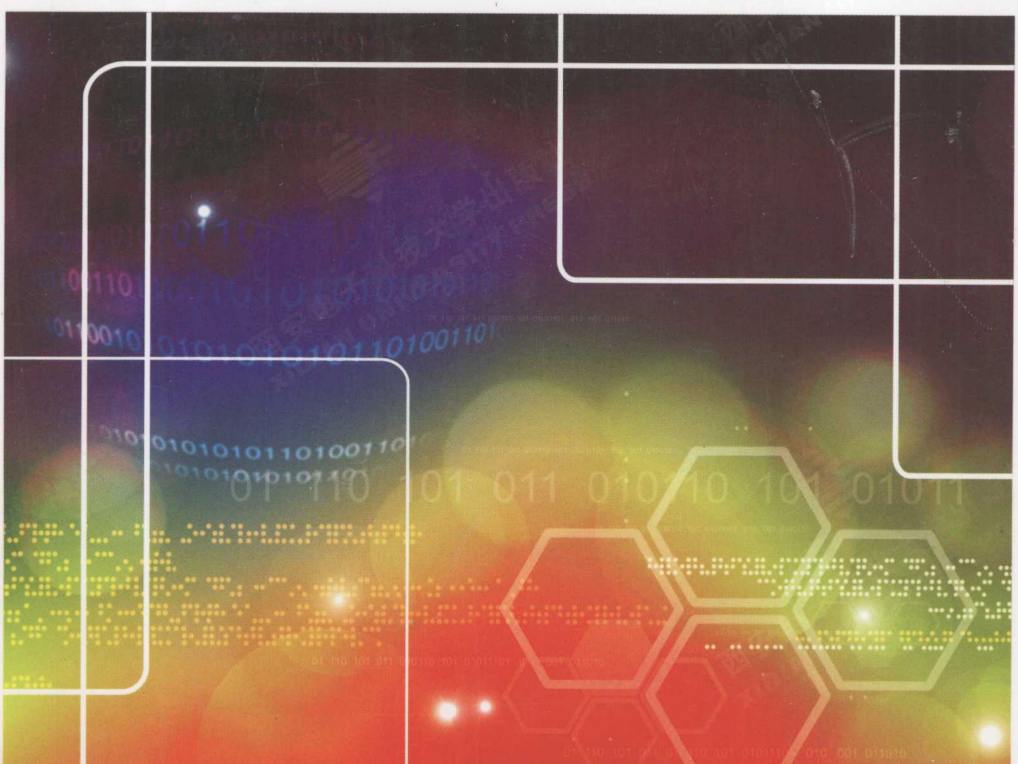
XSJ 新世纪计算机类专业规划教材 COMPUTER

离散数学

（第二版）

武　波　黄健斌
尹忠海　毛立强　编著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

新世纪计算机类专业规划教材

离散数学

（第二版）

武　波　黄健斌
尹忠海　毛立强　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书系统介绍了离散数学的理论和方法。全书共7章，内容包括数理逻辑、集合与关系、代数系统和图论。本书内容丰富、深入浅出，除对概念、性质、方法进行了严密的论述外，还精选了大量例题，便于读者理解书中理论的内涵及应用。书中每一节最后都精选了与本节重点内容相关的典型习题，以便读者巩固已学的知识。

本书可作为高等院校计算机科学与技术、软件工程以及相关专业的本科生教材，也可作为其他需要学习离散数学相关知识的人员的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/武波等编著. —2版
—西安：西安电子科技大学出版社，2013.08
新世纪计算机类专业规划教材
ISBN 978-7-5606-3108-0

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①武… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—教材
Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第180141号

策划编辑 臧延新
责任编辑 许青青
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)88242885 88201467 邮　　编 710071
网　　址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经　　销 新华书店
印刷单位 西安市高陵县印刷厂
版　　次 2013年8月第2版 2013年8月第2次印刷
开　　本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 18.5
字　　数 435千字
印　　数 1～2,000册
定　　价 32.00元
ISBN 978-7-5606-3108-0/O

