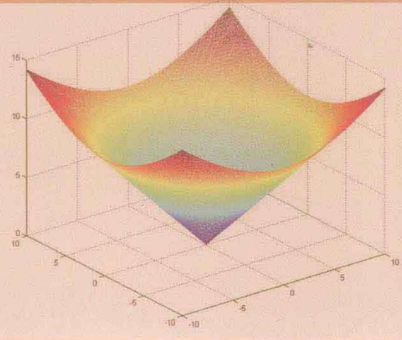
高等学校教材

数学建模 第2版

主编 陈光亭 裘哲勇



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

数学建模 第2版

Shuxue Jianmo

主编 陈光亭 裘哲勇

编者 李炜 沈灏 程宗毛

李承家 张智丰

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书根据作者多年的教学经验编写而成，主要内容包括数学规划与组合优化建模、方程建模、随机方法建模、模糊和灰色系统建模，以及常用数学软件与算法等，涵盖了数学建模常用的方法和工具。每部分内容安排上不追求知识的系统性和完整性，更多地以大量建模问题实例和涉及面较广的背景素材引出需要的方法，并在此基础上简要介绍相关基础知识和基本方法的使用。各部分内容之间具有相对独立性，有利于教师在教学中根据不同的需求以及教学时数的多少进行取舍。

本书可作为一般院校大学生“数学建模”课程的教材，也可作为指导大学生数学建模竞赛的培训参考书，以及供相关科技工作者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/陈光亭，裘哲勇主编. --2 版. --北京：高等教育出版社，2014.1
ISBN 978-7-04-038705-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈… ②裘… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 271291 号

策划编辑 杨 波　　责任编辑 杨 波　　特约编辑 徐 飞　　封面设计 张 志
版式设计 余 杨　　插图绘制 杜晓丹　　责任校对 李大鹏　　责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市白帆印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 29.25
字　　数 530 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2010 年 2 月第 1 版
　　　　 2014 年 1 月第 2 版
印　　次 2014 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 42.30 元

物 料 号 38705-00

再版前言

《数学建模》教材出版以来，经过一些学校试用，很多外校教师对该书内容提出了很好的修改意见和建议。根据各方面意见建议以及数学建模实际教学需要，编写团队进行了认真讨论，决定对原教材进行修订。

新版数学建模教材在全书结构上保持了原教材的格局，同时针对地方性高校学生的实际情况，补充建模常用的数学基础知识和方法，并把不同的建模案例和应用方法贯穿在各章内容之中，以利于学生尽快熟悉数学建模，并掌握基本的建模方法。此次修订，总的思路是保留并进一步强化原教材的优点，对原教材中不当之处进行修改，并对某些章节内容作了压缩简化。主要体现在以下几点：

简化和压缩基础理论的篇幅。第6章中随机方法本身的内容有所减少和简化，但增加了比较多的应用实例，第7章减少了模糊数学理论的篇幅，应用案例则进一步强化，第8章作为常用算法及软件实现，对数学软件的基础性内容介绍进行简化和压缩，而在实现例子的选择上强调与前面各章内容的结合，可以使学生更好地了解数学软件如何用于前面各章所涉及的数学模型。

在原有基础上，进一步增加理论与实际应用紧密结合的建模案例，更加强调数学建模教材的实用性，突出建模的特性。

增加了习题。练习分为几种类型，一种是针对基础性内容的直接应用，另一种是比较简单的建模练习，还有一部分是有一定难度的建模训练题。

教材的修订工作仍由杭州电子科技大学数学建模教学团队集体完成，各章的具体负责人与第一版相同，最后由陈光亭统稿完成。

作　者

2013年7月

第一版前言

随着现代科学技术的迅速发展，特别是计算机技术的迅速普及与发展，数学的应用范围在迅速扩大，已经从传统的物理、力学以及一般工程技术范围迅速扩展到医学、生态、气象、经济、社会科学等领域，数学已经成为关系国民经济技术基础和国家实力的重要学科。今日的数学已经不仅仅是纯粹的理论，同时还是一种普遍可行的关键技术，成为所有科学不可缺少的工具和高技术的核心成分。

用数学的方法去解决实际问题，必须运用定量分析的方法，在数学向技术转化的链条上，数学建模以及在此基础上的计算和模拟处于中心环节。建立一个恰当合理的数学模型，需要一定的数学工具，更需要运用数学工具的能力，需要一定的创新能力，更需要参与者有较高的综合素质。传统的以传授知识、强调演绎推理为主的数学教学很难满足时代的要求，数学建模课程的开设和大学生数学建模竞赛的开展正好弥补了传统数学教学的不足。数学建模教学是一种创新型人才培养的重要手段已经是不争的事实。

