西南财经大学天府学院数学系列教材

高等数学 I

GAODENG SHUXUE I

张现强 王国政 主编

Southwestern University of Finance & Economics Press
西南财经大学出版社

西南财经大学天府学院数学系列教材

高等数学Ⅰ

GAODENG SHUXUE Ⅰ

张现强 王国政 主编

Southwestern University of Finance & Economics Press
西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. Ⅰ/张现强,王国政主编. —成都:西南财经大学出版社,2013.8

ISBN 978-7-5504-1111-1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…②王…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 141952 号

高等数学·Ⅰ

主编:张现强　王国政

责任编辑:邓克虎
封面设计:穆志坚
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	7.5
字　　数	155 千字
版　　次	2013 年 8 月第 1 版
印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	1—6000 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-1111-1
定　　价	22.00 元

前 言

本教材介绍了一元微积分的基础内容及微分方程的简单知识，供普通高等专科院校经济与管理专业的学生使用，亦可供其他专业的读者选用或参考，计划教学时数 40 学时。本书在编写上力求内容适度、结构合理、特色鲜明。

在内容选取上，本教材仅介绍最基本的概念与结论，遵循够用即好的原则。注重概念的引入与讲解，尽可能通过较多的实际问题引入概念，力求阐述概念的实际背景，既增强学生学习的兴趣，也使学生能将抽象的概念同实际联系起来，更易于理解并掌握概念。淡化理论推导过程，弱化了对计算能力的要求。根据内容的难易程度，精心选择，将有些内容作为选学部分，供教师根据情况处理，也可供学生自己阅读与学习。

根据专科学生的特点，为增强学生学习的兴趣，同时也为拓展学生的知识面，本教材中增加了大量阅读材料（如相关知识的背景知识等）。在例题及问题选取上，特别注意多选经济等方面应用的实例，既有利于培养学生解决实际问题的能力，又为经管类专业学生的专业课学习奠定较好的基础，同时也兼顾了其他专业读者的需要。

本教材由张现强撰写初稿，王国政负责全书的策划、审稿。两位编者现均为西南财经大学天府学院的专职教师，具有多年的教学实践及丰富的教学经验。在历时两年多的编写过程中，两位编者结合学院的教学思想和培养目标，经常就某一概念或内容的处理反复讨论，形成了这本极具特色的教材。

在此谨向所有参考文献的作者致以诚挚的谢意。由于编者学识有限，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请各位同行与读者不吝批评与指正。

编者

2013 年夏于西南财经大学天府学院

目 录

第一章　函数

函数是数学最基本的概念之一，在日常生活中，人们常说“股票市场的行为是用户信心的函数”、“销售某种商品的利润是销售量的函数”等. 在当今经济迅猛发展的时代，人们越来越关心各类经济变量指标及其变化趋势，如股票指数、房价指数、国内经济产值（GDP）、物价指数（CPI）等，而这些指标都受诸多因素的影响和制约，是这些因素的函数. 函数是微积分的研究对象，它揭示了不同对象的数量之间的关系. 本章讨论函数的有关概念，并介绍一些常见经济函数模型.

第一节　函数的概念

经常有人说，“时代在发展，社会在进步”，“世界上唯一不变的就是变化”. 的确，生活中很多事物都在不断地发生运动变化. 正所谓“数学是实际问题的抽象，而数学又可以解决实际问题”. 生活中很多运动变化现象，都可以抽象为变量与变量之间的依赖关系. 函数正是用来表示自变量与因变量之间的联系的数学概念.

先来看几个例子.

例1　图1－1是上海证券交易所某公司股票在一个交易日中的走势，从图中可以清楚地看出其成交价格随时间的波动变化情况.

