"十二五"应用型本科系列规划教材

高等数学 下册

Advanced mathematics

杨国增　李青阳　孟红玲　主　编
陈文波　荆自体　主　审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

高 等 数 学

下 册

主 编 杨国增 李青阳 孟红玲
参 编 黄 坤 陈 丽 王建锋
主 审 陈文波 荆自体

机 械 工 业 出 版 社

本套教材是以“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为标准，以提高学生的数学素质与创新能力为目的，为高等学校各专业编写的高等数学类课程教材.

本套教材分为上、下两册. 本书是下册，内容有无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、场论与向量函数初步. 特别针对教学时长较少，学生数学基础较薄弱的实际情况进行了优化设计.

本书适合普通高等院校作为高等数学课程教材使用，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册/杨国增，李青阳，孟红玲主编 . —北京：机械工业出版社，2014. 1

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978 - 7 - 111 - 42228 - 0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①杨…②李…③孟…　Ⅲ. ①高等数学 - 高等学校 - 教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 294342 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉
版式设计：常天培　责任校对：陈秀丽
封面设计：路恩中　责任印制：张　楠
北京京丰印刷厂印刷
2014 年 2 月第 1 版 · 第 1 次印刷
184mm × 240mm · 22 印张 · 378 千字
标准书号：ISBN 978 - 7 - 111 - 42228 - 0
定价：42. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社 服 务 中 心：（010）88361066	教 材 网：http：//www. cmpedu. com
销 售 一 部：（010）68326294	机工官网：http：//www. cmpbook. com
销 售 二 部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo. com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

伽利略说过："宇宙这本书是用数学语言写成的．除非你首先学懂了它的语言，否则这本书是无法读懂的．"而高等数学则是数学中最为精彩的一部分，它是以函数为研究对象，极限为理论基础，导数、级数为研究工具，微积分为核心内容的变量数学．它与最早的初等数学即常量数学有着根本的区别．高等数学是高等院校中的一门重要基础课．理、工、经、管、农、林、医等专业甚至部分文科专业的学生都要学习高等数学．高等数学也是众多专业研究生入学考试的必考科目．

鉴于高等数学课程如此重要，各高校都对高等数学的教学改革投入了大量的人力物力．高等数学课程的教材也根据教学改革的需要，因人、因时、因势而变．本书也反映了我校各位同仁在高等数学教学改革方面的一些理解和感悟．

本书依据教育部数学基础课程教学指导委员会关于"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，适当考虑了硕士研究生入学考试的大纲，分上、下两册，共十三章，其主要特点包括：

1. 内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当．

2. 本书对所涉及的重要问题都有一个全面的阐述．

3. 在一些知识板块的后面，通过思考题等形式的提示帮助读者对核心问题进行深入思考．

4. 每一章节后附有一定量的习题，题型更接近于各类选拔题，其中不少就是近几年来的考研题或专升本真题供读者练习和提高，也方便教师教学使用．

5. 本书涉及的数学家都作了简要介绍，在加深对教材内容理解的同时，帮助读者对数学学科的发展有时空上的直观认识．

本书有部分章节和习题加了"*"号，供选学．

本书可作为工科类本科专业的高等数学教材，也可作为硕士研究生入学考试高等数学第一阶段的复习用书，亦可供科技人员参考．

同时，本书是我校数学与统计学院高等数学精品课程建设的成果，我们也希望借助这套书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流．

本书的编写工作得到院、系、教务处各级领导的大力支持．在编写过程中，很多同事、朋友对如何编好这套书提出了很多宝贵的建议．在编写本书的时候，编者参考了国内外与高等数学相关的许多优秀著作，深受这些专家、院士的启发．我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意．由于编者水平所限，书中不当之处在所难免，敬请广

大读者朋友、同行、专家学者批评指正．本书希望通过编者与读者、同行的共同努力，经日后修订，渐趋成熟．

全书由杨国增、李青阳和孟红玲统稿．具体编写情况如下：王建锋编写第 8 章、第 12 章 12.6 节及第 13 章；陈丽编写第 9 章、第 11 章；黄坤编写第 10 章；杨国增编写第 12 章；李青阳编写数学家简介和习题；孟红玲编写附录．陈文波和荆自体教授审阅了本书的内容并提供了很多建议和帮助．

编 者

目　录

目　录

第 8 章

无 穷 级 数

无穷级数是一种普通的“无限求和运算”，在逻辑上与数列相当，在性质上与另一种特殊的无限求和——定积分类似．无穷级数同微分、积分一样是研究函数性质的重要工具之一，在函数表示、性质探究、数值计算、逼近收敛等方面都有着重要的应用．无穷级数理论是高等数学的一个重要组成部分．