作为一所地方性高等院校，杭州电子科技大学开展数学建模活动始于1995年。学校最初开设数学建模课程只是为了让部分优秀学生参加大学生数学建模竞赛，但学校很快认识到这项活动对人才培养的重要意义，因此，陆续面向全校学生开设了有关数学建模的不同层次不同形式的系列课程，所开课程深受学生欢迎，修读数学建模课程的学生数量从最初的几十名、一两个班到目前全校每年多达2 000名左右，组成十几个教学班，学生中形成了浓厚的数学建模氛围。学校在开设课程的基础上，面向全校组织数学建模竞赛，并选拔学生参加全国和美国建模竞赛。自参加全国和美国数学建模竞赛以来，我校在历年的竞赛中均取得了优异的成绩，得到了各方面的高度评价。

考虑到地方性高校学生的具体情况，我校数学建模教练组从1997年开始编写适用的数学建模入门教材在校内使用，在使用过程中多次修改更新，逐步形成了现在这本教材。本教材的内容安排主要考虑地方性普通高校学生的实际情况，首先补充建模常用的数学基础和方法，并把大小不同的建模案例和应用方法贯穿在每一章内容之中，以利于学生尽快熟悉数学建模，并掌握其基本方法。教

材共分八章，内容上涉及简单优化模型、数学规划、组合优化、微分方程、随机方法、模糊数学与灰色系统等建模常用的方法和必要的基础知识，并在最后一章介绍建模常用的数学软件的使用方法以及一些应用实例。教材各块内容相对独立，使用时可以根据实际情况选取所需章节。教材中出现的案例，有的来自于其他已经出版的书籍或杂志并经作者加工整理，也有的直接来自于作者的科研成果，有关参考文献全部列于书末。

本教材的编写由杭州电子科技大学数学建模教学团队集体完成，其中第1章由陈光亭编写，第2、5两章由裘哲勇编写，第3章由李炜编写，第4章由沈灏编写，第6章由程宗毛编写，第7章由李承家编写，第8章由张智丰编写，并由陈光亭最后统稿完成。数学建模课程不同于其他课程，在内容的选取和安排上很难有统一做法，教材的编写难度较大。我们的教材虽然在校内使用多年，但由于编者水平和能力所限，错误与不当之处在所难免，此次出版，也是希望能得到专家和读者的批评指正，以利于我们进一步修订。

在本书即将正式出版之时，作者要特别感谢杭州电子科技大学最早参加数学建模教学工作的张皓、王祖越、包立平等老师，他们的工作为杭州电子科技大学数学建模工作以及本书的编写奠定了良好基础。

本书的完成得到了杭州电子科技大学校领导、教务处、理学院以及浙江省教育厅高教处的大力支持，全国大学生数学建模竞赛组委会秘书长、清华大学数学系谢金星教授对书稿进行了审阅，并提出了诸多宝贵意见和建议，高等教育出版社数学分社李艳馥社长对该书的出版也给予大力支持和帮助，在此对他们表示衷心感谢。

编　者

2009年8月

目 录

第1章 绪 论

1.1 什么是数学建模

工厂要定期订购各种原料,存在仓库里供生产之用;车间一次加工出一批零件供装配线每天生产之需;商店成批购进各种商品,放在货柜里以备零售.这些情形中,若货物贮存量过大,则贮存费用太高,造成资金积压;贮存量太小,则可能无法及时满足生产或经营需求.所以这里有一个货物贮存量多大才合适的共同问题.要解决这类问题,不能光凭经验,而应该根据生产上的一些实际数据,利用合理的数学方法和工具进行量化计算,才能取得一个合适的结果.

又如,拟分配5人去完成5项工作,每人恰好完成一项工作,第 i 人完成第 j 项工作所需要的时间为 C_{ij},问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少?当然可以把所有可能的安排列举出来计算比较后得到花费时间最少的安排,但这个方法不具有一般性,假如问题不是5个人5项工作,而是100个人100项工作,则可能的安排有100!种之多,根本不可能把所有这些安排列举出来,因此需要有一个合适的数学方法,给出一种有效的一般性的解决途径.

上面所提到的问题的实际背景来自不同领域,但有一个共同点,就是问题来自于现实世界,都有一个明确的目的.为了解决这些实际问题,需要一些数学工具和方法,先把问题翻译成一个数学问题,然后用数学方法甚至计算机工具来加以求解.这实际上就是一个数学建模的过程.