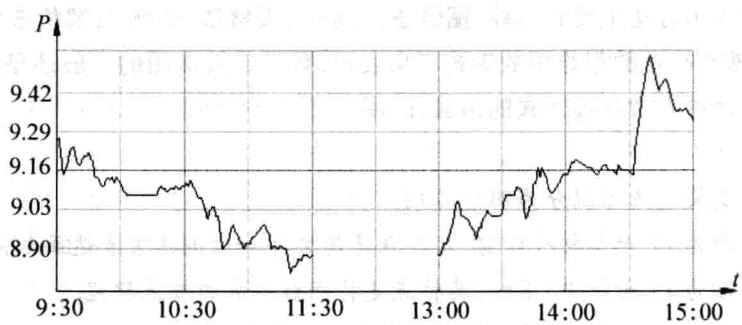


图1－1　股票成交价格随时间变动的情况

在图1－1中，时间在变化，股票的价格也在变化，但对于某个任意确定的时刻，都有唯一的价格与之对应.

例 2　2012 年 12 月某市的气温异乎寻常的低，表 1 - 1 给出了 17 ~ 24 日每天的低温.

表 1 - 1　　**2012 年 12 月某市气温表**

日期	17	18	19	20	21	22	23	24
低温(℃)	-14	-21	-30	5	-9	-23	-31	-35

在表 1 - 1 中，虽然没有气温的公式，但是每天必定产生且只产生一个低温. 对于这几天中任意确定的一天，都有唯一的一个低温与之对应.

例 3　当商家推出某种新的游戏光盘时，根据销售数据得出其销售量 y 与时间 t 的关系式如下：

$$y=\frac{200t}{t^2+200}.$$

从以上表达式中可知，对于任意确定的时间 t，都有唯一的一个销售量 y 与之对应.

综合以上各例的共同点，我们可以定义函数概念如下：

定义 1.1　设两个变量 x 和 y 之间有某种对应关系，即对于任意一个确定的 x，有唯一确定的 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**. 两者之间的函数关系记作 $y=f(x)$，通常称 x 是**自变量**，y 是**因变量**，所有自变量 x 取值的集合称为函数的**定义域**，对应因变量 y 取值的集合称为函数的**值域**.

在上面的例子中，也许你没有想到像股价这样无法预言的现象还会与函数有关系，然而股价的确是时间的函数. 虽然没有股价的公式(否则我们炒股都不会亏了)，但股价还是满足函数的定义：对于某个确定的时刻，有唯一的一个价格与之对应. 函数的本质就是两个变量之间的对应关系. 同样，光盘销售量是销售时间的函数，某时间段里每日低温是关于日期的函数.

函数的表示方法主要有三种：**图像法**，如例 1；**表格法**，如例 2；**解析法(公式法)**，如例 3. 虽然有些函数很难用数学式子来表示，数学上最常用的一般还是解析法，今后我们主要讨论有数学表达式的函数，以便进行量化分析.

函数的发展大体可以分为四个时期：

第一时期为 17 世纪初叶以前，其特点是用文字和比例语言表达函数关系.

第二时期为 17 世纪中、下叶，其特点是将函数当成曲线来研究.

第三时期为 18 世纪，其特点是将函数定义为解析表达式.

第四时期为 19 世纪初叶之后，这时已给出了关于函数的明确的现代定义.

17 世纪早期，由于天文学和航海事业的发展，科学家以如何解释地球运动原理、如何解释天体运动作为研究课题，从这些对运动的研究中推动了函数概念的发展. 在此后的 200 年里，函数概念几乎在涉及数学的所有工作中都占据了中心的位置.

意大利科学家、数学家伽利略在其编写的近代力学著作《两门新科学》一书中，几乎从头到尾隐含了函数概念，他用文字和比例语言表达函数关系.

法国哲学家、数学家笛卡儿引入坐标与变量，致使数学发生了巨大的变革. 变量的引入，导致了函数概念的产生. 笛卡儿在研究 y 和 x 是变量的时候，也注意到 y 依赖于 x 而变化这一特性，这是函数的萌芽.