XDUP 3400002-2

前　言

离散数学是研究离散数量关系的数学分支的统称，它是随着计算机科学的发展和计算机应用的日趋广泛而建立起来的一个数学分支。离散数学为计算机科学研究和工程应用提供了有力的理论工具，其中涉及的很多概念、原理和方法在计算机及相关学科领域都有着重要应用。

离散数学是计算机科学与技术和软件工程专业的一门重要的专业基础课程，它为学习高级语言程序设计、数据结构、数字逻辑设计、操作系统、数据库原理、编译原理、计算机网络、人工智能、信息安全等专业课程提供了必要的数学基础。同时，在培养学生的抽象思维、逻辑推理能力、用数学模型分析和解决问题的能力等方面，离散数学都扮演着重要的角色。

时代在发展，为了适应培养具有国际竞争能力的多层次实用型计算机和软件工程人才的需要，西安电子科技大学参照《中国计算机科学与技术学科教程》和《中国软件工程学科教程》对整个学科的课程体系重新进行了规划和调整。离散数学作为计算机及相关专业的一门核心课程，其教学目标、内容和形式也进行了相应改革。为此，作者决定编写一本适合计算机科学与技术和软件工程专业教学需要的离散数学教材。

离散数学一直以来都以内容抽象和深奥而闻名，作者在编写本书时力求改变这一局面，希望写出一本受广大教师和学生欢迎的教材。

(1) 为了紧扣教学目标，作者在认真分析研究的基础上对本书的内容作了适当取舍。对于计算机专业学生必须掌握的重要内容，如数理逻辑、关系、函数、图论、布尔代数，给予强化和突出，对要求相对较低的群、环、域等方面的内容适当压缩、精炼。同时，对于一些扩展性的内容引导学生自学。

(2) 本书精选了大量的实例来引导学生理解基本理论和方法的实际用途，这对于明确离散数学的教学目标，发挥离散数学课程的真正作用会起到积极的推动作用。

(3) 为了配合课程的双语教学，作者对书中的基本概念和涉及的数学家都给以英文注释，并且在每节后面增加了英文习题，相信对学生掌握基本的离散数学英文术语以及提高英文阅读能力会有所帮助。

全书共分为7章，每一章根据内容体系又分为若干节，各节末均配备了大量相关习题。全书由武波教授统稿，其中第1、2章由毛立强、黄健斌编写，第3、4章由黄健斌编写，第5、6章由尹忠海、武波编写，第7章由武波、黄健斌编写。全书内容讲授约需70学时，其中一些较深奥的内容在目录中以“*”标注，以供授课教师取舍。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

作　者

2013年5月

第一版前言

离散数学是随着计算机科学的发展和计算机应用的日趋广泛而建立起来的一个数学分支，它为计算机科学技术和工程应用提供了有力的理论工具，其中涉及的概念、原理和方法在计算机及相关学科领域都有着重要应用。

离散数学作为计算机专业的一门核心数学课程，它为学习高级语言程序设计、数据结构、数字逻辑设计、操作系统、数据库原理、编译原理、计算机网络、人工智能、信息安全等专业课程提供了必要的数学基础。同时，离散数学对于培养学生的抽象思维、逻辑推理能力、用数学模型分析和解决问题的能力等均具有十分重要的作用。本课程不但要培养学生的抽象思维能力，而且要培养学生运用数学方法解决实际问题的能力。然而，从作者多年讲授"离散数学"课程的效果来看，有不少学生在学习完抽象的数学理论后，对于其中相关理论和方法的学习目标和作用并不明确，也不知道这些理论的真正作用。许多专业课教师也反映学生在学习专业课程时不能把离散数学的理论知识与实际应用对应起来，学生应用数学工具的能力较差，这是离散数学教学的一个亟待改进的问题。

为此，我们在编写本教材时，在内容取材和写作风格上作了相应整合与尝试。

(1) 对于学生必须掌握的重要内容，如数理逻辑、关系、函数、图论、组合计数、布尔代数，给予强化和突出，精练了群、环、域方面的内容；

(2) 通过精选大量的实例来引导学生对基本理论和方法的实际用途的理解；

(3) 为了配合软件工程专业的双语教学，我们对书中的基本概念都给以英语注释，而且在每节后面增加了英文习题，促使学生掌握离散数学中的基本英文术语并提高英文阅读能力；

