普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

化生地类

下册

赵奎奇 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（化生地类）下册

主　编　赵奎奇

副主编　李绍林　李素云

　　　　陈　静　廖玉怀

参　编　方艳溪　张绍康

　　　　程　洁　熊绍武

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是云南省部分高校本科教育质量工程建设成果，全书分上、下两册，本书为下册，内容包括无穷级数、空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分.

本书可作为普通高等学校化学与化工学、生物学与生命科学、地理学与旅游学、医学与环境科学等专业的“高等数学”课程教材，也可作为高等院校相关专业学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：化生地类. 下册/赵奎奇主编. —北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036308-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 309158 号

责任编辑：胡云志 任俊红 于 红 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013 年 1 月第一次印刷 印张：9 1/4
字数：181 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　录

第 8 章　无 穷 级 数

无穷级数是与数列极限有着密切联系的一个概念，是研究函数性质和进行数值计算的重要工具，在自然学科和工程技术中有着广泛的应用. 本章主要介绍无穷级数的一些基本内容和简单应用.

8.1　数 项 级 数

8.1.1　数项级数的概念

定义 8.1　设$\{u_n\}$是一个数列，表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{8.1}$$

称为**无穷级数**，简称为(**数项**)**级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ ，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots ,$$

其中，$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$称为级数的**项**，$u_n$ 称为级数的**一般项**或**通项**.

由定义可知，级数呈无限个数项相加形式，与有限个数项相加有本质区别，有限个数项相加总是有“和”的。无限项相加是否有“和”呢？如果有“和”，那么“和”又等于什么？回答这些问题，要用极限的方法来解决. 设

$$S_1=u_1,\quad S_2=u_1+u_2,\cdots,\quad S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\cdots ,$$

称 S_n 为级数(8.1)的前 n **项部分和**，简称**部分和**，数列$\{S_n\}$为级数(8.1)的**部分和数列**.

定义 8.2　设级数(8.1)的部分和数列为$\{S_n\}$，如果

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S(\text{有限数值}),$$

则称级数(8.1)**收敛**，并称 S 为级数(8.1)的**和**，记为

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n .$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，则称级数(8.1)**发散**，此时级数没有和.

例 8.1　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 的敛散性.

解　因为 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]=\frac{1}{2},$$

所以, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots=\frac{1}{2}$ 收敛.

例 8.2　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n=1+2+\cdots+n+\cdots$ 发散.

证　由于 $S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

例 8.3　讨论等比级数(**几何级数**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$ 的敛散性.

解　当 $|q|\neq 1$ 时,有

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

若 $|q|<1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}$,级数收敛,其和为 $\frac{a}{1-q}$.

若 $|q|>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$,级数发散.

当 $q=1$ 时,有 $S_n=na$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$,级数发散.

当 $q=-1$ 时,有 $S_n=a$(n 为奇数时)或 $S_n=0$(n 为偶数时), $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在,级数发散.

综上所述,当 $|q|<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$,收敛,当 $|q|\geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 发散.

例 8.4　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解(化差求和法)　因为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ 收敛.

8.1.2　收敛级数的基本性质

性质 8.1　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 具有相同的敛散性. 其中，k 为非零常数.

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 的部分和分别为 S_n, T_n，则

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$
$$T_n=ku_1+ku_2+\cdots+ku_n=k(u_1+u_2+\cdots+u_n)=kS_n,$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}kS_n=kS$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=kS$ 收敛.
如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\lim\limits_{n\to\infty}kS_n$ 也不存在，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 发散.

性质 8.2　如果 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=T$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=S\pm T$.

证　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 的部分和分别为 S_n, T_n, W_n，则

$$\begin{aligned}W_n&=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)=S_n\pm T_n.\end{aligned}$$

已知有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$，于是

$$\lim_{n\to\infty}W_n=\lim_{n\to\infty}(S_n\pm T_n)=S\pm T,$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=S\pm T$ 收敛.

性质 8.3　去掉、增加或改变级数的有限项，级数的敛散性不变.

***证**　不妨设，去掉 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 中的前 k 项：$u_1, u_2, \cdots, u_k$，得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_{k+n}=u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots+u_{k+n}+\cdots.$$

又设该级数的前 n 项和为 T_n，并且令 $S_k=u_1+u_2+\cdots+u_k$，则 $T_n=S_{k+n}-S_k$，同时注意到 S_k 是一个常数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{k+n}$ 同时存在或同时不存在. 因此，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{k+n}$ 具有相同的敛散性.

性质 8.4　收敛级数加括号所得级数仍然收敛且和不变. 即若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

也收敛,且和不变.