"函数"(function)这个词作为数学术语，是微积分奠基人之一、德国哲学家、数学家莱布尼兹在他 1673 年的手稿中首次使用的. 但其涵义与现在不同. 他当时用"函数"来表示任何一个随曲线上的点的变动而变动的量，例如切线、法线等的长度. 我们可以把莱布尼兹建立的概念看成是函数的第一个定义. 17 世纪引入的绝大多数函数都是被当成曲线来研究的. 这也是 17 世纪后半叶极有成效的、辉煌的观念之一.

1734 年瑞士数学家欧拉引入符号 $f(x)$ 表示函数. 在其 1748 年的著作《无穷小分析引论》一书中，他将"解析表达式"定义为函数，指出"变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的".

欧拉关于"解析表达式"的定义要比莱布尼兹的定义广泛得多. 它不仅包括由加、减、乘、除、开方等代数运算所得到的代数多项式，还包括 $\sin x$、$\cos x$ 等三角式及 a^x 指数式等. 欧拉也曾指出"在 xy 平面上徒手画出来的曲线所表示的 y 与 x 之间的关系"为函数. 1755 年欧拉在《微分学原理》中又给出了另一种定义:"如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之而变化，则将前面的变量称为后面变量的函数."

欧拉前后使用了三种定义:①"解析表达式"；②"由曲线所确定的关系"；③"依赖变化". 用现代观点看，这三种关于函数的定义都有一定的局限性."解析表达式"、"依赖变化"两个定义较易理解，而且现在仍然被一些通俗读物采用. 其缺点是过于狭窄. 因为许多函数不能用解析表达式表出. 也有的函数不随自变量 x 的变化而变化(例如，外埠平信的邮资 y 是信件重量 x 的函数，但只要 x 不超过 20 克，不管 x 多重，邮资总是 8 角，在一定范围内 y 不随 x 而变)."由曲线所确定的关系"这个定义虽接近现代定义，但仍不够明确. 然而不管怎样，欧拉的定义对后世影响颇大.

1837 年德国数学家狄利克雷提出了近似于现代的定义:"对于在某个区间上每一确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫做 x 的函数."从而破除了函数与解析式等同的局限性，扩大和澄清了函数的概念. 在 1829 年，他给出了如下具有典型意义的例子:

$$y=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

这种与传统上迥然不同的函数表示，正是数学从研究函数的"计算"转变为研究函数的"概念、性质、结构"的开始.

19 世纪 70 年代，德国数学家康托的集合论出现以后，函数又被定义为集合间的

对应关系. 现在许多教科书中采用此"集合对应"的定义. 这种定义法摆脱了"自变量"提法的缺陷. 因为对于变量而言,必定随某个过程而变,即它不可能脱离"过程"而"自变". 用"集合对应"定义函数则无需依赖过程. 因此,目前有些学者主张废弃"变量"这个词,而将"自变量"、"因变量"改称为"第一值"(first entry)、"第二值"(second entry).

20 世纪 60 年代以后的一些教科书中采用的函数定义是:"设 f 为一个序偶的集合,如果当 $(x,y)\in f$,且 $(x,z)\in f$ 时,$y=z$,则称 f 为一个函数."在这个定义中,只牵涉到集合的概念,序偶也用集合来定义. 由于集合本身是一个不定义的概念,从而使得函数概念更精炼,避免了意义不明确的提法.

下面我们再来看几个函数的例子:

例 4　合理纳税是每个纳税人应尽的义务. 根据 http://www.geshui.com,查得个人所得税速算表(2011 年 9 月前标准). 再根据修改后的个人所得税计算,可以得出,应缴税金 $f(x)$ 与个人工资、薪金所得 x 之间的关系为:

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000,\\ 0.05\times(x-2000), & 2000<x\leqslant 2500,\\ 0.1\times(x-2000)-25, & 2500<x\leqslant 4000,\\ 0.15\times(x-2000)-125, & 4000<x\leqslant 7000.\end{cases}$$

例 5　函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为**符号函数**,一般记为 $f(x)=\operatorname{sgn}x$,它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $Z=\{-1,0,1\}$,如图 1-2. 事实上:

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

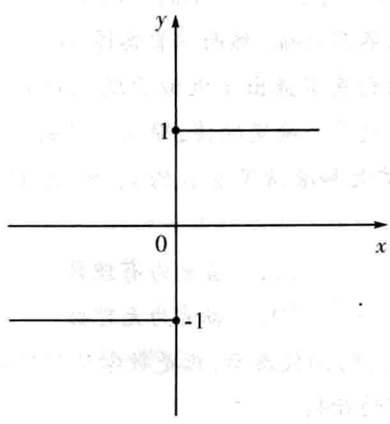


图 1-2

像上面例4、例5中的函数，在不同的自变量取值范围内对应的函数表达式也不同的函数称为**分段函数**. 分段函数整体还是要看成一个函数. 除此之外，请大家再考虑一下生活中还有哪些分段函数?

如果一个经济变量 y 的变化是由单个因素 x 的变化引起，x 按照一定的经济规律 f 影响着 y，那么我们就可以建立函数模型 $y=f(x)$，通过对模型的分析求解来预测变量 y 的变化趋势，或者通过选择、调整和控制 x 来实现 y 的某个目标.

在现实经济生活中，影响一个经济指标 y 的因素往往会有很多个. 例如，国内生产总值(GDP)是指在一定时期内(一个季度或一年)，一个国家或地区的经济中所生产出的全部最终产品和劳务的价值，常被公认为衡量国家经济状况的最佳指标. 它不但可反映一个国家的经济表现，更可以反映一国的国力与财富. 一般来说，国内生产总值共有四个不同的组成部分，包括消费、私人投资、政府支出和净出口额，每一部分发生改变都会影响GDP的大小.

定义1.2 对于某种变量 y，若其影响因素有多个，如 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，考虑因变量 y 受各个因素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的影响，我们可以建立由 n 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

称这种函数为 **n 元函数**，或**多元函数**.

本书主要讨论一元函数的性质，并适当推广到多元函数.

例6 为避免飞行的飞机有太多空位，航空公司将一部分票以全价出售，一部分打折出售. 对于一个特定的航线，航空公司在给定时期内的收益 R 由售出的全价票的数量 x 和折扣票的数量 y 决定. 假设每张全价票价格为850元，折扣票价格为600元，则收益函数的公式为

$$R=850x+600y.$$

这里，R 为关于 x 和 y 的二元函数.

第二节　函数关系的建立

数学概念是对实际问题的抽象，我们要用数学来解决实际问题，首先需要找出变量之间的联系，建立实际问题的函数模型. 数学模型就是把实际问题用数学语言抽象概括，再从数学角度来反映或近似地反映实际问题时，所得出的关于实际问题的数学描述.

例1 某个广告公司特约在SC电视台播放甲、乙两部连续剧. 经调查，播放甲连续剧平均每集有收视观众20万人次，播放乙连续剧平均每集有收视观众15万人次，公司要求电视台每周共播7集.

(1)设一周内甲连续剧播放 x 集，甲、乙两部连续剧收视观众的人次总和为 y 万

人次，求 y 关于 x 的函数表达式.

(2)已知电视台每周只能为该公司提供不超过300分钟的播放时间，并且播放甲连续剧每集需50分钟，播放乙连续剧每集需35分钟，请你用所学知识求电视台每周应播放甲、乙两部连续剧各多少集，才能使得每周收看甲、乙连续剧的观众的人次总和最大，并求出这个最大值.

解　(1)设甲连续剧一周内播 x 集，则乙连续剧播 $(7-x)$ 集.

所以　$y=20x+15(7-x)=5x+105$.

(2)由 $50x+35(7-x)\leqslant 300$

解得　$x\leqslant 3\dfrac{2}{3}$

又 $y=5x+105$ 的函数值随着 x 的增大而增大，且 x 为自然数.

所以，当 $x=3$ 时，y 有最大值 $3\times 5+105=120$(万人次)，$7-x=4$.

