CHUDENG HANSHU DE DINGYIYU

初等函数的定义域

何履端

福建人民教育出版社

初等函数的定义域

福建人民教育出版社

内 容 提 要

中学生很经常遇到求函数的定义域的问题，但又觉得困难。这本小册子，主要是为了解决这个问题而写的。它先介绍基本初等函数的定义域，进而比较详尽地介绍了各种类型的初等函数的定义域的求法。既有求解方法的小结，又有不少例题、练习题留给读者。

由于作者有意在书中涉及多方面的中学数学基本知识（尤其是函数的基本概念、解方程组和解不等式组等），也提到中学物理的一些基本公式。因此，本书也有助于高中毕业生的复习。

初等函数的定义域

何履端 编

*

福建人民教育出版社出版

福建省新华书店发行

福州印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 2 印张38千字

1961年11月第1版

1979年10月第2版　1979年10月第2次印刷

印数35,151——62,750

修 訂 版 說 明

函数概念是整个数学课程里最主要的概念之一，它不仅在初等数学里占有极其重要的地位，而且也是学习高等数学不可缺少的基础知识。

函数是中学数学的一项主要内容，而函数的定义域又是确定变量之间函数关系的两个要素之一。同时，不管是研究数的概念的发展与代数式的恒等变形，或者是研究方程与不等式，其本质都与函数的定义域有密切的关系。例如：数的概念的发展与研究就是为了能在给定的条件之下，正确地寻求函数的定义域；代数式恒等变形的实质就是探讨在进行函数解析式变形的过程，函数的定义域是否扩大或缩小的问题；解方程（组）与解不等式（组）又是寻求函数的定义域的必经途径。甚至判定解析式有无意义，方程的解的讨论及产生增减根的原因，不等式的同解性……等问题，也可以从函数的定义域获得解析。所以说，如果我们能够抓住这个关键问题，并围绕它进行研

究，那么对全面、系统地复习与研究上述有关内容无疑是有好处的。

一九六一年，我编写这本书的目的，正是为了帮助中学生围绕函数的定义域问题对中学数学内容作比较全面的复习。这次再版时，我曾根据教育部新颁的《全日制十年制学校中学数学教学大纲》的精神，作了部分修订。在介绍函数、函数的定义域等基本知识时，适当渗入“集合”、“对应”等现代数学思想。因而，第一章的内容修改较多；全书的例题和练习题也酌加改写和补充。但全书编写意图和章节结构均不变动。从现行的教材实际出发，仍按传统的数学方法来介绍定义域的求解。以期本书既可作为中学生的课外读物，又可作为高中数学复习的参考资料。

在这次修订中，曾承吴修民同志协助绘图，郑神佑同志对涉及物理学的题目提供了宝贵意见。谨在此一并致谢。

何 履 端

于一九七九年五月十日

目　　次

第一章　基本概念

§1　函数概念及其表示法

（一）函数概念

设在某变化过程中，有两个变量 x 和 y，变量 y 依赖于 x，如果对于 x 的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有一个确定的值和它对应，y 就叫做 x 的函数．x 叫做自变量，y 也叫做因变量．

因变量 y 是自变量 x 的函数，可以用记号 $y=f(x)$ 来表示．应该注意的是：字母 f 在这里并不是表示量，而是表示函数的关系．也就是表示自变量 x 与函数 y 之间的对应法则．

如果函数 y 只对应一个自变量 x，则称为一元函数（单变量函数）．记做：$y=f(x)$；

如果函数 y 对应几个自变量 x_1，x_2，…，x_n，则称为多元函数（多变量函数）．记做：

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n).$$

以上所述的函数概念，是当前中学课程里所讲的初等函数的定义．由于函数的概念，随着数学的发展，不断得到扩展，所以函数的定义，也随之有所改进．到了本世纪初期，函数概念已发展到以集合论的观点来定义．它把初等函数中变量只限定为“实数”这一框框冲破，使变量可以泛指任何“元素”．使函数的关系，从数的对应关系，扩展到任意元素间的对应关

系．在近代数学里，单变量的单值函数是这样定义的：

如果对于集合M中的每一元素 x，根据某一对应法则 f，在集合N中，总有唯一确定的元素 y 与它对应，那么，我们就称对应法则 f 是定义在集合M上的一个函数．并记为：

$$y=f(x).$$

显然，这里所说的函数，是指一种对应法则，而不是指集合 N 中的元素 y．这时元素 y 看成元素 x 的象，集合 N 看成象的集合，而函数 f，实际上是一种映象法则．