(4) 增加了一些扩展性内容引导学生自学。

全书共分为 7 章，每一章根据内容又分为若干节，各节后均配备了大量相关习题。其中，第 1、2 章数理逻辑部分由毛立强编写，第 3、4 章集合论部分由黄健斌编写，第 5、6 章代数系统部分由尹忠海编写，第 7 章图论部分由武波编写。全书内容讲授约需 70 学时，其中一些较深奥的内容在目录中以"*"标注，以供授课教师取舍。

本书的出版得到了西安电子科技大学教材基金的资助。感谢西安电子科技大学出版社的大力支持，感谢臧延新和许青青编辑为本书的出版所做的大量工作！

由于作者理论实践水平有限，加之时间仓促，书中的不足之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编　者

2007 年 7 月

目　录

第1章　命题逻辑

1893 年德国数学家弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege)在《算术基本规律》一书中介绍了命题逻辑，标志着符号逻辑系统的诞生。命题逻辑是数理逻辑研究的基本内容之一。

本章讨论命题逻辑的基本概念和理论，重点讨论如何利用数学方法来研究命题的形式结构和推理规律。本章主要内容包括：命题和联结词、命题公式、逻辑等价与蕴含、联结词的完备集、对偶式和范式、命题逻辑的推理理论等。

1.1　命题和联结词

1.1.1　命　题

命题逻辑主要研究前提(premises)和结论(conclusion)之间的逻辑关系。例如，由前提“如果我平时不努力学习离散数学，那么我的期末成绩就会不及格”和“期末成绩出来，我的离散数学及格了”可以推出“我平时努力学习了”的结论。这里前提和结论都是断言(陈述句)，具有确定的真假值，它们是推理的基本单位，在数理逻辑中称为命题(proposition)。本节首先给出命题的定义并引入命题的逻辑运算。

定义 1.1.1　一个具有真或假但不能两者都是的断言称为命题。

如果一个命题所表达的判断为真，则称其真值(truth value)为“真”，用大写字母 T 或数字 1 表示；如果一个命题所表达的判断为假，则称其真值为“假”，用大写字母 F 或数字 0 表示。为简便起见，本书在构建真值表时一般用 0 表示“假”，用 1 表示“真”。

由命题的定义可知，命题必须满足以下两个条件：

(1) 命题是表达判断的陈述句。疑问句、祈使句和感叹句等都不是命题。

(2) 命题有确定的真假值，它的真值或者为真，或者为假，两者必居其一。

例 1　判断下列句子哪些是命题。如果是命题，给出真值；如果不是命题，说明原因。

(a) 能整除 7 的正整数只有 1 和 7 本身。

(b) 小明出生那天，北京下雨。

(c) 西安是中国的城市。

(d) $x+y=3$。

(e) 2 是偶数，而 1 是奇数。

(f) “哥德巴赫猜想”是正确的。

(g) 明天是否去春游啊?

(h) 全体起立!

(i) 如果明天不下雨，那么我去郊游。

解　句子(a)是命题，真值为真。

句子(b)是命题，真值由小明出生那天是否下雨唯一确定。

句子(c)是命题，真值为真。

句子(d)不是命题，因为 x 与 y 为变量，无法确定等式的真假。

句子(e)是命题，真值为真。

句子(f)是命题，因为首先它是陈述句，且真值是确定的，不可能出现既是真又是假的结果。只是该命题的真值人们目前还不能分辨。

句子(g)不是命题，该句是疑问句，不是陈述句。

句子(h)不是命题，该句是祈使句，不是陈述句。

句子(i)是命题，该命题是陈述句，且其真值依据明天是否下雨以及我明天是否去郊游而确定。

就像代数中可用字母代表不同数字一样，在数理逻辑中一般使用大写字母或者带上标、下标的大写字母表示命题。例如：

P：2 是偶数

即用 P 来表示“2 是偶数”这个命题。

在一般的口语和书面语言中，常使用“非”、“和”、“或”、“如果……那么……”等一些联结词来构成更复杂的命题。例如：今天没有下雨；这学期我必修离散数学和大学物理；或者$2>3$，或者 5 是素数；如果太阳从西方升起，则雪是黑的。