从而，电视台每周应播放甲连续剧3集，播放乙连续剧4集，才能使每周收视观众的人次总和最大，这个最大值是120万人次.

例2　随着城市建设的快速发展，某城市对花木的需求量逐年提高. 某园林专业户计划投资种植花卉及树木，根据市场调查与预测，种植树木的利润 y_1 与投资量 x 成正比例关系，如图1-3(a)所示；种植花卉的利润 y_2 与投资量 x 成二次函数关系，如图1-3(b)所示(注:利润与投资量的单位为万元).

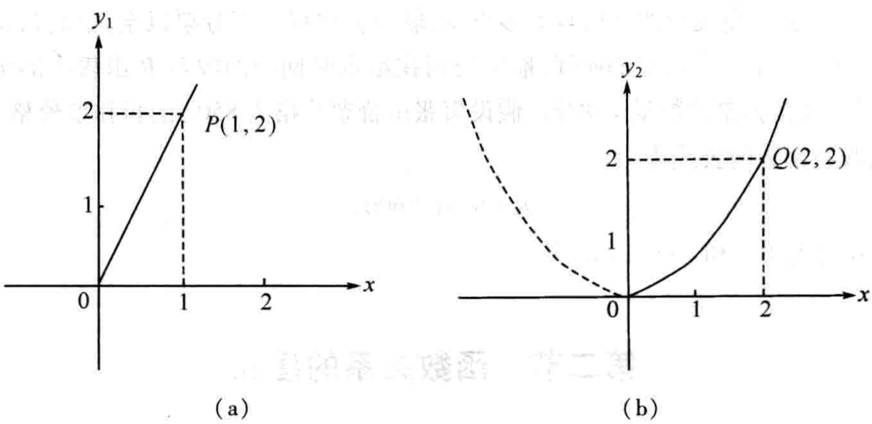


图1-3

(1)分别求出利润 y_1 与 y_2 关于投资量 x 的函数关系式；

(2)如果这位专业户以8万元资金投入种植花卉和树木，他至少获得多少利润？他能获取的最大利润是多少？

解　(1)设 $y_1=kx$，由图1-3(a)所示，函数 $y_1=kx$ 的图像过点 $P(1,2)$，所以 $2=k\cdot 1$，$k=2$，

故利润 y_1 关于投资量 x 的函数关系式是 $y_1=2x$；

设 $y_2=ax^2$，由图1-3(b)所示，函数 $y_2=ax^2$ 的图像过点 $Q(2,2)$，

所以 $2=a\cdot 2^2, a=\frac{1}{2}$,

故利润 y_2 关于投资量 x 的函数关系式是 $y_2=\frac{1}{2}x^2$.

(2)设这位专业户投入种植花卉 x 万元($0\leqslant x\leqslant 8$),则投入种植树木($8-x$)万元,他获得的利润是 z 万元,根据题意,得

$z=2(8-x)+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2-2x+16=\frac{1}{2}(x-2)^2+14$,

当 $x=2$ 时,z 的最小值是 14;

因为 $0\leqslant x\leqslant 8$,有 $-2\leqslant x-2\leqslant 6$,$(x-2)^2\leqslant 36$,$\frac{1}{2}(x-2)^2\leqslant 18$,

所以 $\frac{1}{2}(x-2)^2+14\leqslant 18+14=32$,即 $z\leqslant 32$,此时 $x=8$.

即 当 $x=8$ 时,z 的最大值是 32.