注意，我们熟悉的传统的初等函数的定义，比之依据集合论的观点定义的函数概念，有两点明显的扩展与改进：

（1）前者的 x 与 y，只能是实数，M 与 N 只能是实数集．后者的 x 与 y，可以泛指任何元素，M 与 N 就是由这些元素构成的集合，而不必限于数集．

（2）前者所讲的函数 y，是指对应法则 f 施于自变量x，所得到的函数值 f(x)．而后者，函数是指对应法则f．等式 $y=f(x)$，只表达了集合M与N之间的元素在函数 f 的作用之下所确定的函数对应关系．

这里说明一下，为了不引起混乱，在这本小册子里，函数的含义，仍然按读者熟悉的传统的说法，仍指函数值 f(x)，而不是指对应法则．并且所讨论的范围仍限于实数．这种初等函数，也叫做实变数的实函数．

（二）函数关系的表示法

表示函数关系，有各种不同的方法，通常有下列三种：

1.解析法（又名公式法）：用含有这两个变量和各种数学运算符号的等式，来表示这两个变量间的函数关系．例如函数 $y=x^2+1$．

如果函数 $y=f(x)$是用解析法表示的，那么它的对应法则f,就是按一定顺序施于自变量x的运算的总体.例如$y=x^2+1$，这里f表示下列两种运算总体：

（1）自变量x的平方；

（2）将（1）所得结果，再加上1.

解析法的优点是，形式简单明了，便于理论的研究和计算，但对于函数性质的研究，缺乏直观性.

2.列表法（又名表格法）：把自变量的一系列的值和函数y的对应值，列成表来表示这两个变量间的函数关系. 例如三角函数表，对数表等等. 列表法的优点是，对于表里所列到的自变量各个值，求对应的函数值不必通过计算，可从表上直接查到，它突出了两个集合之间元素的“对应状况”，也就最直接体现近代函数观点. 其缺点是，表内常常只能查到一部份函数值，没有（也不可能）给出全部的函数值.

3.图象法（又名图示法）：用坐标平面上合于函数关系的点的轨迹（也叫做点的集合）来表示函数的对应关系. 图象法的优点是，明显形象，可以直观地看出函数的某些性质. 缺点是，从图象上读出的函数值往往不够精确，对函数性质的研究，有时会不够深刻和细致.

上面已经提到，在集合论里的函数概念，是指两个集合之间的对应法则. 因此，函数关系也可以用箭头列举两个集合里的元素的对应关系来表示（图1）.

例1. 设集合M的元素x和集合N的元素y，按“$x\div(-5)=y$”的关系对应着，则函数$y=f(x)$的关系可以用图2表示出来.

例2. 输出元素y与输入元素x之间的对应法则为：

$$y=3x^2-2x+4,$$

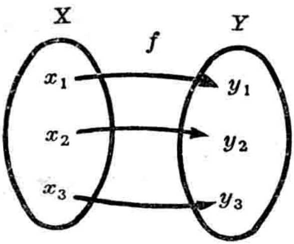

图 1

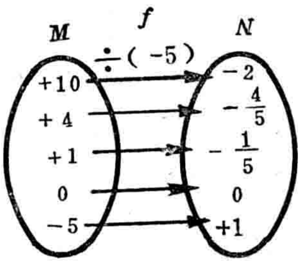

图 2

则函数 y＝f(x)的关系可以用图3表示出来.

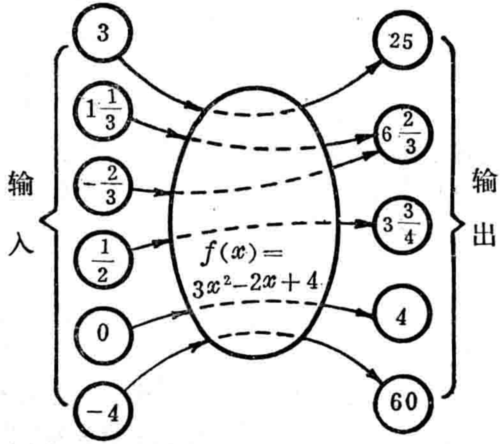

图 3

§2　函数的定义域及其表示法

(一)确定函数的两个要素

由§1所给的函数的定义可以看出，函数是指两个集合之

间元素的对应法则．而两个集合（M与N）的存在，又是函数对应法则 f 存在的前提．因而，可以认为确定函数的两个要素是：

（1）合乎要求的对应法则 f（就是函数的依从关系）．

（2）自变量的可取值的集合M（也就是自变量的允许值范围）．

有了这两个要素，就可以确定出一个函数．反之，缺乏这两个要素中的任何一个都不能确定出一个函数．

（二）函数的定义域的意义

对于函数 $y=f(x)$ 来说，能使函数 y 有意义的所有自变量 x 的值的集合，叫做自变量 x 的可取值范围．简称为函数的定义域．

初等函数的定义域，都是由许多实数构成的数集．

（三）函数的定义域的表示法

函数的定义域的表示法一般有四种．即：不等式表示法、区间表示法、描述法、列举法．

1.不等式表示法：用不等式表示函数的自变量可取值的范围，就叫做不等式表示法．

例3．函数 $y=\sqrt{x}$ 定义域是 $0\leqslant x<\infty$．

例4．函数 $y=\lg x$ 定义域是 $x>0$．

例5．函数$y=\frac{1}{x}$定义域是 $x\neq 0$．

2.区间表示法：

区间的定义：设有二实数 a 与 b，且 $a<b$，所有满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，称为闭区间〔a，b〕；所有满足