命题有两种类型：一种是不包含其他更简单命题的命题，称为简单命题(simple proposition)或原子命题，如例 1 中的(a)、(b)、(c)都是简单命题；另一种是由简单命题、联结词组合构成的复杂命题，称为复合命题(compound proposition)，如例 1 中的(e)、(i)是复合命题。

1.1.2 联结词

在代数中，用“+”、“×”等运算符连接数字得到代数表达式，例如“3+2”等。同样，在数理逻辑中，也存在运算符，称为逻辑联结词(logic connective)，简称联结词。五个常用联结词的定义如下所述。

1. 否定联结词

否定联结词也称为“非”运算，它对单个命题进行操作，是一个一元运算符。

定义 1.1.2 设 P 是命题，P 的否定(negation)是一个复合命题，记做$\neg P$，称为“非 P”。符号$\neg$用于表示否定联结词。$\neg P$ 为真，当且仅当 P 为假。

下面引入真值表(truth table)来描述复合命题的真值。真值表的左边列出参与运算的命题真值的所有可能组合，复合命题的真值结果列在最右边一列。因此，否定联结词$\neg$的定义如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 2　给出以下命题的否定命题。

(a) 2 是偶数。

(b) 这些书都是 2011 年出版的。

解　(a) 2 不是偶数。

(b) 这些书并非都是 2011 年出版的。

例 3　在大多数编程语言中都存在"非"运算，其定义与定义 1.1.2 相同。例如，在 Java 语言中，逻辑"非"运算符为"!"，表达式!($x<100$)为真当且仅当变量 x 不小于 100，即$x\geqslant 100$。

2. 合取联结词

定义 1.1.3　如果 P 和 Q 是命题，那么"P 并且 Q"是一个复合命题，记做 $P\wedge Q$，称为 P 和 Q 的合取(conjunction)。符号$\wedge$用于表示合取联结词。$P\wedge Q$ 为 T，当且仅当 P、Q 均为 T。

"$\wedge$"是一个二元运算符。合取联结词$\wedge$的定义如表 1.1.2 所示。

表 1.1.2

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 4　设命题 P：我主修软件工程专业，Q：我辅修通信工程专业，给出 P 和 Q 的合取所表示的命题。

解　$P\wedge Q$：我主修软件工程专业并且我辅修通信工程专业。

当且仅当"我主修软件工程专业"和"我辅修通信工程专业"都为真时，$P\wedge Q$ 为真。

合取的概念与自然语言中的"与"、"且"等词的意义近似，但并不完全相同。例如，P：地球是圆的，Q：我去看电影，则 $P\wedge Q$ 表示"地球是圆的且我去看电影"。在自然语言中，这个命题是没有意义的，因为 P 和 Q 没有内在联系。但在数理逻辑中，任意两个命题 P 和 Q 都能进行合取运算，一旦 P、Q 的真值确定后，$P\wedge Q$ 的真值就随之确定。

例 5　在大多数编程语言中，"与"的定义与合取的定义相同。例如 Java 语言中，逻辑"与"运算符为"&&"，表达式"$x<10$&&$y>1$"为真当且仅当变量 x 的值小于 10 并且变量 y 的值大于 1。

3. 析取联结词

定义 1.1.4　如果 P 和 Q 是命题，那么"P 或 Q"是一个复合命题，记做 $P\vee Q$，称为 P 和 Q 的析取(disjunction)。符号$\vee$用于表示析取联结词。$P\vee Q$ 为 T，当且仅当 P、Q 至少有一个为 T。

"$\vee$"是一个二元运算。析取联结词$\vee$的定义如表 1.1.3 所示。

表 1.1.3

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 6 设命题 P:李明参加全国大学生英语竞赛，Q: 李明参加全国大学生数学建模竞赛，给出 P 和 Q 的析取所表示的命题。

解 $P\vee Q$：李明参加全国大学生英语竞赛或者数学建模竞赛。

当且仅当“李明参加全国大学生英语竞赛”为真或“李明参加全国大学生数学建模竞赛”为真或两者同时为真，$P\vee Q$ 为真。

析取的概念和自然语言中“或”的意义相似，但也并不完全相同。自然语言中“或”常见的含义有两种：一种是“可兼或”(inclusive-or)，如例 6 中，“李明参加全国大学生英语竞赛”和“李明参加全国大学生数学建模竞赛”可以都成立；另一种是“不可兼或”(exclusive-or)，例如“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”中的“或”表示非此即彼，不可兼得。这里的析取联结词表示可兼或。与合取类似，析取也可以联结两个没有内在联系的命题。