*证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S,且 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项间任意加括号后所得级数的前 k 项部分和记为 T_k,则

$$T_1=S_{n_1},T_2=S_{n_2},\cdots,T_k=S_{n_k},\cdots,$$

数列 $\{T_k\}$ 是数列 $\{S_n\}$ 的一个子数列. 由数列 $\{S_n\}$ 的收敛性以及收敛数列与子数列的关系可知,数列 $\{T_k\}$ 必收敛,$\lim\limits_{k\to\infty}T_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. 因此,加括号后所形成的级数仍收敛,且其和不变.

注 8.1　性质 8.4 的逆命题不成立,即收敛级数去括号后所形成的级数不一定收敛. 例如,级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零,但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$ 发散.

另外,性质 8.4 也表明,若加括号后所形成的新级数发散,则原级数必发散.

8.1.3　级数收敛的必要条件

定理 8.1(级数收敛的必要条件)　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 S_n,并且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,因为 $u_n=S_n-S_{n-1}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

定理 8.1 也表明,若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例如,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq0$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ 发散.

需要注意,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 只是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件,不是充分条件,即当 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散.

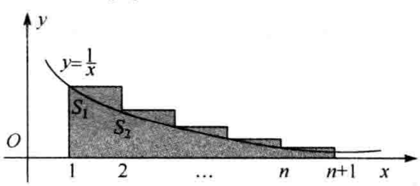

图 8-1

***例 8.5**　证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 发散.

证　如图 8-1 所示,部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}$$

与图中阴影部分的面积相等，并且大于曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$[0,n+1]$上的曲边梯形的面积 S，即

$$S_n>S=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1).$$

而且$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

习　题　8.1

1. 写出下列级数的通项：

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$；　(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；

(3) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$；　(4) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；

*(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　*(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3. 利用级数的性质和收敛的必要条件判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}+\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right]$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^n}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$；　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{3}{n}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$.

8.2　正 项 级 数

很多级数的敛散性问题可归结为正项级数的敛散性问题. 本节主要介绍正项级数的几个敛散性判别定理.

若 $u_n\geqslant0(n\geqslant1)$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**.

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(n=1,2,\cdots)$，由于 $u_n\geqslant0$，所以数列

$\{S_n\}$是一个单调递增数列. 由此,我们给出如下定理.

定理 8.2　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有界.

定理 8.3(比较判别法)　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,当 $n>N(N\in\mathbf{Z}^+)$时,有 $u_n\leqslant v_n$,则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 S_n 和 T_n,由级数的收敛性与前面有限项无关,不妨设对于任意的 $n(n=1,2,\cdots)$,有 $u_n\leqslant v_n$,则

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=T_n.$$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,由定理 8.2 可知,部分和数列$\{T_n\}$有界,数列$\{S_n\}$有界,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,根据定理 8.2,有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$,因而$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\infty$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 8.6　讨论正项级数 $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\cdots$的敛散性.

解　因为$0<\frac{1}{n\cdot 2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛. 所以,此级数收敛.

例 8.7　讨论正项级数(**p-级数**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ 的敛散性,其中,常数 $p>0$.

解　当 $p\leqslant 1$ 时,有$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 p-级数发散.

当 $p>1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的前 n 项部分和记为 S_n,因为 $S_n<S_{2n+1}$,并且

$$\begin{aligned}S_{2n+1}&=1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]+\left[\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^p}\right]\\&<1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]\\&=1+\frac{1}{2^p}\cdot S_n+\frac{1}{2^p}\cdot S_n=1+2^{1-p}\cdot S_n<1+2^{1-p}\cdot S_{2n+1},\end{aligned}$$

即 $S_{2n+1}<1+2^{1-p}\cdot S_{2n+1}$，进而有 $S_{2n+1}<\dfrac{1}{1-2^{1-p}}$，$n=1,2,\cdots$，故数列$\{S_n\}$有界，$p$-级数收敛.

综上所述，$p\leqslant 1$ 时，p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散；$p>1$ 时，p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛.

特别地，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\cdots$ 收敛，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\cdots$ 发散.

例 8.8　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解　因为$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\dfrac{1}{n+1}$，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$$

发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

定理 8.4（比较判别法的极限形式）　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，则

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，且 $0<l<+\infty$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

证　这里仅对情形(1)进行证明，情形(2)，(3)的证明方法是类似的.

设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$，且 $0<l<+\infty$，则对于任意给定 $\varepsilon>0$（令 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}$），存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{u_n}{v_n}-l\right|<\dfrac{l}{2}$，即$\dfrac{l}{2}\cdot v_n<u_n<\dfrac{3l}{2}\cdot v_n$.

所以，由不等式$\dfrac{l}{2}\cdot v_n<u_n$ 知，当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛；由不等式 $u_n<\dfrac{3l}{2}\cdot v_n$ 知，当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散时，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散. 所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性.

例 8.9 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tan\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

例 8.10 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

定理 8.5(比值判别法) 给定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$,则

(1) 当 $\rho<1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$)时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(3) 当 $\rho=1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.