一般而言,所谓数学建模,就是对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据实际问题的内在规律,进行一些必要的简化和抽象,然后运用适当的数学语言、方法和工具,把现实问题描述为一种数学结构,并对之用数学方法加以求解.用来描述实际问题的数学结构,称为数学模型(Mathematical Model),而建立数学模型并加以求解的整个过程称为数学建模(Mathematical Modeling),简称为建模.

数学建模这个词出现的时间并不是很长，大概也就是三十年，但数学建模本身并不是什么新东西. 可以说，自从有了数学并要用数学去解决实际问题，就有了数学建模过程. 两千多年以前创立的欧几里得几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科学发展史上数学建模的成功范例. 数学建模过程中一般都要用证明或计算等技术手段求解数学问题，并通过与实际情形比对来验证所得结果，必要时要对数学模型进行反复的修改完善. 建模过程中大量的计算往往是不可缺少的，过去由于没有高性能计算机，使得计算能力受到很大局限，在一定程度上限制了数学建模这一强有力方法的应用和发展. 随着计算机技术的发展和超级计算机的出现(特别是从 20 世纪 80 年代开始)，数学建模这一方法获得了如虎添翼般的飞速发展.

数学建模在现实社会中的重要意义日益明显，数学的应用正在向一切领域渗透，各行各业日益依赖于数学，甚至可以说当今社会正在日益数学化. 随着传统工程技术领域的信息化改造以及大量新工艺、新技术的涌现，使数学建模大有用武之地，数学建模和与之相伴的科学计算正在成为工程设计中的关键手段；在高新技术领域，数学建模是必不可少的工具，有人说“高技术本质上是一种数学技术”；数学向诸如经济、人口、生态等学科领域的渗透，产生了计量经济学、人口控制论和数学生态学等新兴交叉学科.

数学建模所面临的实际问题是多种多样的，所用到的数学方法也是五花八门，没有定律的. 问题不同，目的不同，所用的分析方法就会不同，所用到的数学方法也就不同，建立起来的数学模型也不同. 数学模型可以按照不同的分类方法分成多种类型. 按照模型的应用领域分类，数学模型可以分成人口模型、交通模型、环境模型、生物数学模型、数量经济学模型等；按照建立模型所用数学方法分类，可以分为初等模型、几何模型、微分方程模型、统计模型以及最优化模型等；按照模型中变量的表现特性分类，可以分成确定性模型、随机性模型、模糊性模型，或者静态模型、动态模型，或者离散模型、连续模型.

数学建模课程的学习不同于其他数学课程的学习. 它没有完整的理论和固定的内容，仅有一些纲要的引导和常用方法介绍，不同的教材在内容上也可以有很大差异. 学习数学建模，就是要学会**到什么地方，找到什么样的数学方法，来解决什么样的实际问题**. 这看起来是容易的，但实际上也正是数学建模的困难所在. 学习数学建模，不仅要注意培养自己理解实际问题的能力、抽象分析的能力，而且还要训练自己应用各种知识、方法和技能的能力.

1.2 若干建模示例

建模示例一:雨中行走问题

天在下雨,小李要从教学楼走 0.5 km 路程到宿舍楼,如果小李不带伞是冒雨行走的,则他应以什么样的速度行走才能最少淋雨?

这个问题看起来很简单,只要跑得越快越好,然而把雨的方向变换考虑进去,问题就变得有点复杂.

1. 澄清问题

给定一个特定的降雨条件,能否设计出一个方案,使小李被雨淋得最少?我们需要一个依赖于雨速、风向、路程与奔跑速度等因素的确定淋雨量的公式.给出一组比较典型的数据:雨速 = 4 m/s;行走速度 = 2 m/s;跑步速度 = 6 m/s;路程 = 500 m;降雨量 = 2 cm/h;

与此问题有关的因素罗列如下:

因素	符号	单位
淋雨时间	t	s
雨速	r	m/s
雨的角度	θ	°
走速	v	m/s
人的高度	h	m
人的宽度	w	m
人的厚度	d	m
淋雨量	c	L
雨的强度	I	
行走的距离	D	m

2. 形成模型

先建一个简单的模型,假设人所走的路线是直线,将人体视为长方体,设雨

速为常数,不考虑雨的方向. 若人的跑动速度为 6 m/s,则

$$淋雨时间=\frac{500\ \mathrm{m}}{6\ \mathrm{m/s}}\approx 83\ \mathrm{s}=1\ \mathrm{min}\ 23\ \mathrm{s}.$$

若降雨量为 2 cm/h,则 1 min 23 s 中的降雨量为 $2\times83\div3\ 600$ cm,若取小李高为 1.5 m,宽为 0.5 m,厚为 0.2 m,简单化为一个长方体,则其前后表面积为 1.5 m^2,侧面积为 0.6 m^2,顶部面积为 0.1 m^2,这样总面积为 2.2 m^2,假设这些表面积都被同样淋雨,则

$$淋雨量=\frac{2\times83\times0.01}{3\ 600}\times2.2(\mathrm{m}^3)\approx1.014(\mathrm{L}).$$

这显然是一个非常粗略的估计,下面给予更细致的方法讨论.