本章按照由简单到复杂再到典型的思路依次对级数理论中的数项级数、函数项级数、幂级数与傅里叶级数进行介绍．

8.1 数项级数的概念与性质

8.1.1 数项级数的概念

著名的德国数学家高斯[⊖]9 岁时做过一个世界名题，即

$$1+2+\cdots+100=\frac{100}{2}\times(1+100)=5050.$$

将此题进行推广可以给出如下几个问题：

⊖ 高斯（Gauss，1777—1855）德国数学家、物理学家、天文学家，近代数学的奠基者之一，在历史上影响之大可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列，有“数学王子”之称．高斯童年时就表现出了出众的才华．1795—1798 年在哥廷根大学期间发现了最小二乘法；宣布了自欧几里德以来几何作图上的一项重大突破即发现正十七边形的作图法，他的成就涉及数论、代数、分析、几何、概率等诸多方面．1799 年因其证明了代数学基本定理而获博士学位．高斯的著作很多，全集共十一卷，其名著《算术研究》是近代数论开创的标志．

(1) $1+2+\cdots+n=?$　　(2) $1+2+\cdots+n+\cdots=?$

(3) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=?$　　(4) $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=?$

(5) $1-1+1-\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots=?$

不难看出，仿照高斯的方法可知(1)的结论为$\frac{n}{2}\times(1+n)$，将高斯的方法进行推广可认为

$$1+2+\cdots+n+\cdots=\lim_{n\to\infty}(1+2+\cdots+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\times(1+n)=+\infty.$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1\times\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]=2.$$

但以上方法对(4)、(5)就无能为力了！可见，要彻底解决这些问题就必须研究“新”的数学结构“$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$”，并建立“无限和式”自身的理论.

定义 8.1　设$\{u_n\}$为一数列，则称由此数列构成的无穷和表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

为**常数项无穷级数**，简称**数项级数**或**级数**，记为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$或$\sum u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{8.1.1}$$

其中u_1为级数的**首项**，u_n为级数的**一般项**或**通项**.

关于级数必须解决以下两个重要问题：

(1) 级数“和”的存在性问题，即用什么方法判断级数的“和”存在？

(2) 计算级数“和”的方法问题，即如何准确、有效地计算级数的“和”？

这两个问题构成了级数理论的主线，下面分别予以回答.

记$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$，并称$S_n$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的**前 n 项和**或**部分和**；称数列$\{S_n\}$为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的**部分和数列**.

因此，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 总对应于一个部分和数列$\{S_n\}$，反之，由数列$\{S_n\}$必可构造相应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$(其中 $u_n = S_n - S_{n-1}, S_0 = 0$).

简单地说，级数就是部分和数列的另一种表现形式，二者可以相互转化.

定义 8.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$ 收敛于 S(即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$),则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**于 S, S 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **的和**,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

若部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**(即$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不存在有限和).

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于S时,称$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ 为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **的余项和**.

事实上，余项的绝对值$|r_n|$就是用s_n 代替 s 所产生的误差.

不难看出，

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(S_n - S) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0. \quad (8.1.2)$$

即级数与数列的敛散性是一致的，在逻辑上判定级数的收敛(发散)性等价于判定其部分和数列的收敛(发散)性.

由收敛定义不难看出上述级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散,下面再介绍几例.

例 8.1 判定级数$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$的敛散性.

解 由 $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

所以级数$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$收敛，且其和为$\frac{1}{2}$.

例 8.2　讨论公比为 q 的等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots,(a \neq 0)$$

的敛散性.

解　当 $q\neq 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

因此：当 $|q|<1$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛；

当 $|q|>1$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散；

当 $q=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a+a+\cdots+a+\cdots$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散；

当 $q=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散 .

综上，当 $|q|<1$ 时几何级数收敛，且和为$\frac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时几何级数发散.

例 8.3　证明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$发散.

证　调和级数的前 n 项和

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \\ &\xlongequal{C=\int_n^{n+1} C\mathrm{d}x} \int_1^2 \mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\mathrm{d}x \\ &\underset{\text{保序性}}{\geqslant} \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1), \end{aligned}$$

显然$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，由保序性知$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 因此，调和级数发散.

8.1.2* 数项级数与无穷积分的关系

（1）无穷积分可转化为级数.

若$f(x)$为定义在$[1, +\infty)$上的有界函数，则

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

（2）级数可转化为无穷积分.