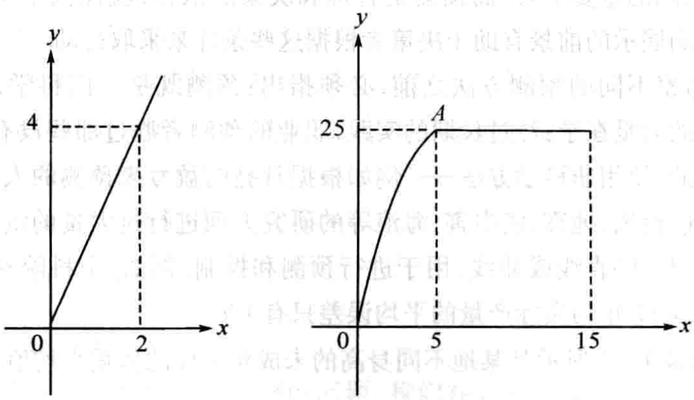
例 3 王亮同学善于改进学习方法,他发现对解题过程进行回顾反思,效果会更好. 某一天他利用 30 分钟时间进行自主学习. 假设他用于解题的时间 x(单位:分钟)与学习收益量 y 的关系如图 1-4(a)所示,用于回顾反思的时间 x(单位:分钟)与学习收益量 y 的关系如图 1-4(b)所示(其中 OA 是抛物线的一部分,A 为抛物线的顶点),且用于回顾反思的时间不超过用于解题的时间.

(1)求王亮解题的学习收益量 y 与用于解题的时间 x 之间的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围;

(2)求王亮回顾反思的学习收益量 y 与用于回顾反思的时间 x 之间的函数关系式;

(3)王亮如何分配解题和回顾反思的时间,才能使这 30 分钟的学习收益总量最大?

(学习收益总量 = 解题的学习收益量 + 回顾反思的学习收益量)



(a)　　(b)

图 1-4

解　(1)设 $y=kx$,把(2,4)代入,得 $k=2$.

所以 $y=2x$. 自变量 x 的取值范围是:$0\leqslant x\leqslant 30$.

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时,设 $y=a(x-5)^2+25$,

把(0,0)代入,得 $25a+25=0$,$a=-1$.

所以 $y=-(x-5)^2+25=-x^2+10x$,

当 $5\leqslant x\leqslant 15$ 时,$y=25$,

即 $y=\begin{cases}-x^2+10x, & 0\leqslant x\leqslant 5,\\ 25, & 5\leqslant x\leqslant 15.\end{cases}$

(3)设王亮用于回顾反思的时间为 $x(0\leqslant x\leqslant 15)$ 分钟,学习收益总量为 Z,则他用于解题的时间为 $(30-x)$ 分钟.

当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时,

$$Z=-x^2+10x+2(30-x)=-x^2+8x+60=-(x-4)^2+76.$$

当 $x=4$ 时,$Z_{最大}=76$.

当 $5\leqslant x\leqslant 15$ 时,

$$Z=25+2(30-x)=-2x+85.$$

因为 Z 随 x 的增大而减小,所以当 $x=5$ 时,$Z_{最大}=75$.

综合所述,当 $x=4$ 时,$Z_{最大}=76$,此时 $30-x=26$.

即王亮用于解题的时间为 26 分钟、用于回顾反思的时间为 4 分钟时,学习收益总量最大.

由以上例子我们可以概括出建立函数关系的步骤大体可分为以下几步:

(1)分析题意;

(2)列出等量关系;

(3)等式变形列出函数解析式;

(4)根据问题的实际意义给出函数的定义域.

数学是预测的重要工具,而预测是管理和决策的依据,就像汽车明亮的前灯一样,良好的预测展示的前景有助于决策者根据这些条件来采取行动.

在我们考察不同的预测方法之前,必须指出:预测既是一门科学,也是一门艺术. 科学预测的力量在于:经过长期的实践,职业的预测者胜过那些没有受过专业训练的、非系统的、使用非科学方法——例如根据月亮的盈亏来预测的人. 我国数学工作者在对天气、台风、地震、病虫害、海浪等的研究方面进行过大量的统计,对数据进行处理,拟合出一些直线或曲线,用于进行预测和控制. 例如,中科院对我国粮食产量的预测,连续 11 年与实际产量的平均误差只有 1%.

例 4　如表 1－2 所示是某地不同身高的未成年男性的体重平均值.