雨速与降雨量是有区别的,因为雨不是连续水流,而是离散雨点的流. 为描述雨量的大小,下面引入雨的强度概念. 前面已知雨速为 $4\ \mathrm{m/s}=1.44\times10^6\ \mathrm{cm/h}$,而降雨量为 2 cm/h,把降雨量与雨速的比定义为雨的强度,这里强度 $I=\frac{1}{7.2\times10^5}$. 雨的强度反映雨的大小,如果 $I=0$,则没有雨,雨越大,I 越接近 1.

小李从教学楼到宿舍的淋雨时间为 $t=D/v$,为考虑被淋雨的程度,必须考虑行走方向与雨的方向的关系,简化的示意图如图 1-2-1 所示.

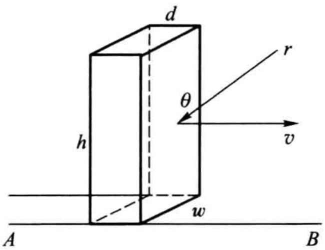


图 1-2-1　行走方向与雨的方向的关系示意图

设雨与铅直方向成 θ 角,淋在人身上的雨量可以按以下情况计算:

(1) 考虑人的顶部

顶部面积为 wd m^2,雨速在铅直方向分量为 $r\cos\theta$ m/s. 小李在时间 D/v 中顶部的淋雨量为

$$\frac{DIwdr\cos\theta}{v}(\mathrm{m}^3). \tag{1.2.1}$$

(2) 考虑人的前部

前部面积为 wh m^2,水平方向相对雨速为$(r\sin\theta+v)$ m/s. 则小李在时间 D/v 中前部的淋雨量为

$$\frac{DIwh(r\sin\theta+v)}{v}(\mathrm{m}^3). \tag{1.2.2}$$

小李总的淋雨量为

$$C=\frac{IwD}{v}[rd\cos\theta+h(r\sin\theta+v)](\mathrm{m}^3). \tag{1.2.3}$$

已知 $h=1.5\ \mathrm{m}, w=0.5\ \mathrm{m}, d=0.2\ \mathrm{m}, r=4\ \mathrm{m/s}, D=500\ \mathrm{m}, I=\frac{1}{7.2\times10^5}$,于是

$$C=\frac{0.8\cos\theta+6\sin\theta+1.5v}{2\ 880v}(\mathrm{m}^3). \tag{1.2.4}$$

问题转化为根据给定的 θ,选取适当的 v 使 C 最小.

3. 模型求解

把(1.2.4)式转化为

$$C=\frac{1}{1\ 920}+\frac{\cos\theta}{3\ 600v}+\frac{\sin\theta}{480v}. \tag{1.2.5}$$

显然,当 $\theta\geqslant0°$时,v 越大,C 越小. 计算几种特殊情况下的淋雨量.

(1) $\theta=0°$时,

$$C=\frac{1}{1\ 920}+\frac{1}{3\ 600v}(\mathrm{m}^3),$$

取速度 $v=6\ \mathrm{m/s}$,则 $C\approx0.57\ \mathrm{L}$.

(2) $\theta=30°$时,

$$C=\frac{1}{1\ 920}+\frac{\sqrt{3}}{7\ 200v}+\frac{1}{960v}(\mathrm{m}^3),$$

取速度 $v=6\ \mathrm{m/s}$,则 $C\approx0.734\ \mathrm{L}$.

当 $\theta<0°$时,雨来自人的背后,取 $\theta=-\alpha$,这时考虑人的背后的淋雨量,分两种情况讨论:

(1) $v\leqslant r\sin\theta$,则背后的淋雨量为$\frac{IwhD(r\sin\alpha-v)}{v}$,于是总淋雨量为

$$C=\frac{DIw[rd\cos\alpha+h(r\sin\alpha-v)]}{v}.$$

显然取 $v=r\sin\alpha$ 时 C 最小,此时的行走速度与水平雨速一致,淋雨量仅有头顶部分.

(2) $v>r\sin\alpha$,则前部淋雨量为$\frac{IwhD(v-r\sin\theta)}{v}$,于是总淋雨量为

$$C=\frac{IwD[rd\cos\alpha+h(v-r\sin\alpha)]}{v}.$$

把具体数据代入,得