不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合，称为开区间（a，b）；所有满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合，称为右开区间（或半闭区间）〔a，b）；所有满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，称为左开区间（或半开区间）（a，b〕.

有时候还会遇到用符号"$+\infty$"（正无穷大）和"$-\infty$"（负无穷大）为一端或两端的区间．例如：（$-\infty$，$+\infty$）它表示所有满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的实数 x 的集合 R（就是实数全体）．以（$-\infty$，b）与（$-\infty$，b〕分别表示所有满足不等式 $-\infty<x<b$ 与 $-\infty<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合；（a，$+\infty$）与〔a，$+\infty$）分别表示所有满足不等式 $a<x<+\infty$ 与 $a\leqslant x<+\infty$ 的实数 x 的集合．这些区间都称为无限区间．

函数的定义域是用区间表示的，叫做区间表示法．

例6．函数 $y=\sqrt{1-x^2}$．我们知道这个函数的定义域是满足不等式 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 的实数集合．所以说这个函数的定义域是闭区间〔-1，$+1$〕．在叙述时，往往把它写成如下几种形式：

（1）函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是〔-1，1〕；

或 （2）函数 $y=\sqrt{1-x^2}$〔-1，1〕；

或 （3）定义在〔-1，1〕上的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$；

或 （4）函数 $y=\sqrt{1-x^2}$　$x\in$〔-1，1〕．

这样看来，凡是可以用不等式来表示的函数的定义域，一定也可以用区间来表示，反之亦然．有时也用不等号来代替区间的符号．例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$．函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域是开区间 $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi$（$k$是整数）．

3．描述法： 有些函数的定义域，不便于用不等式来表示，只

能用描述来说明它，这种表示函数的定义域的方法叫做描述法。

例7．凸n边形的内角和S是边数n的函数．即

$$S=(n-2)\cdot 180^\circ$$

这里自变量n的允许值所组成的集合，就难以用不等式表示，所以只好用描述方法来表示它：函数S的定义域是不小于3的自然数（因为多边形的边数至少是3）．

如果采用集合的表示方法，那么这里S的定义域也就可以写成 $M=\{n:n$ 是不小于3的自然数$\}$．

例8．数列的通项公式，是一个数列的第n项 a_n 和项数n之间的函数关系的表达式．例如自然数列的通项公式：$a_n=n$ 的定义域是一切自然数，即自然数集N．

例9．将10分为两个整数，以这两个整数作为矩形的两条邻边长，则这矩形的面积S为其一边长x的函数，即

$$S=x(10-x).$$

按题意可知，S的定义域是：

集合 $\mathfrak{X}=\{x:1\leqslant x<10$ 的整数$\}$．

4.列举法：把自变量的一切可取值一一列举出来，再用一个大括号框起来．用列举法表示例9的定义域，可写为：

S的定义域　$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$．

由于目前中学教材里对集合的概念和集合的运算还介绍的不多，中学生对集合的概念和运算也比较生疏，所以本册表示定义域的方法，还是以区间法和不等式法为主．

§3　反函数的概念及其定义域问题

（一）反函数的概念

如果变量y是自变量x的函数，即 $y=f(x)$，以变量y改作

为自变量，而以自变量 x 改作为变量 y 的函数$x=\bar{f}(y)$，那么称函数$x=\bar{f}(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数．一般地说，函数 $y=f(x)$也是函数 $x=\bar{f}(y)$的反函数．因此，我们常说函数 $y=f(x)$与函数$x=\bar{f}(y)$互为反函数．习惯上自变量用 x 来表示，函数用 y 来表示，因此通常把$y=f(x)$的反函数写成 $y=\bar{f}(x)$，或$y=f^{-1}(x)$．

例如：

（1）$y=ax+b$ 与 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$；（$a\neq 0$）

（2）$y=a^x$ 与 $x=\log_a y$；（$1\neq a>0$）

等都是互为反函数．

（二）反函数的定义域

从反函数的定义来看，可以知道，反函数 $f^{-1}(x)$ 的定义域，就是它的直接函数$f(x)$的函数值域（即所有的函数值的集合）．

从例（1）、（2）看，一次函数 $y=ax+b$是单值函数，它的反函数 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$也是单值函数．指数函数 $y=a^x$是单值函数，它的反函数 $x=\log_a y$也是单值函数．它们的定义域与值域刚好互换．如此推知，如果两个单值函数互为反函数，则它们的定义域与值域刚好互换．