表1－2

身高(cm)	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
体重(kg)	6.13	7.90	9.99	12.15	15.02	17.50	20.92	26.86	31.11	38.85	47.25	55.05

(1)根据表1－2中各组对应的数据，能否从我们学过的函数 $y=ax+b$，$y=a\ln x+b$，$y=a\cdot b^x$ 中找到一种函数，使它比较近似地反映该地未成年男性平均体重 y 关于身高 x 的函数关系，试写出这个函数的解析式，并求出 a，b 的值.

(2)若平均体重超过相同身高男性体重平均值的1.2倍为偏胖，低于0.8倍为偏瘦，那么该地某一男生身高175cm、体重78 kg，他的体重是否正常？

分析：根据表1－2的数据画出散点图(图1－5)，观察这个散点图，发现各点的连线是一条向上弯曲的曲线，因此，可以判断若用函数 $y=ax+b$ 来近似反映就不大合适. 根据这些点的走向趋势，我们可以考虑用函数 $y=a\cdot b^x$ 来近似反映.

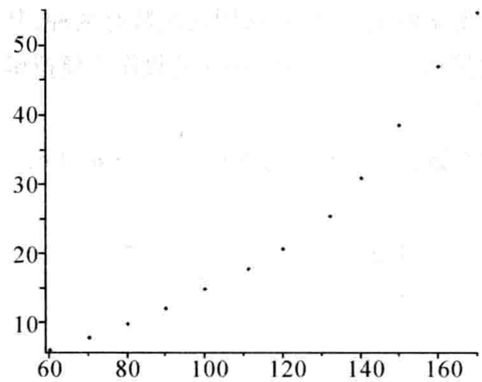


图1－5

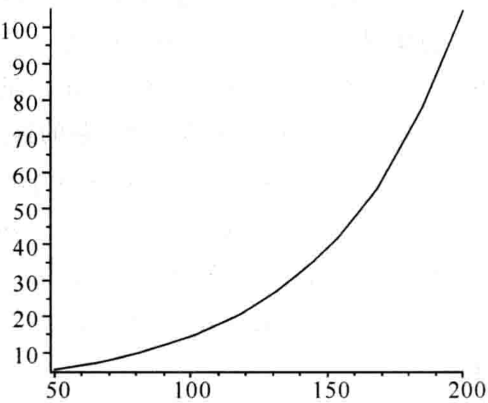


图1－6

解 (1)将已知数据输入计算机，画出散点图1－5；

根据图1－5，选择函数 $y=a\cdot b^x$ 进行拟合；

如果保留两位小数可得 $a=2$，$b=1.02$；

所以，该地区未成年男性体重关于身高的函数关系式可以选为 $y=2\times1.02^x$.

将已知数据代入所得函数关系式，或作出所得函数的图像如图1－6，可知所求函数能较好地反映该地区未成年男性体重平均值与身高的关系.

(2)将 $x=175$ 代入 $y=2\times1.02^x$，得 $y=2\times1.02^{175}\approx63.98$.

由于 $\dfrac{78}{63.98}\approx1.22>1.2$，

所以，这个男生体重偏胖.

本题是一个关于函数拟合与预测的问题，我们在处理此类问题时，通常需要掌握以下步骤：

(1) 能够根据原始数据、表格，绘出散点图.

(2) 通过考察散点图,画出“最贴近”的直线或曲线,即拟合直线或拟合曲线. 如果所有实际点都落到了拟合直线或曲线上,那么这将是十分完美的事情,但在实际应用中,这种情况几乎是不可能发生的. 因此,使实际点尽可能均匀分布在直线或曲线两侧,使两侧的点数大体相等,并且尽可能地靠近这条直线或曲线,这样得出的拟合直线或拟合曲线就是“最贴近”的了.

(3) 根据所学函数知识,求出拟合直线或拟合曲线的函数关系式.

(4) 利用函数关系式,根据条件对所给问题进行预测和控制,为决策和管理提供依据.