例 7 在大多数编程语言中，“兼或”的定义与析取的定义相同。例如在 Java 语言中，逻辑“或”运算符为“‖”，表达式“$x<10 \| y>1$” 为真当且仅当变量 x 小于 10 或者变量 y 大于 1 或者两者都为真。

例 8 许多 Web 搜索引擎(如 Google、Yahoo！等)都允许用户输入关键词，然后由搜索引擎与网页进行匹配。例如，输入“mathematics”会检索产生一个包含“mathematics”的列表。有些搜索引擎允许用户使用操作符 AND、OR 和 NOT 以及括号进行关键词的组合，这样可以实现更复杂的搜索。例如，为了搜索包含关键词“discrete”和“mathematics”的网页，用户应该输入“discrete AND mathematics”。如果搜索包含关键词“discrete mathematics”或关键词“finite mathematics”的网页，用户可以输入“(discrete OR finite) AND mathematics”。

4. 条件联结词

定义 1.1.5 如果 P 和 Q 是命题，那么“如果 P，那么 Q”是一个复合命题，记做 $P\rightarrow Q$，称为 P 和 Q 的条件命题(conditional proposition)。符号→用于表示条件联结词。当且仅当 P 为 T 且 Q 为 F 时，$P\rightarrow Q$ 为 F。这里，称 P 为假设(hypothesis)或前件(antecedent)，称 Q 为结论(conclusion)或后件(consequent)。

“→”是一个二元运算。条件联结词→的定义如表 1.1.4 所示。

表 1.1.4

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在自然语言中，“如果……”与“那么……”之间是有因果关系的，否则就没有意义；而在条件命题中，规定为“善意的推定”，即前件为 F 时，不管后件是 T 还是 F，条件命题总为 T。

例 9　给出命题 $P\to Q$ 的文字描述并确定其真值。

(a) 命题 P：天不下雨，Q：草木枯黄。

(b) 命题 P：地球是宇宙的中心，Q：$3+2=6$。

解　(a) 命题 $P\to Q$ 表示“如果天不下雨，那么草木枯黄。”

当且仅当天不下雨(P 为 T)并且草木不枯黄(Q 为 F)时，命题 $P\to Q$ 的真值才为 F，其他情况下命题 $P\to Q$ 的真值均为 T。

(b) 命题 $P\to Q$ 表示“如果地球是宇宙的中心，那么 $3+2=6$。”

尽管命题“$3+2=6$”的真值为 F，但由于命题“地球是宇宙的中心”这个命题的真值为 F，所以有 $P\to Q$ 的真值为 T。

条件命题 $P\to Q$ 可以有多种描述方式，例如：“若 P，则 Q”，“P 仅当 Q”，“Q 每当 P”，“P 是 Q 的充分条件(sufficient condition)”，“Q 是 P 的必要条件(necessary condition)”等。

给定条件命题 $P\to Q$，把 $Q\to P$、$\neg P\to\neg Q$、$\neg Q\to\neg P$ 分别称为命题 $P\to Q$ 的逆命题(converse)、否命题(inverse)和逆否命题(converse-negative proposition)。

5. 双条件联结词

定义 1.1.6　如果 P 和 Q 是命题，那么“P 当且仅当 Q”是一个复合命题，记做 $P\leftrightarrow Q$，称为 P 和 Q 的双条件命题(biconditional proposition)。符号$\leftrightarrow$用于表示双条件联结词。$P\leftrightarrow Q$为 T，当且仅当 P 和 Q 的真值相同。

“$\leftrightarrow$”是一个二元运算。双条件联结词$\leftrightarrow$的定义如表 1.1.5 所示。

表 1.1.5

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由表 1.1.5 可见，如果 $P\leftrightarrow Q$ 为 T，那么 $P\to Q$ 和 $Q\to P$ 都为 T，反之亦然。所以$P\leftrightarrow Q$ 也可以称为“P 和 Q 互为充要条件”。