若对任意级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，定义$f(x)=u_n$，$n\leqslant x<n+1$ $(n=1, 2, \cdots)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}u_n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此，级数作为一种“无限和式”与无穷积分有平行的理论和结果，可以用它们其中一个的性质研究另一个的性质.

8.1.3 数项级数的基本性质

性质1（级数收敛的必要条件） 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 不妨设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$S$，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

注 1）通项极限为零仅是级数收敛的必要条件，并非充分条件. 即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$不一定收敛.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$却发散.

2）如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定发散. 此结论可用于判定级数的发散性.

例如，由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq0$知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$发散.

3）由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$可知必存在一个正常数$M$，使$|u_n|\leqslant M$，从而得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的另一必要条件是级数的各项有界.

性质 2　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S,则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛,且其和为 kS(k 为任意常数),即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别为 S_n 与 T_n,则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_n &= \lim_{n\to\infty}(ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n) = \lim_{n\to\infty} kS_n \\ &= k\lim_{n\to\infty} S_n = kS.\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

推论　若 k 为非零常数,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也发散.

证　反证法　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}(ku_n) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$，由性质 2 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛，矛盾.

注　性质 2 与推论表明非零常数不影响级数的敛散性.

性质 3　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = T$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n、T_n、R_n，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty}[(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty}(S_n \pm T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} T_n \\ &= S \pm T.\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

注　1）性质 2 与性质 3 可合写为 $\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n + dv_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n + d\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(c, d 为非零常数)统称为级数的线性性质.

2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散.

事实上,若假设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛,则由

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(v_n \pm u_n) \mp u_n] = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n \pm u_n) \mp \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必收敛,矛盾. 例如由等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛及调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n}\right)$ 发散.

思考 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 是否发散?

性质4 改变(去掉、增加、替换及次序变化)级数的有限项不影响级数的敛散性. 即级数的敛散性与级数的有限项无关,但收敛时,其和可能改变.

证 只需证去掉、增加级数的前有限项不影响级数的敛散性即可(因为其他情形都可以通过在级数的前面先去掉有限项,然后再加上有限项而得到).

将级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_m + \cdots \tag{8.1.3}$$

的前 N 项去掉,得新级数

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \cdots + u_{N+n} + \cdots \tag{8.1.4}$$

并设二者的部分和分别为 S_m、T_n,于是

$$T_n = u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+n} = S_{N+n} - S_N,$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}(S_{N+n} - S_N) = \lim_{n\to+\infty} S_{N+n} - S_N \xlongequal{\text{记 } m=N+n} \lim_{m\to+\infty} S_m - S_N.$$

极限 $\lim_{n\to+\infty} T_n$ 的存在性和 $\lim_{m\to+\infty} S_m$ 的存在性一致,因此,级数(8.1.3)与级数(8.1.4)具有相同的敛散性. 这样就证明了"在级数的前面去掉有限项,不影响其敛散性"

若将级数(8.1.3)看做在级数(8.1.4)的前面增加 N 项而得到的新级数,同理可证"在级数的前面加上有限项,也不影响它的敛散性".

思考 性质4指出级数的敛散性与前有限项无关,那么级数的敛散性与哪些项有关呢?

性质 5（结合律）　在收敛级数的项中任意加括号后，既不影响级数的收敛性，也不改变其和。

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，其部分和数列为 $\{S_n\}$.

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项中任意加括号后得新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{m-1}+1}+\cdots+u_{n_m})+\cdots,$$

记作 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$，其中 v_m 为第 m 个括号内各项之和，其部分和数列为 $\{T_m\}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 $S \Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S. 而级数 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ 的部分和数列 $\{T_m\}$ 为数列 $\{S_n\}$ 的子列，由数列与其子列的关系知：

数列 $\{T_m\}$ 必收敛于 S，即 $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ 收敛且和仍为 S.

注　1）（性质 5 的逆否命题）若在级数的项中加括号后发散，则原级数一定发散. 此结论可用于判定级数的发散性.

例如，对调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 按下列方式加括号后生成的新级数

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots, \tag{8.1.5}$$

它的通项 $u_n=\left(\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \geqslant 2^{n-2}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}(n\geqslant 3)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，由级数收敛的必要条件知级数(8.1.5)发散，从而（由性质 5 的逆否命题）再次证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

2）若在级数的项中加括号后收敛，则原级数不一定收敛.

例如，级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 收敛，而原级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却发散.

以上分析表明：在级数的项中加括号后“增强”了它的收敛性.

习题 8.1

1. 选择题

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$(　　).