i} \wedge \cdots \wedge \delta y^n,$$

其中 “ $\widehat{}$ ” 表示对应项被删除. 因此

$$dV_{SM} = \Omega dx \wedge d\tau, \quad (1.1.15)$$

其中,

$$\Omega = \det \left(\frac{g_{ij}}{F} \right), \quad d\tau = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y^i dy^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \cdots \wedge dy^n. \quad (1.1.16)$$

射影球丛的体积形式诱导了 Finsler 流形 (M, F) 上的一个体积形式

$$dV_M := \sigma(x) dx, \quad \sigma(x) := \frac{1}{c_{n-1}} \int_{S_x M} \Omega d\tau, \quad (1.1.17)$$

其中 c_{n-1} 表示 $n-1$ 维单位欧氏球面 S^{n-1} 的体积, 即

$$c_{n-1} = \text{vol}(S^{n-1}) = \begin{cases} \frac{2\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}, & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{2^{(n+2)/2} \pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!}, & n \text{ 为奇数}. \end{cases} \quad (1.1.18)$$

该体积形式通常称为 **Holmes-Thompson 体积形式**^[103], 简称 **HT-体积形式**, 记为 dV_{HT} . 如果没有特别声明, 本书中的体积均采用 HT-体积.

除了 HT-体积形式, 还有一种常用的体积形式, 即 **Busemann-Hausdorff 体积形式**, 简称 **BH-体积形式**, 定义为

$$dV_{\text{BH}} = \sigma_{\text{BH}}(x)dx, \quad \sigma_{\text{BH}}(x) := \frac{\text{vol}(\mathbb{B}^n)}{\text{vol}\{(y^i) \in \mathbb{R}^n | F(x, y) < 1\}}, \quad (1.1.19)$$

其中, $\mathbb{B}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, vol 表示取欧氏体积.

与黎曼几何类似, 可以定义 n 维可定向 Finsler 流形 (M, F) 上更一般的体积形式 $d\mu$. 给定一族保持定向的坐标邻域 $\{(\varphi_i, U_i)\}$ 上一族非退化 n -形式 $\{d\mu_i = \sigma_i(x)dx\}$, 它们满足

(1) $M = \cup U_i$;

(2) 若 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, 则在 $U_i \cap U_j$ 上, $d\mu_i = d\mu_j$. 即: 若 $d\mu_i = \sigma_i(x)dx$ 且 $d\mu_j = \sigma_j(\tilde{x})d\tilde{x}$, 则

$$\sigma_i(x) = \det\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right) \sigma_j(\tilde{x}), \quad \det\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right) > 0.$$

由定义, 有

$$\int_{U_i \cap U_j} f d\mu_i = \int_{U_i \cap U_j} f d\mu_j, \quad f \in C_0^\infty(U_i \cup U_j),$$

其中 $C_0^\infty(U)$ 表示 U 上具有紧致支集的光滑函数全体. 设 $\{\psi_i\}$ 是从属于覆盖 $\{U_i\}$ 的单位分解, 则对于任意的 $f \in C_0^\infty(M)$, 有

$$\int_M f d\mu = \sum_i \int_{U_i} \psi_i f d\mu_i.$$

1.2 Finsler 流形上的联络

1.2.1 陈联络

1943 年, 陈省身先生利用 Cartan 外微分方法研究 Finsler 空间的等价问题, 发现了一个简单的联络, 通常称为**陈联络**. 本节主要介绍陈联络的构造、性质及共变导数的计算.

定理 1.2.1 设 (M, F) 为 n 维 Finsler 流形, 则在 π^*TM 上存在唯一的陈联络 ∇ , 使得

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k, \quad (1.2.1)$$

满足

$$\text{无挠性} \quad d(dx^i) - dx^j \wedge \omega_j^i = 0,$$

$$\text{与度量几乎相容性} \quad dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 2A_{ijk}\delta y^k. \quad (1.2.2)$$

陈联络的联络系数可表示为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\delta g_{lj}}{\delta x^i} + \frac{\delta g_{li}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^l} \right). \quad (1.2.3)$$

1.2.2 共变导数

利用陈联络形式 $\{\omega_i^j\}$, 可以定义 $TM \setminus 0$ 上 (p, q) 型张量场的共变导数. 为方便起见, 我们以 $TM \setminus 0$ 上的 $(1, 1)$ 型张量场为例进行说明. 设 $T = T_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i \in \Gamma(\pi^* TM \otimes \pi^* T^* M)$, 其共变微分定义为

$$\nabla T = (\nabla T)_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i, \quad (\nabla T)_i^j := dT_i^j + T_i^k \omega_k^j - T_k^j \omega_i^k.$$

$(\nabla T)_i^j$ 是 $TM \setminus 0$ 上的 1-形式, 在自然基 $\{dx^s, \delta y^s\}$ 下表示为

$$(\nabla T)_i^j = T_{i|s}^j dx^s + T_{i;s}^j \delta y^s.$$

比较可得

$$T_{i|s}^j = \frac{\delta T_i^j}{\delta x^s} + T_i^k \Gamma_{ks}^j - T_k^j \Gamma_{is}^k, \quad (1.2.4)$$

$$T_{i;s}^j = \left(\nabla_{F \frac{\partial}{\partial y^s}} T \right)_i^j = F \frac{\partial T_i^j}{\partial y^s}. \quad (1.2.5)$$

$T_{i|s}^j$ 和 $T_{i;s}^j$ 分别称为 T_i^j 的水平共变导数和垂直共变导数. 特别地, T 沿 Hilbert 方向的共变导数记为 $\dot{T}$, 即

$$\dot{T}_i^j := T_{i|s}^j \ell^s. \quad (1.2.6)$$

对于基本张量 g , 有

$$\begin{aligned} g_{ij|s} &= 0, \quad g_{|s}^{ij} = 0, \\ g_{ij;s} &= 2A_{ijs}, \quad g_{i;s}^{ij} = -2g^{ik} A_{ks}^j. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

对于特异场 $\ell = \ell^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 有

$$\begin{aligned} \ell_{|s}^i &= 0, \quad \ell_{i;s}^i = \delta_s^i - \ell^i \ell_s, \\ \ell_{i|s} &= 0, \quad \ell_{i;s} = g_{is} - \ell_i \ell_s. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

对于 Cartan 张量系数 A_{ijk} , 有

$$A_{ijk|s} \ell^i = 0, \quad A_{ijk;s} \ell^k = -A_{ijs}, \quad \dot{A}_{ijk} \ell^k = 0, \quad (1.2.9)$$

其中 $\dot{A}_{ijk} := A_{ijk|s} \ell^s$.