例 10　设命题 P：两个三角形全等，Q：两个三角形的三组对应边相等，R：地球是圆的，S：雪是白的。给出 P 与 Q 以及 R 与 S 的双条件命题。

解　$P\leftrightarrow Q$：两个三角形全等，当且仅当两个三角形的三组对应边相等。

$R\leftrightarrow S$：地球是圆的，当且仅当雪是白的。

习　题

1.1－1　指出下列语句哪些是命题，哪些不是命题。如果是命题，指出它的真值。

(a) 中国的首都是北京。

(b) 你今天有空吗？

(c) 明天我们去郊游。

(d) 上课时请不要大声喧哗！

(e) 月球上有银杏树。

(f) 如果我学习了C语言，那么我就会开发软件了。

(g) 太阳系的所有行星都围绕着地球旋转。

(h) 好美的花儿啊！

1.1-2 指出下列语句哪些是命题，哪些不是命题。如果是命题，指出它的真值。

(a) $10+5\leqslant 12$。

(b) $6x+3=5-7x$。

(c) 小明和小强是兄弟？

(d) 天气真好！

(e) 离散数学是计算机专业的一门必修课。

(f) 请节约用水！

(g) 2022年中秋节下雨。

1.1-3 写出“如果天不下雨且我有时间，那么我去郊游”的逆命题，否命题和逆否命题。

1.1-4 写出“若明天是晴天，则我去华山”的逆命题、否命题以及逆否命题。

1.1-5 给定命题P：明天下雨，Q：我的作业做完，R：我去华山。翻译下列复合命题：

(a) 我的作业没有做完。

(b) 如果明天不下雨且我的作业做完，那么我就去华山。

(c) 除非明天下雨，否则我去华山。

(d) 我去华山的充要条件是我的作业做完且明天没有下雨。

1.1-6 符号化下列命题。

(a) 11不是偶数。

(b) 小王虽然很聪明，但不喜欢学习。

(c) 小王不是不聪明，而是不够用功。

(d) 小王的专业是软件工程或者通信工程。

(e) 只有天不下雨，我才骑车去上街。

(f) $1+1\neq 2$当且仅当3不是奇数。

(g) 小王是计算机专业的学生，他出生于1986年或1987年，他是班长。

1.1-7 设P：2能整除5，Q：北京是中国的首都，R：在中国一年分为春、夏、秋、冬四个季节。求下列复合命题的真值。

(a) $((P\vee Q)\rightarrow R)\vee(R\rightarrow(P\wedge Q))$。

(b) $((\neg Q\leftrightarrow P)\rightarrow(P\vee R))\vee((\neg P\wedge Q)\wedge\neg R)$。

1.1-8 将下列语句符号化，并求出其真值。

(a) $2+3=5$当且仅当19是素数。

(b) $2+3\neq 5$当且仅当19是素数。

(c) 只有 4 是偶数，5 才是偶数。

(d) 除非 2＋2＝6，否则地球静止不动。

(e) 只有地球静止不动，才有 2＋2＝6。

(f) $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{7}$ 中有且仅有一个是无理数。

1.1－9　Which of sentences (a)～(e) are either true or false (but not both)?

(a) The only positive integers that divide 7 are 1 and 7 itself.

(b) Edsgar Wybe Dijkstra won an ACM Turing Award in 1974.

(c) For every positive integer n, there is a prime number larger than n.

(d) Earth is the only planet in the universe that has life.

(e) Buy two tickets to U2 rock concert for Friday.

1.1－10　Write a command to search the Web for minor league base-ball teams in Illinois that are not in the Midwest League.