必须指出，在集合论里，“一一对应”的逆对应，才定义为它的反函数．而在传统的高等数学课程里，还把“多对一”的逆对应，也定义为它的反函数．这样就出现直接函数$f(x)$为单值函数，而它的反函数$f^{-1}(x)$可能为多值函数．例如：单值函数 $y=x^2$的反函数 $y=\pm\sqrt{x}$ 为多值函数，单值函数 $y=\sin x$ 的反函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$（反正弦函数）也是多值函数．多值函数

的性质比较复杂，通常我们不研究多值函数．因此，我们设法来规定反三角函数的单值性．

由于正弦函数 $y=\sin x$ 当自变量 x 的允许值只规定在区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，对于 y 从 -1 到 1 的每一个确定的值，x 都有一个并且只有一个确定的值与它对应．所以我们可以规定：

函数 $y=\sin x$ 在区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内的反函数叫做反正弦函数的主值．区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 称为反正弦函数的主值区间．在主值区间里的反正弦函数就成为单值函数了．此时记作：

$$x=\arcsin y.\ \left(-1\leqslant y\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

因此必须明确：反正弦函数是正弦函数的反函数．正弦函数也是反正弦函数的反函数．但是，正弦函数的定义域与反正弦函数的主值区间是不相同的，因为，反正弦函数的主值区间仅是反正弦函数的值域的一部分，也就是说，主值区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ 仅是正弦函数定义域的一部分．

同理，反余弦函数的主值区间 $[0,\ \pi]$ 仅是余弦函数定义域的一部分；反正切函数的主值区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 仅是正切函数定义域的一部分；反余切函数的主值区间 $(0,\ \pi)$ 也仅是余切函数的定义域的一部分．

第二章　初等函数的定义域的求法

§1　基本初等函数的定义域

（一）基本初等函数

以下所列的各种函数都称为基本初等函数：

（1）常数函数：　$y=f(x)=C$，其中C为常数.

（2）幂 函 数：　$y=x^n$，其中 n 为任何实数.

（3）指数函数：　$y=a^x$，其中 $a>0$且$a\neq 1$.

（4）对数函数：　$y=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

（5）三角函数：　$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\operatorname{tg} x$；

$y=\operatorname{ctg} x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$.

（6）反三角函数：$y=\arcsin x$；$y=\arccos x$；

$y=\operatorname{arc\,tg} x$；$y=\operatorname{arc\,ctg} x$；

$y=\operatorname{arc\,sec} x$；$y=\operatorname{arc\,csc} x$.

（二）初等函数

由基本初等函数经过有限次的初等运算和有限次的复合所得到的函数，统称为初等函数(当然也包括基本初等函数在内).

所谓初等运算，就是指代数运算（加、减、乘、除、整数次的乘方、开方）和初等超越运算（无理数次乘方，对数化，三角运算，反三角运算等）.

例如：$y=ax^2+bx+c$，$y=\log\frac{1}{x}$，$y=2x^2+\operatorname{tg} x$，

$y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sin x}$ 等等都是初等函数．

由此看来，初等函数的对应法则（即函数关系）总可以用有限个的初等运算符号连接常量和自变量所组成的数学式子来表达．也就是说，初等函数都可以用解析法来表示．

初等函数按其函数关系式（数学式子）中所含的运算符号，可作如下的分类：

初等函数
- 代数函数
  - 有理函数
    - 有理整函数（多项式）
    - 有理分函数
  - 无理函数
- 初等超越函数（指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数）

（三）基本初等函数的定义域

由于我们所讨论的对象都是初等函数，而初等函数又都是由几种基本初等函数经过有限次的初等运算和复合而得到的．所以要寻求初等函数的定义域，首先就要熟知各种基本初等函数的定义域．

1.**常数函数**：$y=f(x)=C$．其定义域是一切实数构成的实数集R，也可表示为开区间$(-\infty,\ +\infty)$．

2.**幂函数**：$y=x^n$．其定义域按n的分类，分别确定如下：

（1）当n是整数时：

（Ⅰ）若n是正整数，幂函数$y=x^n$的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$；

（Ⅱ）若n是0，幂函数$y=x^n=x^0$的定义域是$(-\infty,\ 0)$和$(0,\ +\infty)$；

（Ⅲ）若n是负整数，幂函数$y=x^n=\dfrac{1}{x^{-n}}$(显然$-n$