例 5 某工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某种产品的数量分别是 1 万件、1.2 万件、1.3 万件,为了估计以后每个月的产量,以这三个月的产品数量为依据,用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系,模拟函数可以选用二次多项式函数或函数 $y=a\cdot b^x+c$(其中 a,b,c 为常数). 已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件,请问用以上哪个函数作为模拟函数较好,并说明理由.

分析: 根据题意,该产品的月产量 y 是月份 x 的函数,可供选用的函数有两种,其中哪一种函数确定的 4 月份该产品的产量愈接近于 1.37 万件,哪种函数作为模拟函数就较好,故应先确定出这两个函数的具体解析式.

解 设 $y_1=f(x)=px^2+qx+r$(p,q,r 为常数,且 $p\neq 0$),$y_2=g(x)=a\cdot b^x+c$,

根据已知,得 $\begin{cases} p+q+r=1, \\ 4p+2q+r=1.2, \\ 9p+3q+r=1.3. \end{cases}$ 及 $\begin{cases} ab+c=1, \\ ab^2+c=1.2, \\ ab^3+c=1.3. \end{cases}$

解得

$$p=-0.05,q=0.35,r=0.7;a=-0.8,b=0.5,c=1.4.$$

所以

$$f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7,g(x)=-0.8\times 0.5^x+1.4,$$
$$f(4)=1.3,g(4)=1.35.$$

显然 $g(4)$ 更接近于 1.37,故选用 $y=g(x)=-0.8\times 0.5^x+1.4$ 作为模拟函数较好.

第三节 简单经济函数

本节我们考察经济学中常用的一些函数.

一、成本函数

成本函数 $C(q)$ 表示生产数量为 q 的某产品的总成本.

$C(q)$ 是哪种函数呢? 一般情况下,生产的产品越多,总成本越高,所以 $C(q)$ 是

一个递增函数. 生产成本又可以分成两部分:**固定成本**,即使什么都不生产它们也要被算入;**可变成本**,它们由生产的产品多少决定.

我们考虑下面一个制造成本的例子:

某制造收音机的公司,生产所需要的厂房和机器设备是固定成本,即使没有制造收音机它们也要被算入. 劳动力和原材料的费用是可变成本,因为这些由制造的收音机多少决定. 设该公司的固定成本是 24 000 美元,而可变成本是每台收音机 7 美元,则

$$\text{公司的总成本} = \text{固定成本} + \text{可变成本} = 24\ 000 + 7 \times \text{收音机数}$$

若 q 是生产的收音机数量,则

$$C(q) = 24\ 000 + 7q.$$

这是斜率为 7 垂直截距为 24 000 的直线方程.

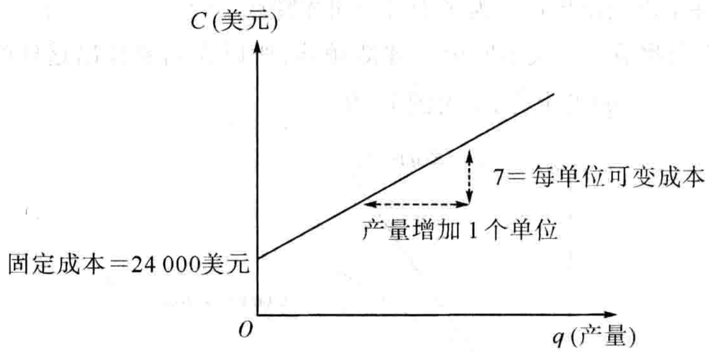


图 1-7

二、收益函数

收益函数 $R(q)$ 表示销售量为 q 的某产品所获得的总收益.

如果产品以每单位 p 的价格销售,销售量为 q,而收益 = 价格 × 销售量,即

$$R(q) = pq$$

如果价格不依赖于销售量,即价格是常数,则收益作为 q 的函数,图形是一条经过原点的直线,且斜率等于价格 p.

上例中,如果收音机每台卖 15 美元,制造商的收益函数为 $R(q) = pq = 15q$,图形如图 1-8 所示.