1.2　命题公式

1.2.1　命题公式及其符号化

在命题逻辑中，将表示一个确定命题(其真值不是 T 就是 F)的符号称为命题常元(propositional constant)，一般用 T 或 F 表示；将一个不确定的或可泛指任意命题的符号称为命题变元(propositional variable)。

定义 1.2.1　用于代表取值为真(T、1)或假(F、0)之一的变量，称为命题变元，通常用大写字母或带下标或上标的大写字母表示，如 P、Q、R、P_1、P_2 等。将 T 和 F 称为命题常元。

通常把由命题常元、命题变元、联结词以及括弧组成的式子称为表达式，但是只有按照特定组合规则所形成的表达式才有实际意义。

定义 1.2.2　命题合式公式(简称命题公式)：

(ⅰ)(基础)单个命题常元或命题变元是命题合式公式。

(ⅱ)(归纳)如果 A 和 B 是命题公式，则 $\neg A$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \to B)$、$(A \leftrightarrow B)$是命题合式公式。

(ⅲ)(极小性)只有有限次地应用条款(ⅰ)和(ⅱ)生成的表达式才是命题合式公式。

例 1　(a)验证$(P \wedge Q) \to (\neg P \vee (P \leftrightarrow Q))$是命题公式。

解　(1) P 是命题公式　　根据条款(ⅰ)

(2) Q 是命题公式　　根据条款(ⅰ)

(3) $P \wedge Q$ 是命题公式　　根据(1)、(2)和条款(ⅱ)

(4) $\neg P$ 是命题公式　　根据(1)和条款(ⅱ)

(5) $P \leftrightarrow Q$ 是命题公式　　根据(1)、(2)和条款(ⅱ)

(6) $\neg P \vee (P \leftrightarrow Q)$是命题公式　　根据(4)、(5)和条款(ⅱ)

(7) $(P \wedge Q) \to (\neg P \wedge (P \leftrightarrow Q))$是命题公式　　根据(3)、(6)和条款(ⅱ)

其构造过程如图 1.2.1 所示。

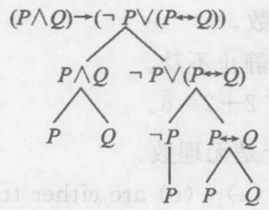


图 1.2.1

(b) 表达式$\wedge B$、$A\otimes B$、$AB\rightarrow A$、$A\rightarrow B\neg C$都不是命题公式，因为它们不能通过定义1.2.2的条款生成。

定义 1.2.3 若B是命题公式A的一个连续段且B也是命题公式，则称B是A的一个子公式。

例如，P、$P\wedge Q$、$\neg P\vee(P\leftrightarrow Q)$等均为$(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(P\leftrightarrow Q))$的子公式。

在命题公式中，为了减少括号的使用，可以作以下约定：

(1) 联结词运算的优先次序：$\neg$的运算优先级最高，$\wedge$、$\vee$的运算优先级次之，$\rightarrow$、$\leftrightarrow$的运算优先级最低，不改变运算先后次序的括号可省去。

(2) 相同的联结词，按从左至右顺序计算时，括号可省去。

(3) 最外层的括号可省去。

有了联结词和命题公式的概念，就可以把自然语言描述的命题翻译成命题公式的形式，这是采用符号化推理的基础。

定义 1.2.4 把一个用自然语言叙述的命题写成与之内涵相同的命题公式的形式，称为命题的符号化。

例 2 设P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去上课，符号化下列命题：

(a) 如果明天下雨或者下雪，那么我不去上课。

(b) 如果明天不是既下雨又下雪，那么我去上课。

(c) 如果明天不下雨并且明天不下雪，那么我去上课。

(d) 当且仅当明天不下雪并且不下雨，我才去上课。

(e) 明天，我将雨雪无阻一定去上课。

解 (a) $(P\vee Q)\rightarrow\neg R$。

(b) $\neg(P\wedge Q)\rightarrow R$。

(c) $(\neg P\wedge\neg Q)\rightarrow R$。

(d) $(\neg P\wedge\neg Q)\leftrightarrow R$。

(e) $(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$或$R$。

例 3 符号化下列命题：

(a) 他虽然不聪明，但很用功。

这句话虽然没有出现前面几个联结词的表达形式，但实际意思是：他不聪明，并且他用功。于是提取出原子命题，设P：他聪明，Q：他用功，则该句可翻译为：$\neg P\wedge Q$。

(b) 除非你努力，否则你这次考试将不及格。

这句话可以理解为：如果你不努力，那么你这次考试将不及格。设P：你努力，Q：你这次考试将及格，则该句翻译为：$\neg P\rightarrow\neg Q$。