***证** (1) 当 $\rho<1$ 时,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$,可取正数 r,使得 $0<\rho<r<1$,而且存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,有不等式$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<r$,因此

$$u_{N+2}<ru_{N+1},\ u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1},\ u_{N+4}<ru_{N+3}<r^3u_{N+1},\cdots$$

正项级数 $ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+r^3u_{N+1}+\cdots$是公比为 $r(0<r<1)$的等比级数,收敛. 而级数 $u_{N+2}+u_{N+3}+u_{N+4}+\cdots$的各项小于级数 $ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+r^3u_{N+1}+\cdots$的对应项,所以

$$u_{N+2}+u_{N+3}+u_{N+4}+\cdots$$

收敛,进而由级数的性质 8.3 知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 时,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$,可取正数 r,使得 $1<r<\rho$,而且存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,有不等式$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>r>1$,由 $u_{n+1}>u_n$ 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 从第 N 项以后开

始，每一项随 n 的增大而增大，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

类似地，可以证明当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(3) 由实例说明，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 一个发散，一个收敛，但他们都满足 $\rho=1$.

例 8.11　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$ 的敛散性.

解　因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n+3)3^{2n+3}}}{\dfrac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}}=\frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=\frac{1}{9}<1,$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$ 收敛.

例 8.12　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$ 的敛散性.

解　因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty,$$
所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$ 发散.

定理 8.6(根值判别法)　给定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 当 $\rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$)时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

(3) 当 $\rho=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.

定理 8.6 的证明与定理 8.5 的证明类似，读者可自行证明.

例 8.13　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解　因为
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\frac{\sqrt{e}}{2}<1,$$

由定理 8.6 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$ 收敛.

例 8.14　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=3>1$,

由定理 8.6 可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$ 发散.

习　题　8.2

1. 用比较判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$;　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ $(a>0)$.

2. 用比值判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

3. 用根值判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{4}{3}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+e^n}$.

8.3　交错级数　绝对收敛与条件收敛

8.3.1　交错级数及其收敛判别法

定义 8.3　设 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$,形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots+(-1)^nu_n+\cdots$$

的级数称为**交错级数**.

定理 8.7(莱布尼茨判别法)　如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足

(1) $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛,而且和 $S\leqslant u_1$,余项 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k$ 满足 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

证　首先研究部分和数列 $\{S_n\}$ 中的偶数项

$$S_2,S_4,S_6,\cdots,S_{2k-2},S_{2k},\cdots,$$

其中,$S_{2k}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2k-1}-u_{2k})$.

由条件(1)知,所有括号内的差都是非负的,即 $u_i-u_{i+1}\geqslant0(i=1,3,\cdots,2k-1)$,所以数列 $\{S_{2k}\}$ 是单调递增数列.

S_{2k} 又可写为

$$S_{2k}=u_1-[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots+(u_{2k-2}-u_{2k-1})+u_{2k}],$$

同样,由条件(1)知,$S_{2k}\leqslant u_1$,即数列 $\{S_{2k}\}$ 有上界. 根据极限存在准则,数列 $\{S_{2k}\}$ 收敛,不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=S\leqslant u_1$.

再考虑数列 $\{S_n\}$ 中的奇数项

$$S_1,S_3,S_5,\cdots,S_{2k+1},\cdots,$$

因为 $S_{2k+1}=S_{2k}+u_{2k+1}$,由条件(2)知,$\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=0$,所以

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}(S_{2k}+u_{2k+1})=\lim_{k\to\infty}S_{2k}+\lim_{k\to\infty}u_{2k+1}=S+0=S.$$

综上所述,有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S(S\leqslant u_1)$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛,且 $S\leqslant u_1$.

最后,考虑交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 余项 r_n 的绝对值

$$|r_n|=|\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots)|,$$

且绝对值符号内也是满足条件(1)和条件(2)的交错级数,所以该级数收敛,并且 $|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

例 8.15　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 是交错级数,并且满足

(1) $u_n=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=u_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$;

所以,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛.

8.3.2 绝对收敛与条件收敛

定义 8.4 如果任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项取绝对值所成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

可以验证，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2}$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$ 条件收敛.

定理 8.8 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2|u_n|$ 收敛. 又因为

$$0 \leqslant |u_n| - u_n \leqslant 2|u_n| \quad (n=1,2,\cdots),$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|u_n| - u_n)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [|u_n| - (|u_n| - u_n)]$ 收敛.

例 8.16 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin an}{n^2}$ (a 为常数)的敛散性.

解 由于 $\left|\dfrac{\sin an}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2} (n=1,2,\cdots)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin an}{n^2}\right|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin an}{n^2}$ 收敛，而且是绝对收敛.

例 8.17 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

解 由于 $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 收敛.

但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛.

习 题 8.3

判别下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$；